

***Errores en el ajuste del valor posicional
en tareas de estimación:
Estudio con maestros en formación***

CARLOS DE CASTRO HERNÁNDEZ

Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle. Universidad Autónoma de Madrid

ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ E ISIDORO SEGOVIA ALEX

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Resumen:

En este estudio se analizan los errores –en el ajuste del valor posicional– que cometen los maestros en formación en tareas de estimación de multiplicación y división con números naturales y decimales. Para ello, se ha elaborado una prueba de estimación compuesta por 24 cálculos directos –sin contexto. Participan 26 estudiantes del CSEU La Salle. Se administra la prueba de estimación a los maestros y posteriormente se realizan entrevistas para determinar los errores que han cometido. Se han encontrado 8 tipos diferentes de errores. Destacan, por su frecuencia, los errores debidos a un conteo defectuoso de las posiciones para establecer el orden de magnitud de los resultados y los que se producen al dividir un número por otro mayor añadiendo un cero de más al cociente. La colocación de la coma decimal en el resultado es, en todos los casos, una gran fuente de dificultad.

Abstract:

In this study we analyze the errors –in the adjustment of positional value– of preservice elementary teachers in computational estimation tasks of multiplication and division with integers and decimals. We have elaborated an estimation test composed by 24 direct computations –without context. Twenty six students of CSEU La Salle have participated in the study. The estimation test was administered to the teachers and after this we interviewed the teachers to determine the errors made in estimation. We have found 8 different types of errors. We can highlight, because of their frequency, errors due to a wrong counting of positions to establish the order of magnitude of results and those errors produced in division when divisor is greater than the dividend adding one extra zero to the quotient. Finding the place for decimal point is, in all the cases, a great source of difficulty.

Introducción

La estimación en cálculo puede definirse como el “proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo” (Sowder 1988, p. 182). La estimación es una destreza socialmente útil cuyo conocimiento, dentro del desempeño de cualquier profesión, permite una adaptación mejor a las circunstancias del entorno. Por esta razón, desde hace tiempo se ha tratado de introducir la estimación en el currículo matemático de la educación primaria y secundaria. Uno de los medios principales para favorecer esta introducción es a través de la formación de maestros. Esto ha sido señalado por el NCTM (2000) al indicar que:

Los maestros deben ayudar a sus alumnos a aprender a decidir cuándo es más apropiada una respuesta exacta o una estimación, cómo elegir el método de cálculo más adecuado, y cómo evaluar la razonabilidad de los resultados de los cálculos. (p. 220)

Dado que los maestros son los responsables más directos de la introducción de la estimación en el currículo, parece importante preguntarse sobre cuál es su conocimiento sobre la estimación. Además, un estudio sobre la habilidad de estimar de los maestros y sobre los errores que cometen al estimar puede ayudarnos a comprender mejor los puntos fuertes y las debilidades de su pensamiento sobre conocimientos y destrezas estrechamente vinculados a la habilidad de estimar. Entre estos aspectos pueden destacarse el cálculo mental, la comparación de números y el conocimiento sobre los decimales y el valor posicional.

En el presente trabajo analizamos los errores cometidos por los maestros en formación en el ajuste del valor posicional cuando realizan estimaciones para operaciones de multiplicación y división con números naturales y decimales. El objetivo de este análisis es el de clasificar estos errores y estudiar su distribución con relación al tipo de operación y al tipo de número.

Dificultades de los maestros en formación con los números decimales menores que uno

Los maestros en formación suelen tener dificultades con los decimales menores que uno (Thipkong y Davis, 1991; Tirosch y Graeber, 1989; Tirosch y Graeber, 1990). Algunos sostienen de manera explícita que "la multiplicación siempre aumenta" o que en un problema de división, el cociente debe ser menor que el dividendo (Tirosch y Graeber, 1989). Suelen mostrar una dependencia muy fuerte de las operaciones con números enteros y del conocimiento procedimental que tienen sobre las mismas.

