Estudios de Economía. Vol. 31 - Nº 1, Junio 2004. Págs. 67-78

PRECIOS DE PRODUCTOS ALMACENABLES: IMPLICACIONES DEL MODELO DE INVENTARIOS*

EUGENIO S.A. BOBENRIETH H.

Resumen

Las variaciones de inventarios son reconocidas, por participantes del mercado y por la literatura, como relevantes en la determinación de precios de activos almacenables. Este artículo presenta resultados de la literatura en modelos dinámicos de expectativas racionales basados en variaciones de inventarios, para explicar variaciones de precios. Las restricciones de no-negatividad en el almacenamiento agregado induce no-linealidad endógena en la demanda de mercado del activo. El modelo genera regularidades empíricas observadas en series de precios: ocasionales aumentos pronunciados de precios, períodos de estabilidad, correlación serial positiva, y asimetría condicional (y límite) de la distribución de precios.

Abstract

Stock variations are recognized, by market participants and by the literature, as relevant in the determination of prices of storable assets. This paper presents results in the literature of rational expectations dynamic models based on stock variations, to explain price variations. The non-negativity restrictions in aggregate storage induce endogenous non-linearity in the market demand for the asset. The model generates empirical regularities observed in price series: occasional sharp price increases, periods of stability, positive serial correlation, and conditional (and limit) asymmetry in the price distribution.

Keywords: Commodities, price, storage, speculation.

JEL Classification: C12, C13, D84, G12.

---

* Agradezco el trabajo conjunto en el tema, y los valiosos comentarios, de Juan R. A. Bobenrieth H. y Brian D. Wright. Agradezco financiamiento de CONICYT, proyecto FONDECYT 1010239. Los errores que pudiesen persistir son de exclusiva responsabilidad del autor.

□ Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Universidad de Concepción; ebobenri@udec.cl

1. Introducción

Las variaciones en inventarios son un aspecto esencial de un número creciente de estudios empíricos y teóricos que explican la volatilidad en precios de activos almacenables. Si la especulación con variaciones en inventarios es económicamente factible, entonces la hipótesis de equilibrio internamente consistente, que caracteriza al modelo de expectativas racionales, impone fuertes restricciones al comportamiento de las series temporales de precios. Los inventarios cumplen un rol estabilizador y de soporte de precios, generando correlaciones de precios, aun bajo la hipótesis de que las variaciones aleatorias en producción y/o demanda tengan distribuciones independientes en el tiempo.

El objetivo de este trabajo es presentar una revisión documentada de algunos avances en el estudio de precios, utilizando modelos dinámicos de expectativas racionales, en la tradición de Gustafson (1958). Se discuten los efectos clásicos, en el precio de equilibrio, de las variaciones en inventarios.

El modelo canónico de almacenamiento es un modelo multiperíodo, con demanda estacionaria (que puede reflejar variaciones estocásticas en, por ejemplo, nivel de ingreso) y con shocks estocásticos de oferta. Las variaciones de inventario son un sustituto al mecanismo de seguros para distribuir riesgo, son un medio para distribuir riesgo entre diferentes períodos de tiempo. Sin embargo, la presencia de la restricción de no-negatividad en inventarios (a nivel de todo el mercado) implica que la especulación intertemporal tiene límites, ya que para el mercado como un todo no es posible utilizar una cantidad del activo mayor que la que está globalmente disponible. Pero el mercado sí puede acumular inventarios. Esta restricción de no-negatividad en inventarios genera asimetría en la formación de precios, lo que complica el tratamiento analítico de esta familia de modelos, en particular de aquellos con horizonte infinito. Muchos resultados se conocen sólo por medio de simulaciones numéricas, para especificaciones particulares de demanda, shocks, y costos.

