Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático

María Consuelo Cañadas Santiago
Universidad de Zaragoza.

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada.

Resumen:

En este trabajo se presenta el resultado obtenido del análisis de un proceso de razonamiento inductivo desarrollado por 12 estudiantes de secundaria en un contexto de resolución de problemas. Se plantea un problema, en el transcurso de una entrevista, que consiste en determinar el número máximo de regiones que se obtienen al trazar rectas sobre un plano. Durante la resolución del problema los estudiantes, y a través del dialogo con el entrevistador, han de explicar y justificar sus decisiones. Centrándonos en el trabajo de Pólya y en otras investigaciones previas relacionadas sobre este tema, se define un sistema de categorías mediante las cuales se organizan los datos para su análisis.

Abstract:

In this report we present some of the results of the analysis of the inductive reasoning process developed by 12 Secondary students in a problem solving context. We proposed a problem in an interview in which students are required to determine the maximum number of regions they get when they trace straight lines in a map. They must justify their answers as well. Focusing on Polya's investigation and another related to it, we define a category system which we use in data analysis.

Introducción

En el marco idílico de la educación matemática que se presenta en el primer capítulo del texto Principios y Estándares para la Educación Matemática del N.C.T.M. (2000) se indica: “Los profesores ayudan a sus alumnos a formular, perfeccionar y explorar conjeturas partiendo de evidencias y a utilizar diferentes tipos de razonamiento, así como distintas técnicas de demostración para confirmarlas o refutarlas” (p.3). Se considera en este documento que para que un individuo entienda la matemática es de suma importancia que sea capaz de razonar, que razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos matemáticos.

La habilidad de razonar está relaciona con el pensamiento y es propia de los seres humanos. Al razonamiento se le asocian procesos de pensamiento diferentes. Por una parte, los procesos que conllevan una inferencia explícita, son aquellos en los que de una o varias proposiciones, se infiere otra; estos procesos están intrínsecamente ligados a un lenguaje. Por otro lado se consideran los procesos inherentes a un acto de exploración (Duval, 1999), en éstos nos vamos a centrar.

En Psicología, una ciencia cada vez más especializada, cuando se alude a los procesos de pensamiento se hace referencia generalmente a aquellas acciones de inferencia en tareas de razonamiento deductivo e inductivo y al marco global en el que se insertan estas inferencias como son la toma de decisiones y la resolución de problemas (González, 1998). Se puede considerar el razonamiento, de manera general, como el modo de encadenar conceptos e ideas que permite llegar a una conclusión.

Razonamiento inductivo y resolución de problemas

La distinción clásica y generalmente aceptada, entre tipos de razonamiento, se hace entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión que se sigue de las mismas, mientras que el razonamiento inductivo consiste en alcanzar una conclusión que está apoyada por unas premisas. No obstante, existen dudas con relación a una separación drástica de estos dos tipos de razonamiento. No resulta fácil hablar de razonamiento inductivo sin que aparezca unido al razonamiento deductivo (Duval, 1999). No obstante, para este trabajo es necesario que nos centremos en el razonamiento inductivo y vamos a tratar de hacerlo, sin perder de vista la recomendación de Duval.

Hemos apuntado que el razonamiento inductivo es un proceso que parte de sucesos particulares y busca la generalidad de los hechos que acontecen. Un razonamiento inductivo se considera fuerte si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas. En este sentido se dice que el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión. Pólya, gran defensor de la resolución de problemas y de la utilización del razonamiento inductivo para el aprendizaje de las matemáticas, concibe las matemáticas como una actividad en la que el descubrimiento es uno de sus principales compromisos, en definitiva, como resolución de problemas; considera que muchos descubrimientos se han hecho por razonamiento inductivo y que investigar una situación comprobando casos particulares es una estrategia poderosa en el aprendizaje, en general, y en el de las matemáticas en particular, pues mirar casos especiales ayuda a entender una situación y ver si una conjetura sobre una regla se cumple o no. Pólya (1966) establece cuatro pasos en un proceso correcto de razonamiento inductivo para la resolución de problemas.

- Trabajo con casos particulares.
- Formulación de conjetura.
- Justificación de la conjetura.
- Comprobación con nuevos casos particulares.