Markovits y Even (1999) también han encontrado dificultades en el uso de los decimales por parte de los maestros al proponer la siguiente situación de clase en cursos de formación:

A un alumno se le dijo que $15,24 \times 4,5 = 6858$, y se le pidió que colocara él la coma decimal. El alumno contestó que la respuesta era 6,858 porque había dos lugares decimales después de la coma decimal en 15,24 y un lugar después de la coma decimal en 4,5 y que juntos hacen tres lugares detrás de la coma decimal en la respuesta. ¿Cómo le responderías?

Algunos maestros, en esta situación, dan la respuesta del niño por correcta.

Por otro lado, es necesario indicar que gran parte de las dificultades, que tienen los niños y los maestros en formación, con los números decimales tienen su origen en el modo en que estos se enseñan en la escuela. Lampert (1989, p. 229), refiriéndose a las dificultades relacionadas con el valor posicional, señala a la "invisibilidad de la cantidad en el sistema de valor posicional" como uno de los problemas que impiden alcanzar una correcta comprensión del modo en que se trabaja con el valor posicional en los algoritmos de multiplicación y división:

Precisamente por que los ceros suelen "asumirse" ... los números que aparecen según se realizan las distintas partes del algoritmo no se parecen a los números que corresponden a las cantidades que realmente representan. Para obtener la respuesta final, uno debe seguir cuidadosamente el procedimiento para recuperar el orden de magnitud correcto. (p. 229)

G. Brousseau, N. Brousseau y Warfield (2004) critican el hecho de que los decimales se enseñen como enteros con coma decimal: "A nuestro parecer, el procedimiento didáctico de extender de forma 'analógica' o 'metafórica' el uso del conocimiento carece de valor" (p. 20). Para ellos, los enteros, las fracciones y los decimales son muy diferentes y se debe dar a cada tipo de número un tratamiento específico evitando, por ejemplo, tratar la división con números decimales, después de haber estudiado la división con enteros, como una simple aplicación de la misma idea sin importar que algunas propiedades de la división se hayan "modificado drásticamente sin que los alumnos lo hayan advertido" (p. 20).

Errores en la estimación en cálculo

Dentro del campo de la estimación, la palabra “error” se utiliza con dos significados distintos. Por una parte, Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) indican que:

Error es el término que designa la diferencia o desviación que un valor aproximado tiene con respecto del valor exacto al que representa. Cuando es necesario precisamos más y al error le llamamos error absoluto, para diferenciarlo del error relativo, que expresa la razón entre el error absoluto y el valor exacto. (p. 85)

En este contexto podríamos decir que el término “error” es sinónimo de “inexactitud” y algunas veces –cuando el error relativo es grande– de “imprecisión”. La propia naturaleza de la estimación supone la existencia y la aceptación de un cierto margen de error. De acuerdo con esto, Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) ven la tolerancia del error como una “comprensión del concepto de estimación que permite [a quien la realiza] sentirse cómodo con cierto grado de error” (p. 198). No obstante, este margen de error debe tener un límite, pues un exceso de tolerancia con el error podría conducir a producir estimaciones no razonables.

Por otra parte, el término “error” también se emplea en matemáticas como manifestación de un “conocimiento deficiente e incompleto” (Rico, 1995, p. 69). A veces, el error es el “efecto efecto de un conocimiento previo que era interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado” (Brousseau, 1997, p. 82). Esta forma de ver el error tiene su origen en trabajos como el de Bachelard (1999), que introdujo el término “obstáculo epistemológico”:

Es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones... es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos... Se conoce en contra de un conocimiento anterior (p. 15)

Así, el conocimiento de los números naturales puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje de los decimales. Esto se debe a la consideración de los números decimales como “números naturales con un punto decimal” (p. 92). Además, Brousseau (1997) añade:

Esta integración como números naturales obviamente será reforzada por el estudio de las operaciones de forma mecánica, es decir, acciones efectuadas de memoria, sin comprensión, realizadas de la misma forma que con números naturales, únicamente con una pequeña extensión para el punto decimal. (p. 92)