Estos modelos de inventarios pertenecen a una familia más amplia, la de modelos de acumulación estocástica con restricciones de liquidez. Pertenecen también a esta familia los modelos de la teoría de ahorro para agentes enfrentados a restricciones de liquidez. En estos modelos, la acumulación de activos cumple el rol de un seguro para el consumidor, contra posibles variaciones adversas del ingreso, en el futuro. Referencias clásicas en esta literatura son los trabajos de Schechtman y Escudero (1977), Levhari, Mirman y Zilcha (1980), Deaton (1991), y la revisión de Deaton (1992). El trabajo de Deaton (1991) ha tenido una considerable influencia en la teoría de consumo, y su relación con ahorro con motivo de precaución. Deaton (1991) estudia el comportamiento del consumo bajo diferentes especificaciones alternativas para el proceso estocástico del ingreso. Carroll y Kimball (2001) formalizan un número de hipótesis que sólo habían sido estudiadas numéricamente, y proveen una discusión de resultados en esta literatura.

El modelo de expectativas racionales con variaciones de inventario para precios de *commodities* almacenables está en la tradición del trabajo de Gustafson (1958). Ejemplos de contribuciones relacionadas a esta literatura son: Samuelson (1971), Gardner (1979), Wright y Williams (1982, 1984), Scheinkman y Schechtman (1983), Williams y Wright (1991), Deaton y Laroque (1992, 1995, 1996), Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002), Cafiero (2002), y Bobenrieth,

Bobenrieth y Wright (2004). En los modelos tradicionales, la demanda por consumo es especificada de tal manera que el precio en consumo mínimo es finito, y/o la probabilidad de producción mínima es cero. En Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002), sin embargo, el precio de demanda es no acotado, y la probabilidad de producción mínima es positiva (esta probabilidad puede ser definida como arbitrariamente cercana a cero), aunque el precio es finito, para todo período de tiempo, con probabilidad 1.

Deaton y Laroque (1992) entregan una descripción del comportamiento empírico de series de precios para 13 productos almacenables (la muestra incluye productos agrícolas y minerales), utilizando precios reales anuales del período 1900-1987. En ese trabajo se detallan algunos hechos estilizados, comunes para los productos en estudio. La principal característica de estos precios es su significativa volatilidad, y pese a que los autores no realizan pruebas formales de estabilidad estocástica, notan que ninguna de las series en estudio muestra evidencias de tendencia. Todos los precios exhiben autocorrelación positiva (autocorrelaciones de primer orden son mayores a 0.6, y decaen lentamente con el orden de la autocorrelación), y las distribuciones empíricas son asimétricas (en algunos casos fuertemente asimétricas).

Como es reconocido por Deaton y Laroque (1992), muchas de las características más obvias del comportamiento de las series de precios pueden ser reproducidas satisfactoriamente con especificaciones tradicionales en la econometría de series de tiempo: modelos autorregresivos, en niveles o en diferencias, modelos markovianos con cambios de régimen, modelos de heteroscedasticidad condicional, aun cuando es necesario en estos modelos empíricos realizar supuestos especiales para reproducir adecuadamente las peculiaridades de las distribuciones empíricas de precios, notoriamente la asimetría. Sin embargo, si se impone la estructura de expectativas racionales, en un contexto dinámico, y con shocks estocásticos y restricciones de no-negatividad, se genera un modelo con características que no son directamente reproducibles con las especificaciones econométricas tradicionales. El equilibrio intertemporal con ausencia de posibilidades de ganancias de especulación (esto es, en un equilibrio donde la posibilidad de obtener beneficios "extra" es eliminada por la acción de agentes que compiten por esos beneficios) entrega una versión de la hipótesis de mercados eficientes que, para el modelo con precios uniformemente acotados, es un proceso con períodos de tiempo de inventario positivo, y períodos de tiempo de cero stock, en los cuales el precio esperado para períodos futuros, descontado por el factor correspondiente (y descontados los costos directos de almacenamiento), está acotado superiormente por el precio corriente.

Este trabajo se organiza como sigue: en la sección 2 se presentan algunas versiones clásicas, y resultados útiles como referencia, en el estudio de la familia de modelos que discutimos. La sección 3 reporta métodos de simulación numérica y estimaciones empíricas del modelo. La sección 4 plantea preguntas abiertas sobre identificación, estimación empírica y pruebas de hipótesis.