Investigaciones realizadas, con objetivos muy próximos al de este trabajo, (Jeffery, 1978; Almeida, 1996; Ibañes, 2001) han detectado grandes dificultades en la realización de estos pasos por parte de los alumnos y lo achacan a la escasez de trabajo sistemático de los estudiantes, de niveles educativos inferiores a los universitarios, sobre procesos informales de justificación de propiedades matemáticas. Cuando los procesos de razonamiento relacionados con la justificación son tratados en niveles educativos de secundaria y primeros cursos de universidad, aparecen fuertes vinculaciones con la evidencia empírica y la búsqueda de patrones (Baker, 1996). De acuerdo con las ideas anteriores, reivindicamos que, en la medida que lo permita cada nivel educativo, se lleve a cabo trabajo con patrones, se aventuren conjeturas que se aceptarán o rechazarán dependiendo de la justificación que los estudiantes sean capaces de realizar. Siempre que se trata con relaciones y se miran patrones, se trata con generalizaciones. La generalización, partiendo de casos específicos para llegar a una regla general, es un aspecto fundamental en el quehacer matemático, una forma de llegar al álgebra.. Las reglas generales pueden ser descritas verbalmente, algebraicamente, geométricamente, gráficamente.

Objetivo de la investigación

El objetivo de investigación, de este trabajo, es realizar un análisis y posterior descripción del razonamiento inductivo empleado por 12 estudiantes de Secundaria, cuando resuelven un problema "no simple" para ellos.

METODOLOGÍA

Se ha utilizado la entrevista individual semiestructurada, como metodología, por creer que para estudiar el razonamiento de un sujeto se requiere de una observación "cercana" al mismo, en el momento de realizar la tarea. La entrevista preparada y organizadas las posibles preguntas y respuestas a hacer a, y, por los alumnos, pero con libertad para modificarlas durante el desarrollo de la actividad, si es necesario hacerlo durante el desarrollo de la misma. La persona que realizó todas las entrevistas fue una de las investigadoras. A los estudiantes se les plantea una situación abierta y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta (Cohen y Manion, 1990).

Problema

Tanto Pólya (1966) como Jeffery (1978) defiende que si se trata de analizar las explicaciones dadas por estudiantes, es necesario centrarse en contextos donde las cuestiones no sean procedimientos estándar y se supone que los contextos más apropiados son aquellos que involucran investigación de situaciones matemáticas y en las que los alumnos lleguen a conclusiones y den explicaciones.

En el caso que nos ocupa, la situación planteada a los alumnos en un lenguaje asequible para ellos es el siguiente problema:

> *Un plano P es disecado por un número de rectas. Todo par de rectas distintas se corta en un sólo punto. ¿Cual es el mayor número de partes en que el plano queda dividido por las rectas trazadas?*

Este problema no se puede ver como uno de tipo familiar, ni puede ser resuelto utilizando un algoritmo simple. Utilizar un método de ensayo y error puede dar resultados positivos. Si se utiliza la estrategia de ver qué pasa tomando números pequeños, la iteración y la recursión juegan un papel importante en el proceso de resolución del mismo. La característica esencial en la iteración, es la ejecución repetida de alguna noción particular- en esta ocasión la separación del plano en "partes o trozos de plano" mediante el trazado de restas sobre el mismo-. La iteración produce una secuencia de términos como a_n, $a_{n+1,}$ cada uno de los cuales depende de sus predecesores de una cierta forma- en este caso concreto, el trazado de una línea da origen a dos trozos; la segunda línea da lugar a que aparezcan cuatro trozos, añadiendo la tercera línea aparecen siete trozos, y así sucesivamente-. La continuación de este proceso permite descubrir una cierta regularidad y la recursión proporciona la siguiente expresión:

$$a_1=2, \quad a_2=4, \quad a_3=7, \dots \qquad a_{n+1}=a_n+n+1$$

Esta expresión, puede constituir una solución aceptable en algunos niveles educativos. Continuando con la estrategia emprendida para resolver el problema, se pueden observar las diferencias entre dos términos adyacentes de la secuencia, y deducir una regla desde estas comparaciones especiales y razonando que: *si se aumenta una línea, el número de trozos que aumenta es, en cada caso, uno más que en el caso anterior*. El aumento al pasar de una línea a dos es de *dos* partes de plano, el aumento al pasar de dos líneas a tres, es de *tres* partes de plano y así sucesivamante.

Esta estrategia que estamos comentando, para que sea efectiva, pasa por un serie de acciones sistemáticas: Ir señalando cómo van aumentando el número de regiones según aumenta el número de rectas trazadas. Descubrir que el mayor número de regiones se obtiene cuando al trazar una nueva recta, ésta corta al mayor número de las que ya había trazadas. Ordenar los datos en una tabla que sirva de ayuda para ver la relación entre ellos para. Generalizar la relación. Finalmente, demostrar la expresión general por inducción completa.