De acuerdo con esto, algunas ideas equivocadas sobre las operaciones –como la creencia de que “la multiplicación siempre aumenta”– reflejan un conocimiento que tiene un cierto dominio de validez –las operaciones con números enteros– pero constituyen un error cuando se intenta extrapolarlas a las operaciones con decimales menores que uno. Esta situación ha sido también descrita por Hiebert y Wearne (1986):

La extensión de los conceptos propios de los números enteros a referentes apropiados para el sistema de las fracciones decimales es un proceso delicado... Algunas características del sistema de los números enteros pueden importarse y conectarse al sistema de símbolos de las fracciones decimales, pero otras no... (p. 204)

Dentro del ámbito de la estimación, el análisis de los errores ha sido tratado en algunas investigaciones –De Castro, Castro y Segovia (2002), Levine (1980) y Morgan (1990). En algunos de estos trabajos, se han descrito errores en el ajuste del valor posicional. Sin embargo, este tipo de error no ha sido todavía analizado en profundidad estableciendo subcategorías del mismo que permitan distinguir los orígenes diversos de los mismos.

Se han propuesto dos objetivos para la investigación: (1) Elaborar un esquema de clasificación para los errores –que se producen en el ajuste del valor posicional– que cometen al estimar los maestros

en, y (2) Estudiar la distribución de dichos errores¹ en función del tipo de operación y del tipo de número que aparecen en las tareas de estimación.

MÉTODO

Variables

Se han empleado dos variables independientes en la elaboración de las tareas de estimación: el *tipo de operación* y el *tipo de número*. Los *tipos de operación* considerados han sido la multiplicación (O_1 en las tablas), división de un número por otro menor (O_2), y división de un número por otro mayor (O_3). En cuanto al *tipo de número* se han empleado cuatro tipos de tareas de estimación: tareas en las que sólo aparecen números enteros (N_1); tareas en las que aparecen números decimales mayores que uno pero no contienen números decimales menores que uno (N_2); tareas en las que aparecen números decimales menores que uno pero no contienen números decimales menores que 0,1 (N_3); y tareas en las que aparecen números decimales menores que 0,1 (N_4).

En el trabajo se han considerado como variables dependientes: El *tipo de error* cometido por el sujeto al producir su estimación y la *puntuación*² que obtiene al realizar la misma. Esta puntuación es de cero puntos si el porcentaje de error es superior al 30%, de un punto si dicho porcentaje está entre el 20% y el 30%, de dos puntos si es mayor que el 10% pero menor o igual que el 20% y de tres puntos si es menor o igual que el 10%.

Los sujetos

En la investigación han participado 26 sujetos³ del Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle⁴. Todos ellos cursaron, durante el segundo semestre del curso 2002-2003, la asignatura “Matemáticas y su Didáctica”. Dentro de la misma han tenido un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo –de 10 horas de duración– en el que aprendieron estrategias de estimación y practicaron la estimación en cálculos directos y aplicados. También se discutieron aspectos sobre la enseñanza de la estimación –como la evaluación– y se analizaron propuestas de actividades de estimación para la Educación Primaria. Al finalizar el periodo de instrucción, los alumnos realizaron la prueba de estimación y la entrevista que se presentan en la siguiente sección.

Tabla 1. *Tareas de estimación clasificadas por tipo de operación y tipo de número*

Número	Operación		
	O_1	O_2	O_3
N_1	(1) 46×771	(3) $968 \div 24$	(5) $86 \div 222$
	(2) 58×244	(4) $354 \div 88$	(6) $36 \div 258$
N_2	(7) $78,4 \times 89,5$	(9) $85,9 \div 3,42$	(11) $9,88 \div 25,6$
	(8) $34,1 \times 47,2$	(10) $96,2 \div 6,25$	(12) $8,85 \div 42,6$
N_3	(13) $2,57 \times 0,72$	(15) $0,962 \div 0,25$	(17) $0,37 \div 0,543$
	(14) $0,45 \times 7,85$	(16) $0,747 \div 0,35$	(18) $0,63 \div 0,785$
N_4	(19) $0,025 \times 776$	(21) $0,46 \div 0,066$	(23) $0,059 \div 0,23$
	(20) $852 \times 0,048$	(22) $0,68 \div 0,024$	(24) $0,086 \div 0,42$

¹ Esta parte aparece sólo esbozada al final de la sección de resultados.