2. El Modelo

El almacenamiento se puede entender como un proceso de producción, con una tecnología de producción simple: el proceso transforma bienes disponibles en el tiempo corriente en bienes disponibles en el futuro. La transformación es en el tiempo de disposición del bien almacenado.[1]

El modelo supone un mercado competitivo de equilibrio parcial.[2] En tiempo discreto t, para un agente representativo, el almacenamiento $x_t \geq 0$ es una inversión con horizonte de planificación de sólo un período de tiempo. En efecto, aún en el caso de equilibrio de mercado con almacenamiento positivo para todo tiempo, la decisión de almacenar es una decisión de inversión *reversible*, después de cada período de tiempo (con abstracción de la depreciación). El costo directo de almacenar está dado por una función diferenciable, $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, con $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) \geq 0$, y $\phi'(x) > 0$, $\phi''(x) > 0$ para todo $x > 0$ (alternativamente, versiones simples del modelo se obtienen al especificar el costo marginal directo de almacenamiento como constante, igual a cero en un caso extremo). La producción está sujeta a un shock ω, exógeno, multiplicativo, que se puede especificar i.i.d. (el supuesto i.i.d. no es esencial para un número de resultados, los shocks se pueden modelar con una estructura estocástica de mayor complejidad), con soporte $K \equiv \left[\underline{k}, \bar{k}\right], 0 \leq \underline{k} < \bar{k} < +\infty$. Existe una demora de un período de tiempo entre la decisión del esfuerzo de producción y la realización del producto, $\lambda_t \omega_{t+1}$. El costo del esfuerzo está dado por la función g: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, con $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g'(\lambda) > 0$, y $g''(\lambda) > 0$, para todo $\lambda > 0$. Dado el almacenamiento y el nivel de esfuerzo de producción, la cantidad total de stocks disponibles en el tiempo $t + 1$ es $z_{t+1} \equiv x_t + \lambda_t \omega_{t+1}$.

El productor representativo es neutral al riesgo, con un factor de descuento $0 < \delta < 1$. En una especificación particular del modelo, la función de utilidad de consumidor representativo, U: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, es continua, continuamente derivable, estrictamente creciente y estrictamente cóncava, con $U(0) = 0$, y $\lim_{c \to \infty} U(c) = B < +\infty$. La función (inversa) de demanda por consumo es $f = U'$. Notar que en este caso $U(c) = \int_0^c f(\xi) d\xi$, y que el ingreso total por ventas, $cf(c)$, está uniformemente acotado por la constante B.

El mercado competitivo entrega la misma solución que la del problema de bienestar asociado (este es un resultado estándar, ver por ejemplo Scheinkman y Schechtman, 1983, o Williams y Wright, 1991). Considerando el problema de horizonte infinito con shocks i.i.d., la ecuación de Bellman correspondiente al problema de bienestar es:

$$v(z_t) = \max_{x_t, \lambda_t} \{U(z_t - x_t) - \phi(x_t) - g(\lambda_t) + \delta E[v(z_{t+1})]\}$$

$$\text{sujeto a} \qquad z_{t+1} = x_t + \omega_{t+1} \lambda_t,$$
$$x_t \geq 0,\ z_t - x_t \geq 0,\ \lambda_t \geq 0,$$

donde $E[.]$ representa la esperanza con respecto a ω_{t+1}.

1 Extensiones obvias se obtienen al suponer una tasa de depreciación, o una tasa de productividad del activo, como en los modelos de ahorro y consumo.

2 Ambos supuestos no son esenciales. La misma lógica del modelo básico se puede extender para un mercado no competitivo, y para algunas versiones de equilibrio general.

La variable de estado en este caso es el nivel de disponibilidad total, z_t (si el proceso de shocks es markoviano, entonces la variable de estado es el par (z_t, ω_t)). Aplicando resultados estándar de programación dinámica estocástica, es posible demostrar la existencia y unicidad de v, y que v es una función continua, estrictamente creciente, estrictamente cóncava, y que las funciones óptimas de almacenamiento y esfuerzo, $x(z)$ y $\lambda(z)$, son univaluadas y continuas. Consumo y precio están dados por las funciones $c(z) \equiv z - x(z)$, $p(z) \equiv f(z - x(z))$, respectivamente.