Sujetos

Aunando las orientaciones curriculares (BOE, 2003) y nuestros intereses de investigación se vio la idoneidad de tomar estudiantes de los últimos cursos de secundaria para desarrollar este trabajo. Dado que pretendíamos estudiar el comportamiento de los alumnos durante la realización de la tarea, tomamos doce sujetos de los cuatro últimos cursos de Educación Secundaria elegidos intencionadamente de la siguiente forma: tres estudiantes de cada uno de los cursos, atendiendo a los rendimientos de los alumnos: alto (1), medio (2), bajo (3). Al género (chica, chico). De esta forma de los doce alumnos que intervinieron había cuatro de cada tipo de rendimiento; siendo seis chicas y seis chicos. La identificación de cada uno de ellos se hizo utilizando siglas que indicaban curso al que pertenecen y rendimiento, no se consideró que se pudiese obtener resultados diferentes en función del sexo de los sujetos, por lo que no se indicó esta diferencia.

La pretensión es "ver" como funcionan los pasos de Pólya asociados al razonamiento inductivo en la resolución del problema mencionado, con los alumnos elegidos y comprobar hasta donde son capaces de llegar en el proceso descrito anteriormente. No se intenta hacer una generalización de los resultados obtenidos. Como mucho, mostrar la forma de actuar de unos sujetos concretos y que puede servir de referencia para profesionales de la enseñanza de niveles semejantes en un trabajo similar con sus alumnos.

RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

Los datos se recogieron de tres modos: a) las entrevistas, que fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas, b) los trabajos escritos realizados por los estudiantes y, c) las notas que la entrevistadora tomó durante y después de la entrevista, sobre aspectos relevantes imposibles de registrar en la cinta audio. Toda esta información, convenientemente preparada, se trató mediante el programa de análisis cualitativo de datos, Nud*ist revision (N4). Esto permitió ver los datos de una forma estructurada, descubrir detalles, patrones y relaciones entre ellos.

Para la preparación de la información fue útil y necesario definir un sistema de categorías que respondía a las acciones relacionadas con el razonamiento inductivo, adaptando los pasos de Pólya, anteriormente señalados, a la información real proporcionada por la producción de los estudiantes, siguiendo las directrices de Anguera (1991) y las aportaciones de los investigadores Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992); Goetting, (1995), Edwards, (1999), Reid, (2002). El sistema de categorías y subcategorías que quedó establecido se muestran en la tabla 1.

RESULTADOS

El análisis de los datos recogidos en los documentos señalados anteriormente permite comprobar que, aunque el enunciado del problema se trató de hacer de forma cercana a los estudiantes, utilizando un vocabulario de expresión sencilla, la comprensión del enunciado presentó dificultad para todos los estudiantes. Las dificultades fueron de distinta índole. Los alumnos de de 3º de ESO no entendían la propuesta de trabajo que se les hacía. En el resto de los cursos, la dificultad estaba relacionada con la comprensión de conceptos involucrados en el problema, y que no habían trabajado anteriormente, o lo habían hecho poco (regiones, plano o rectas son los conceptos que más dudas suscitaron).

CATEGORÍAS	**SUBCATEGORÍAS**
1. Enunciado de la tarea	Comprensión del enunciado El estudiante interpreta incorrectamente Pierde/considera el enunciado en su trabajo
2. Trabajo con casos particulares	Número de casos particulares Tipos de casos particulares Sistemático/NO sistemático Organización
4. Formulación de conjeturas	Relación simple Proporcionalidad directa Relación de recurrencia Forma de representación Generalización de conjeturas
5. Validación de conjeturas	Basada en casos particulares Forma de representación
6. Justificación de la conjetura general	Necesidad de justificación Basado en casos particulares

Tabla 1

Una vez que la entrevistadora explica el enunciado y los estudiantes lo comprenden, se producen dos comportamientos diferentes. Por un lado, cuatro estudiantes (3ESO2, 1BAC3, 1BAC2 y 2BAC3) tienen en cuenta el enunciado de la tarea durante todo su trabajo, no lo olvidan. El resto, de los estudiantes, se centran en el trazado de rectas y el recuento de regiones y se olvidan del planteamiento de la tarea, perdiendo, en ocasiones, el objetivo que debían perseguir.

La forma en que los entrevistados trabajaron con los casos particulares y el uso que hicieron de los mismos queda reflejada en la tabla 2.

Casos particulares			
Sujeto	Número	Sis.	Or.
3ESO3	4	■	
3ESO2	5		■
3ESO1	4		■
4ESO3	3		■
4ESO2	4		
4ESO1	4	■	■
1BAC3	5		■
1BAC2	+ de 5	■	
1BAC1	5		■
2BAC3	4	■	
2BAC2	5	■	■
2BAC1	3	■	

Tabla 2

Se observa en la tabla1 que solamente dos estudiantes organizan los datos que van obteniendo sistemáticamente.