² Esta variable no aparece en la parte cualitativa de la investigación dedicada al análisis de errores. Sin embargo, ha sido incluida en este informe para que el lector conozca el margen de error permitido en las estimaciones y para facilitar la interpretación de la columna “puntuación” de la tabla 2.

³ Han participado 156 sujetos en el marco global de la investigación. De ellos, 133 pertenecientes al CSEU La Salle y 23 a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

⁴ Centro universitario privado, adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid.

Instrumentos

En este estudio se han utilizado dos instrumentos: a) una prueba de estimación que ha servido para estudiar la dificultad de las tareas de estimación en función del tipo de operación y tipo de número⁵ y, b) una entrevista que se ha utilizado para realizar el análisis de errores.

La prueba de estimación. La prueba de estimación está compuesta por los 24 cálculos que aparecen en la tabla 1. Los cálculos aparecen clasificados atendiendo a las variables independientes Tipo de operación y Tipo de número. En la tabla 2 se muestra un resumen del análisis previo realizado a las tareas de estimación que componen la prueba. En la primera columna, aparecen las tareas de estimación que se han propuesto. En la segunda se proponen distintos ejemplos de sustitución de los números iniciales por aproximaciones. En la tercera columna figura el tipo de sustitución –nombre de la destreza de aproximación– indicando la presencia –en su caso– de una compensación previa al cálculo. Por último, desde la columna cuarta a la sexta pueden observarse los resultados de las posibles estimaciones empleando cada destreza de aproximación –que se utilizaron para determinar el intervalo de respuesta aceptable, la puntuación que obtendría cada estimación y, por último, los intervalos de respuesta aceptable y del 30% de error.

Las entrevistas. Las entrevistas se han realizado con el fin de realizar la fase del estudio de análisis de errores. En dicha entrevista se pedía a los sujetos que dieran una estimación para un cálculo propuesto explicando el procedimiento que habían utilizado para producir su estimación. Los sujetos fueron divididos en dos grupos. En uno de los grupos se utilizaron para la entrevista las tareas impares de la prueba de estimación y en el otro grupo las pares. Las entrevistas han sido realizadas individualmente utilizando un programa de ordenador⁶. Fueron registradas utilizando una grabadora y transcritas a papel para su posterior análisis.

Tabla 2. Ejemplos de análisis de las tareas de estimación empleadas en la prueba

Tareas	Sustitución	Tipo de sustitución	Estimación	Puntuación	Intervalos
(1) 46×771	40×700	Truncamiento	28000	1	
	$40 \times 3/4 \times 1000$	Fracciones	30000	2	
	40×800	Redondeo + comp.	32000	3	[24826,46105]
	50×700	Redondeo + comp.	35000	3	[28000,46000]
	50×800	Redondeo	40000	2	
	100/2 de 800	Fracciones	40000	2	
	46×1000	Potencias de 10	46000	1	
	$0,6 \div 0,03$	N. compatibles	20	1	
	$0,5 \div 1/40$	Fracciones	20	1	
	$0,6 \div 1/40$	Fracciones	24	2	
(22) $0,68 \div 0,024$	$0,5 \div 0,02$	N. compatibles	25	2	[19,8 , 36,8]
	$0,7 \div 1/40$	Fracciones	28	3	[20,35]
	$0,6 \div 0,02$	Truncamiento	30	3	
	$0,66 \div 0,022$	N. compatibles	30	3	
	$0,75 \div 0,025$	N. compatibles	30	3	
	$0,7 \div 0,02$	Redondeo	35	1	

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE ERRORES

Al analizar las transcripciones de las entrevistas se han encontrado los tipos de errores que figuran a continuación. En cada caso se proponen algún ejemplo que acompaña la definición del error.