Las condiciones de Euler son las siguientes:

$$f(z_t - x(z_t)) + \phi'(x(z_t)) \geq \delta E[v'(x(z_t) + \omega_{t+1}\lambda(z_t))], \qquad \text{con} = \text{si } x(z_t) > 0,$$

$$g'(\lambda(z_t)) \geq \delta E[\omega_{t+1} v'(x(z_t) + \omega_{t+1}\lambda(z_t))], \qquad \text{con} = \text{si } \lambda(z_t) > 0,$$

con la condición $v'(z) = f(z - x(z))$.

De manera más general, es posible plantear el problema de almacenamiento de la siguiente forma (como en Scheinkman y Schechtman, 1983):

Con la misma notación anterior, considere el vector $\omega^t \equiv (\omega_0, ..., \omega_t)$, de realizaciones del shock de oferta, observado hasta el tiempo t, y sea K^{t+1} el producto cartesiano de $(t + 1)$ copias de K. En cualquier tiempo t, el precio se define como la función medible (Borel) $p_t : K^{t+1} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. El productor competitivo representativo toma la sucesión de funciones $\Pi = \{p_t\}_{t\geq 0}$ como exógenamente determinada, y realiza planes de almacenamiento $\{x_t\}_{t\geq 0}$ y esfuerzo $\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$. El productor representativo es neutral al riesgo. Dados los valores iniciales z_0, ω_0, y para la sucesión Π, Scheinkman y Schechtman (1983) plantean el problema del productor:

$$\text{Sup} \quad E_0 \{ \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [p_t(\omega^t)c_t(\omega^t) - g(\lambda_t(\omega^t)) - \phi(x_t(\omega^t))]\},$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a:} \quad & c_t(\omega^t) + x_t(\omega^t) = \lambda_{t-1}(\omega^{t-1})\omega_t + x_{t-1}(\omega^{t-1});\ t \geq 1, \\ & c_0(\omega^0) + x_0(\omega^0) = z_0, \\ & x_t \geq 0,\ \lambda_t \geq 0,\ c_t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $E_0\{.\}$ representa la esperanza condicional en ω_0.

Scheinkman y Schechtman (1983) definen la solución del problema del productor como sigue: las funciones medibles $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ (x_t: $K^{t+1} \to \mathbb{R}_+$, λ_t: $K^{t+1} \to \mathbb{R}_+$) resuelven el problema del productor si para cualquier otro par de sucesiones de funciones medibles, y_t: $K^{t+1} \to \mathbb{R}_+$, μ_t: $K^{t+1} \to \mathbb{R}_+$,

$$\limsup_{T\to\infty} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{T} \delta^t \left[\begin{array}{l} p_t(\omega^t)\cdot(\mu_{t-1}(\omega^{t-1})\omega_t + y_{t-1}(\omega^{t-1}) - y_t(\omega^t)) \\ -g(\mu_t(\omega^t)) - \phi(y_t(\omega^t)) - p_t(\omega^t)\cdot(\lambda_{t-1}(\omega^{t-1})\omega_t \\ +x_{t-1}(\omega^{t-1}) - x_t(\omega^t)) + g(\lambda_t(\omega^t)) + \phi(x_t(\omega^t)) \end{array} \right] \right\} \leq 0$$

donde $\mu_{-1}\omega_0 + y_{-1} \equiv \lambda_{-1}\omega_0 + x_{-1} \equiv z_0$.