Todos los estudiantes coincidían en que el éxito de la tarea radica en el control de un número elevado de casos particulares. Todos los estudiantes excepto 1BAC2 y 2BAC3 trazaron un número de rectas comprendido entre 0 y 5.

Hay estudiantes que siguieron algún patrón al trazar las rectas (paralelas entre sí o formando cuadrícula) pero así no conseguían el mayor número de regiones. Algunos estudiantes fueron sistemáticos en el trazado de las rectas y trataron que la última recta cortara a las anteriormente trazadas. Estos mismos estudiantes iban aumentando el número de rectas de una en una, salvo 2BAC3, quien pasó del caso con tres rectas, al caso de ocho.

La forma en que los estudiantes trataban los casos particulares influye en la tarea de generalización. En la tabla 2 se pueden observar los estudiantes que organizaron la información relativa a los casos particulares que trabajaron. Sólo una de los estudiantes (4ESO1) lo hizo por propia iniciativa. El resto de los estudiantes que organizaron la información, lo hicieron guiados por la entrevistadora.

En cuanto a la formulación de conjeturas, todos indicaron que cuantas más rectas tracen, más regiones obtienen. En la tabla 3 quedan reflejadas las conjeturas que formularon y la generalización que obtuvieron, en caso de que lo consiguieran[2].

Sujetos	Conjeturas					
	Infini	Lineales			Recur	Gener
		n+1	2n	R.T		
3ESO3			■			
3ESO2			■			
3ESO1		■	■	■		
4ESO3	■		■	■	■	
4ESO2	■					
4ESO1	■	■			■	■
1BAC3			■		■	
1BAC2	■		■		■	
1BAC1	■		■			
2BAC3	■		■	■	■	
2BAC2	■		■		■	
2BAC1	■		■		■	

Tabla 3

En la columna encabezada por Infini se señalan los estudiantes que consideraron que el número de regiones que se obtiene es infinito, puesto que pueden trazar un número infinito de rectas en el plano, que es ilimitado. La entrevistadora ha de aclarar que de los que se trata es de buscar la relación entre el número de restas trazadas y el número de regiones. A partir de aquí, todos los estudiantes excepto 4ESO2 consideran que entre el número de rectas trazado y el número máximo de regiones existe una relación lineal. Entre éstos se distinguieron tres grupos de sujetos. En un primer grupo están los que indican que el número de regiones que se obtiene es el número de rectas más uno. En un segundo grupo los que mencionan que el número de regiones es el doble del número de rectas. En un tercer grupo están los sujetos que utilizan la regla de tres como algoritmo para la resolución del problema.

[1] Sis. = Sistematiza, Or. = Organización

[2] Infini.= Infinitas; RT= Regla de Tres; Recur = Recursión; Gener = Generalización

Los estudiantes de 3º de ESO hacen intentos de generalizar a partir de los casos particulares, pero no obtienen ninguna conjetura para el caso general. En 4º de ESO hubo dos sujetos que obtuvieron una relación por recurrencia, mediante la cual se podía conocer el número máximo de regiones para un número determinado de rectas conociendo los casos particulares que le preceden.

Los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato, excepto 1BAC1 llegan a la relación por recurrencia y sólo 4ESO1 consigue un generalización que no es por una forma recurrente, siente necesidad de justificar que la expresión obtenida es correcta, pero no puede hacerlo.

La forma de expresar estas generalizaciones era oral, en todos los casos. Cuando los estudiantes buscaron una relación general aparecieron términos que consideraban propios del lenguaje matemático, como *ley*, *ecuación*, *sistema de ecuaciones*, *norma fija*, *fórmula*, *progresión*, *regla*. La translación del lenguaje oral e la expresión escrita se hizo mediante representación algebraica y geométrica, fundamentalmente. Los alumnos de Bachillerato y 4ESO1 utilizan *n* ó *x* para representar el número de rectas y en función de éstas tratan de expresar algebraicamente el número máximo de regiones.

Todos los sujetos que trataron de validar su conjetura para el caso general, lo hicieron mediante casos particulares. Los estudiantes que emplearon *n* ó *x* como variables que representan el número de rectas, validaron sus conjeturas dando valores a la variable considerada y compararon esos datos con los resultados que obtuvieron en las representaciones gráficas.