Error en el conteo de los ceros (PVI). Se produce cuando el sujeto emplea una estrategia de estimación correcta, empleando una destreza de aproximación y sustituyendo los datos iniciales por otros que acaban en uno o varios ceros, pero produce una estimación de un orden de magnitud distinto al del resultado exacto del cálculo debido a una contabilización incorrecta de los ceros.

⁵ En este trabajo sólo se informa de la parte de la investigación relativa al análisis de errores. No aparece, por tanto, la parte dedicada al estudio de la dificultad de las tareas en función de las dos variables independientes.

⁶ El mismo que se había empleado en la administración de la prueba de estimación para evitar que los sujetos hicieran cálculos escritos.

Entrevistador: 2.57×0.72

Sujeto 5: Y aquí pues cojo, por ejemplo, 250 por 70 y... O bueno. Por ejemplo, 200 por 70 que serían... 200 por 70, 1400. 1400 y le quito 4... A ver. Serían 1400... y le quito uno, dos, tres, cuatro. 0,14... ... Bueno pero como... he bajado mucho, puedo poner 0,2.

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Sujeto 1: Aquí serían 100 entre... 100 entre... Paso la coma y serían 1000... una, dos. Tengo que poner 1000... 10000 y 600. 10000 entre 600. Si lo divido entre 500, lo redondeo a 500 me daría... 10000 entre 500 me daría a 2... a 200.

Error en la determinación del valor posicional de la primera cifra del cociente (PV2). Es un error que se produce cuando en una división se utiliza como estrategia una adaptación del algoritmo escrito consistente en determinar la primera cifra del cociente y luego establecer el valor posicional de la misma –abandonando después el algoritmo de la división sin concluir el mismo:

Entrevistador: $96.2 \div 6.25$

Sujeto 6: Sería, como hay dos cifras [en 6.25] a la derecha de la coma, lo multiplicaría por 100. Sería 625 y el 96,2 también por 100, sería 9620. 9620 entre 625 sería 1,3 más o menos.

Error por falta de coordinación entre la destreza de aproximación y las reglas para operar el punto decimal (PV3). Son errores que se producen cuando el sujeto emplea una destreza de aproximación –como el redondeo– eliminando alguna cifra decimal, opera los números como si fuesen enteros, apartando la coma decimal, y después –al colocar la coma decimal– cuenta el número de cifras decimales de los números de partida sin tener en cuenta que estos números han sido previamente sustituidos por aproximaciones.

Entrevistador: 34.1×47.2

Sujeto 10: Lo redondeo. Esto a 50, el 47 a 50 y 34 a 30. 3 por 5 serían 15. Tomo el 3 y el 5. y dos ceros, del 4 y del 7, serían 1500. Pero 1500 le tengo que quitar estos dos decimales, con lo cual serían 15.

Omisión de los ceros en el ajuste del valor posicional (PV4). Error que consiste en que el sujeto quita las comas decimales, sustituye los números por aproximaciones terminadas en uno o varios ceros, opera las cifras significativas y establece el orden de magnitud del resultado ignorando los ceros finales de las aproximaciones empleadas en el cálculo y teniendo en cuenta únicamente el número de cifras decimales que hay en los datos iniciales.

Entrevistador: 2.57×0.72

Sujeto 29: 300 por 70... 3 por 7 son 21. Uno, dos, tres, cuatro. Sería 0,0021.

Error de añadir un cero de más en el cociente (PV5). Es un error que se produce cuando se comienza una división de un número por otro número mayor escribiendo “0,0” y moviendo un solo lugar la coma decimal en el dividendo.

Entrevistador: $8.85 \div 42.6$

Sujeto 30: Vamos a quitar la coma de 42,6. Corremos un lugar... y... en 8,85 también con lo cual tendríamos 88,5 entre 426 pero como no cabe, ponemos un 0... 0 coma... tampoco cabe. Pondríamos otro cero y tendríamos 885 entre 426. Entonces sería 0,0... a 2. Sería 0,02. Yo creo.