En esta versión del modelo, la función de demanda del consumidor representativo se especifica como f: $\mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, con $f' < 0$, y $cf(c) < \overline{B} < +\infty$ para todo $c \geq 0$. La sucesión $\Pi = \{p_t\}_{t \geq 0}$ se define como un equilibrio de expectativas racionales si existe $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ que solucione el problema del productor, dado Π, tal que para cada t, $f(z_t(\omega^t) - x_t(\omega^t)) = p_t(\omega^t)$ con probabilidad 1. Notar que pese a que el valor de mercado de las ventas en cada período de tiempo está uniformemente acotado por $\overline{B} < +\infty$, esto no implica una cota uniforme para el precio.

Dado un valor constante $\underline{c} > 0$, considere la siguiente forma de la función de utilidad, que permite considerar la posibilidad de utilidad no acotada: $U(c) = \int_{\underline{c}}^{c} f(\xi)d\xi$. Para $z > 0$, $t \geq 0$, $\omega^t \in K^{t+1}$, es posible definir la función de bienestar social $W(z, t, \omega^t)$:

$$W(z, t, \omega^t) = \sup E_t \left\{ \sum_{s=t}^{\infty} \delta^s [U(c_s(\omega^s)) - \phi(x_s(\omega^s)) - g(\lambda_s(\omega^s))] \right\}$$

$$\text{sujeto a} \quad c_s(\omega^s) + x_s(\omega^s) = x_{s-1}(\omega^{s-1}) + \lambda_{s-1}(\omega^{s-1}) \cdot \omega_s \equiv z_s(\omega^s)$$
$$z_t(\omega^t) = z,\ c_s(\omega^s) \geq 0,\ x_s(\omega^s) \geq 0,\ \lambda_s(\omega^s) \geq 0.$$

Scheinkman y Schechtman (1983, teorema 1) demuestran la siguiente interpretación para el precio de equilibrio: si $z_0 > 0$, considerando la sucesión de precios de equilibrio y la solución al problema del productor asociada, se tiene que:

$$\delta^t p_t(\omega^t) = \frac{\partial W(z_t(\omega^t), t, \omega^t)}{\partial z} \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Para el caso de shocks i.i.d., Scheinkman y Schechtman (1983, teorema 2) demuestran que la función $x(z)$ es creciente, la función $\lambda(z)$ es decreciente, y la función $c(z)$ es estrictamente creciente, implicando que la función de precio es estrictamente decreciente en el nivel de disponibilidad total del mercado. Notar que dado el precio de mercado p, la demanda total de mercado es la suma de dos componentes: la demanda por consumo, $c(p)$, más la “demanda por motivo especulación”, $x(p)$, y aunque se suponga una especificación arbitraria para la función de demanda por consumo, la “demanda por motivo especulación” tiene una estructura funcional que es endógena al modelo, en el sentido de que refleja información sobre el comportamiento futuro del mercado (distribuciones de probabilidad condicionales, en particular). Explicado de otra forma, el valor de equilibrio de las unidades que se almacenan en el tiempo corriente está determinado por el valor de las unidades que serán vendidas en (posiblemente diferentes) períodos de tiempo en el futuro, y por lo tanto, para resolver el problema de almacenamiento hoy, es necesario resolver el problema de la demanda de stocks para el siguiente período, y así para todo período futuro, sin horizonte finito. Este es un punto relevante para la realización de estudios empíricos. Scheinkman y Schechtman (1983, teorema 3) muestran, también para el caso de shocks i.i.d., un resultado relacionado con la estabilidad en el precio esperado, para el caso de stocks positivos: un incremento en el precio corriente aumenta el precio esperado para el siguiente período, pero menos que proporcionalmente. La presencia de oferta elástica del producto (esto es, λ variable) aumenta la complejidad del modelo, debido a que x y λ tienen efectos de dirección contraria: un aumento de la disponibilidad total del mercado implica mayor almacenamiento, lo cual tiende a disminuir el precio para el siguiente período de tiempo. Esta disminución en el precio, realización-por-realización del shock, es un desincentivo al esfuerzo en el tiempo corriente. Sin embargo, es posible demostrar que el efecto almacenamiento domina al efecto esfuerzo en este caso.