Al tratarse de una tarea que no era familiar para ninguno de los sujetos entrevistados, no hubo diferencias significativas en la resolución de la tarea. Donde sí hubo diferencias fue en la expresión de la generalización: los alumnos de los cursos más elevados manejaron el lenguaje algebraico escrito y el resto lo expresaron en lenguaje oral (algebraico o no). Esto se debe más a los contenidos matemáticos que se trabajan en cada curso al que pertenecen que a las capacidades de razonamiento de los estudiantes según sus niveles educativos.

En estos resultados hemos omitido los errores y las dificultades que presentaron los estudiantes en los diferentes pasos del proceso de razonamiento inductivo, aunque esto conformó un punto importante del estudio.

CONCLUSIONES

Como señalábamos no pretendemos generalizar resultados sino traducir nuestros resultados en orientaciones para los profesionales de la enseñanza, en ese sentido hacemos las conclusiones.

Todos los estudiantes entrevistados muestran duda e inseguridad durante la realización de la tarea, constantemente buscan el apoyo y respuestas a su trabajo, por parte de la entrevistadora, valoramos no positiva esta actitud por lo que consideramos importante, para la mejora de la misma, trabajar de manera que se proporcione al estudiante confianza en su trabajo, transmitiendo la idea de que no siempre se llega a una solución “a la primera”. En la resolución de un problema, se pueden hacer ensayos y comprobaciones para desechar aquella respuesta que resulte errónea. Comenzar de nuevo y seguir otra estrategia o procedimiento. Ser perseverantes y no abandonar el trabajo observando a “primera vista” que el problema es difícil.

El hecho de que todos los estudiantes hayan hecho conjeturas (en muchos casos a instancias de la entrevistadora) que van desechando por comprobar que son erróneas y haciendo otras de nivel más elaborado, nos lleva a sugerir que es necesaria mucha participación del profesor, proponiendo retos y orientando en la consecución de los mismos. Insistimos en que se requiere mucha explicación por parte del profesor y diálogo entre profesor y estudiante ante una tarea nueva (fuera de la rutina) para los alumnos. Las explicaciones van dirigidas a proporcionar conceptos nuevos y desconocidos para los estudiantes o a recordarlos si son conocidos y están olvidados.

Mas recomendaciones para los profesores que se desprenden del trabajo son: Transmitir a los alumnos las ideas de que en el trabajo con problemas, en los que el procedimiento requiere concentración, hay que volver varias veces a centrarse en el objetivo que se pretende con la resolución del problema. Para los problemas que se basen en la recursión, el centro de interés no es tomar muchos casos particulares, que además de llevar tiempo pueden ser cada vez más complicados, sino buscar, lo antes posible, el patrón que hay implícito.

Se ha detectado que, en los alumnos, no es intuitiva la acción de seguir una estrategia sistemática ni organizar los datos que se van obteniendo, por lo que es algo a trabajar para crear hábito en estas acciones.

Dado que siete estudiantes han alcanzado la relación por recurrencia nos muestra que es posible este tipo de trabajo en alumnos de estos niveles.

Las expresiones de la generalización, o la conjetura, se hacen en distintos lenguajes (verbal, escrito, algebraico), esto proporciona un motivo para realizar translaciones entre distintas representaciones de un mismo concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, D. (1996). Proof in Undergraduate Mathematics in the UK: A Case of Bridging from the Informal to the Formal? *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Seville, Spain July 14-21)

ANGUERA, M. (1991). Proceso de categorización, en: Anguera (eda) *Metodología Observacional en la Investigación Sociológica*. PPU. Barcelona

BAKER, J. D. (1996). Students´ Difficulties with Proof by Mathematical Induction. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, New York, April, 8-12, 1996, 21p.

Bolletín Oficial del Estado. (2003). *Real Decreto, 832/2003*.

CAÑADAS, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

COHEN, L. & MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

EDWARDS, L. D. (1999). Odds and Evens: Mathematical Reasoning and Informal Proof among High School Students. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 4, 489-504.

GOETTING, M. (1995). *The college student´s understanding of mathematical proof.* Doctoral Disseration. Philosophy Department of University of Maryland.

GONZÁLEZ, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Madrid: Editorial Trotta.

JEFFERY, R. (1978). *A study of the generalisation and explanation strategies of 10 and 11 year old children in mathematics*. Thesis for the Degree of Master of Philosophy, University of Nottingham.

N.C.T.M. (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducido al Castellano por Sociedad Matemática de Educació Matemática THALES. 2003. Granada

NEUBERT, G. A. & BINKO, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington D.C.: National Education Association.

POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

REID, D. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematics Behavior*, 20, 527-547.