Recuperación impropia de la coma decimal en la división (PV6). Error que consiste en multiplicar el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10, calcular el cociente, y dividirlo por la misma

potencia de 10 por la que habíamos antes multiplicado. Es un error típico de la división. Los sujetos se comportan como si no supiesen que al multiplicar o dividir dividendo y divisor de una división por una potencia de 10, el cociente permanece inalterado.

Entrevistador: $354 \div 88$

Sujeto 16: 300 dividido entre 90. Le quito un cero a cada uno y me queda 30 dividido entre 9. 3 por 9, 27 y luego le pongo el 0 que le he quitado a los dos y ya está.

Entrevistador: $0.46 \div 0.066$

Sujeto 19: El 0,46 lo redondearía a 0,5. El 0,066 lo redondearía a 0,07. Y lo dividiría, que sería... 0,50 entre 0,07... 7 por 7, 49. 7 por 8, 56. 0,07, más o menos.

En el primer ejemplo no hay realmente “recuperación de la coma decimal”, puesto que no hay comas decimales, pero sí entra perfectamente dentro de la definición dada del error.

Error de operar la coma decimal en la división como en la multiplicación (PV7). Error en el que se suma el número de cifras decimales del dividendo y del divisor para establecer el número de cifras decimales del cociente. Parece una extrapolación inadecuada del método que se utiliza en la multiplicación para colocar la coma decimal en el resultado.

Entrevistador: $0.747 \div 0.35$

Sujeto 1: Este lo redondeo al 800 y este al 40. Entonces son: 8 entre 4 a 2. A 2, que serían, dos ceros de aquí y uno de aquí, serían 1000, 2000 y, como tengo que poner una, dos, tres, cuatro y cinco, serían... 2000,... 0,02.

Otros errores en el ajuste del valor posicional (PVOT). Son errores en el ajuste del valor posicional que no han podido incluirse dentro de las categorías anteriores. En el ejemplo siguiente el sujeto opera los decimales como si fuesen enteros, arrastrando el “0,”.

Entrevistador: $0.962 \div 0.25$

Sujeto 14: 0,962 lo voy a redondear a cero coma mil. Entre 0,20. El cero coma veinte lo redondeo hacia abajo, para que tenga un cero... y, en la división, pues quitarle un cero de cada lado. ¿No? Entonces, el primer divisor se queda en cero coma cien y el segundo en 0,2. Y 100 entre 2 son 50. El resultado es 0,50.

Para finalizar, en la tabla 4 puede verse la frecuencia de aparición de cada tipo de error y su distribución según el tipo de operación y el tipo de número presentes en las tareas de estimación. En ella puede verse como los errores son mucho más frecuentes cuando se opera con números decimales menores que uno.

Tabla 4. Número de errores de cada tipo según el tipo de operación y el tipo de número

Tipo de número	Tipo de operación	Tipo de error								Total	Total
		PV1	PV2	PV3	PV4	PV5	PV6	PV7	PVOT		
N ₁	O ₁	2	0	0	0	0	0	0	0	2	8
	O ₂	1	0	0	0	0	1	0	0	2	
	O ₃	0	0	0	0	4	0	0	0	4	
N ₂	O ₁	2	0	2	0	0	0	0	1	5	17
	O ₂	1	4	0	0	0	0	0	0	5	
	O ₃	1	0	1*	0	5	0	0	0	7	
N ₃	O ₁	3	0	1	3	1*	0	0	1	9	23
	O ₂	1	0	0	0	0	1	2	3	7	

	O₃	1	0	0	0	5	0	0	1	7	
	O₁	2	0	3	3	0	0	0	3	11	
N₄	O₂	1	3	0	0	0	5	1	1	11	34
	O₃	0	0	0	0	6	0	3	3	12	
Total		15	7	7	6	21	7	6	13	82	82