3. Simulación Numérica y Estimaciones Empíricas

Salvo especificaciones muy puntuales, no existe solución analítica para las funciones endógenas descritas en la sección anterior, lo cual ha llevado en la práctica a un creciente interés de la literatura en soluciones numéricas del problema, aprovechando las características de estabilidad de éste. Típicamente, los algoritmos numéricos utilizados en esta clase de modelos utilizan las ecuaciones de Euler. Williams y Wright (1991) proveen una técnica eficiente para la simulación numérica del modelo de horizonte infinito. El método de Williams y Wright se basa en ajustar un polinomio de orden pequeño (con almacenamiento internamente consistente), para representar el precio esperado del siguiente período, en función del almacenamiento del período corriente. La técnica polinomial de Williams y Wright resuelve un problema importante asociado a la aproximación numérica en este tipo de modelos: la presencia de (al menos) un punto en el cual la demanda de mercado no es derivable (este es el punto correspondiente al umbral a partir del cual el inventario es positivo). Este polinomio es un punto fijo de la rutina de cálculo de la esperanza condicional del precio, dada(s) la(s) variable(s) de estado en el tiempo corriente. El uso de este algoritmo evita el costo (en exactitud) asociado a la búsqueda directa de la función de almacenamiento óptima que resuelve la ecuación de Euler. Christiano y Fisher (2000) clasifican este algoritmo en la categoría de algoritmos de esperanzas parametrizadas, y comparan este algoritmo en un contexto de simulación numérica más general.

Deaton y Laroque (1992, 1995, 1996) plantean un método de simulación numérica, para una especificación del modelo sin costos directos de almacenamiento, sin oferta elástica (esto es, λ no es una variable de control en este caso), y con depreciación porcentual del producto (entre cada período de tiempo) igual a d, con la restricción de que $\delta(1-d) < 1$. Un supuesto central en la especificación de Deaton y Laroque (1992) es que el mínimo del soporte del shock de oferta, $\underline{k}$, es tal que $0 < f(\underline{k}) < +\infty$. Utilizando un argumento de contracción, y si los shocks estocásticos son i.i.d., es posible demostrar que existe una solución p (un equilibrio estacionario de expectativas racionales) a la siguiente ecuación funcional:

$$(1) \qquad p(z_t) = \max\,[\delta(1-d)Ep((\omega_{t+1} + (1-d)(z_t - f^{-1}\{p(z_t)\})),\, f(z_t)],$$

donde la esperanza se aplica con respecto a la variable aleatoria ω_{t+1}. Esta especificación permite cierta flexibilidad en la definición del problema de almacenamiento: es posible en este caso estudiar el problema sin referencia a la existencia de un agente representativo. Utilizando las propiedades de convergencia de una contracción, Deaton y Laroque (1992) observan que es posible obtener numéricamente la función p iterando en la ecuación (1),

$$p^{(n+1)}(z_t) = \max\left[\delta(1-d)Ep^{(n)}((\omega_{t+1} + (1-d)(z_t - f^{-1}\{p^{(n+1)}(z_t)\})), f(z_t)\right],$$

para una función inicial $p^{(0)}$ admisible.

Los métodos numéricos que se presentan en esta sección pueden ser utilizados, con los cambios que corresponden, para simular el modelo con algunas especificaciones más generales del shock (ver, por ejemplo, Deaton y Laroque, 1995).