CONCLUSIONES

Los errores en el ajuste del valor posicional reflejan un conocimiento deficiente de las reglas de cálculo con números decimales. Como indican Hiebert y Wearne (1986) “A pesar de que todas las reglas están motivadas por consideraciones conceptuales, es posible que los alumnos no conecten las reglas con sus justificaciones conceptuales” (p. 202). Esta ausencia de conexiones –falta de comprensión– hace que algunos alumnos “inventen” procedimientos incorrectos para determinar la posición adecuada para el punto decimal. Los errores en el ajuste del valor posicional que cometen los maestros en formación habían sido antes descritos por (Gómez, 1995a, 1995b) en trabajos sobre cálculo mental. Así, Gómez (1995a) hace una clasificación de este tipo de fallos y errores en cálculo mental que incluiría: no recuperación de la coma decimal, no recuperación de los ceros apartados, eliminación-recuperación impropia de la coma, ubicación incorrecta de la coma decimal y contabilización incorrecta de los ceros del resultado. Este autor encuentra que algunos de los errores son debidos a extrapolaciones (Gómez 1995b, p. 318) como el uso de la coma decimal en la multiplicación como se hace en la división. El mismo tipo de error que se ha encontrado en este trabajo en la categoría PV7. Las similitudes que se encuentran entre los resultados de Gómez (1995a, 1995b) y del presente trabajo se deben a que, tanto las tareas de cálculo mental como las de estimación obligan a los maestros en formación –que muestran una gran dependencia del cálculo escrito– a realizar los cálculos mentalmente. En esta situación se ponen de manifiesto debilidades del conocimiento sobre el valor posicional y sobre la forma de operar la coma decimal que, en el cálculo escrito, a veces quedan ocultas bajo una ejecución mecánica.

El error PV5 no ha sido descrito en otros estudios sobre errores en estimación. En él parece como si los sujetos atribuyesen a los ceros que hay en el cociente, a la izquierda y derecha de la coma decimal, dos significados distintos. El “0,” significaría “Cuando divido un número por otro número mayor debo comenzar la operación escribiendo ‘0,’ en el cociente”. Sin embargo, el segundo cero significaría “cero al cociente y bajo la cifra siguiente”. La detección de este tipo de error, asociado a la división de un número por otro número mayor justifica el haber introducido este tipo de operación –distinguiéndola de la división de un número por otro menor. Esta distinción no se había hecho en De Castro y otros (2002) ni en ninguna otra investigación previa sobre estimación.

REFERENCIAS

- BACHELARD, G. (1999). *La formación del espíritu científico*. (22^a ed.). México, DF: Siglo XXI.
- BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. (Traducido al inglés y editado por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N., & WARFIELD, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 1–20.
- DE CASTRO, C., CASTRO, E., & SEGOVIA, I. (2002). Influence of number type and analysis of errors in computational estimation tasks. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 201-208). Norwich, UK.

- GÓMEZ, B. (1995a). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares.
- GÓMEZ, B. (1995b). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 313-325.
- HIEBERT, J., & WEARNE, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal numbers. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- LAMPERT, M. (1989). Choosing and using mathematical tools in classroom discourse. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 1, pp. 223-264). Greenwich, CT: JAI.
- LEVINE, D. R. (1980). *Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students*. Doctoral dissertation. New York University.
- MARKOVITS, Z., & EVEN, R. (1999). The decimal point situation: A close look at the use of mathematics-classroom-situations in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 15, 653-665.
- MORGAN, C. (1990). Factors affecting children's strategies and success in estimation. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 265-272). Mexico.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- REYS, R. E., BESTGEN, B. J., RYBOLT, J., & WYATT, J. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 183-201.
- RICO, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). Bogotá & México: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.
- SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO, E., & RICO, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- SOWDER, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.
- THIPKONG, S., & DAVIS, E. J. (1991). Preservice elementary teachers' misconceptions in interpreting and applying decimals. *School Science and Mathematics*, 91(3), 93-99.
- TIROSH, D., & GRAEBER, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 79-96.
- TIROSH, D., & GRAEBER, A. O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 98-108.