En base a simulaciones numéricas, Williams y Wright (1991) estudian el comportamiento de distribuciones condicionales para las variables endógenas del modelo, con un horizonte creciente. El modelo genera autocorrelación temporal positiva del precio (la magnitud de esta correlación es sin embargo motivo de controversia, ver por ejemplo Deaton y Laroqx , 1992, 1995, 1996, Cafiero 2002). Bajo las condiciones planteadas en la sección anterior, el modelo es asintóticamente estable, existe una única distribución límite invariante conjunta para las variables endógenas del modelo, y las distribuciones de frecuencia numéricas reflejan dicha estabilidad. Williams y Wright (1991) observan un número de efectos de la presencia de stocks: el almacenamiento disminuye, considerablemente para ciertas especificaciones del modelo, la varianza del precio. El almacenamiento estabiliza precios y consumo, probabilidad es transferida desde los extremos de las distribuciones hacia el centro: el almacenamiento no sólo reduce la frecuencia de precios altos, también reduce la frecuencia de precios bajos. Es en este sentido que la presencia de almacenamiento se puede entender como un mecanismo de soporte de precios. Por otra parte, la transferencia de probabilidad desde los extremos hacia el centro es más compleja que la descrita en ejercicios estándar de contracción preservando media (en el sentido de Rothschild y Stiglitz, 1970), el efecto en la distribución es altamente asimétrico, produciendo una cola larga hacia precios altos, y concentrando probabilidad en precios moderadamente bajos. Así, la tendencia a pensar en el almacenamiento como principalmente un medio para evitar desabastecimiento del mercado y precios altos, debe ser tomada con cuidado, en el sentido de que el efecto posiblemente más notorio del almacenamiento está en prevenir caídas de precios muy pronunciadas.

La convergencia de distribuciones condicionales a una distribución límite estable implica, bajo condiciones de regularidad, la convergencia de los momentos condicionales a los correspondientes momentos de las distribuciones invariantes. En particular, para parametrizaciones específicas del modelo, Williams y Wright (1991) han comprobado numéricamente (utilizando el método de aproximación polinomial) que, independiente del estado corriente, existe un horizonte finito tal que las posibles trayectorias de precios esperados están arbitrariamente cercanas entre sí. Como lo observa Wright (2001), esto explica parcialmente la inexistencia de mercados de futuros para el largo plazo: ellos no son necesarios, debido a que, si se considera un horizonte de largo plazo, en el período corriente existe muy poca información que permita distinguir las futuras realizaciones para diferentes estados en ese horizonte, como para motivar transacciones (costosas) en mercados organizados.

Los algoritmos de simulación numérica también han sido utilizados para estudiar el efecto en el bienestar social de diferentes esquemas de intervención pública en los mercados de productos almacenables. Williams y Wright (1991) muestran que, en un contexto de mercado con intervención pública en el almacenamiento, la presencia de "ataques especulativos" por parte de especuladores privados puede estabilizar el consumo: la observación central es que la especulación por parte de agentes privados reduce la ocurrencia de grandes variaciones de precio.

El modelo de expectativas racionales ha sido estimado utilizando una variedad de procedimientos econométricos. Deaton y Laroque (1992) estiman versiones de la ecuación (1) (con producción especificada como i.i.d.), para 13 productos almacenables, con datos anuales, utilizando el método generalizado de momentos, corrigiendo por heteroscedasticidad. El modelo a estimar es:

$$(2) \qquad E(p_{t+1}|p_t) = \frac{\min(p_t, p^*)}{\delta(1-d)}$$

donde $p^* \equiv \delta(1-d)Ep(\omega)$ es el precio umbral, por sobre el cual el almacenamiento de equilibrio es cero. Para el modelo (2), Deaton y Laroque (1992) estiman los parámetros $\gamma \equiv 1/\delta(1-d)$ y p^*. Para plantear la condición de momentos se observa que la hipótesis de expectativas racionales implica que el error estocástico $p_{t+1} - \min(p_t, p^*)/\delta(1-d)$ no está correlacionado con observaciones pasadas de precios, y por lo tanto se utiliza como instrumento a un vector de precios rezagados. Deaton y Laroque (1992) reportan dificultades en la estimación del parámetro de descuento efectivo γ, y además concluyen que con la versión del modelo empírico utilizada no es posible reproducir los patrones de significativa autocorrelación en precios que es observada en la muestra. En Deaton y Laroque (1995, 1996) se estima el modelo para 12 productos almacenables, utilizando un método de pseudomáxima verosimilitud, para shocks de producción especificados como i.i.d., y alternativamente, shocks autorregresivos, con resultados pobres, en lo referente a replicar la autocorrelación de los datos de precios.

Utilizando el método generalizado de momentos, con datos mensuales, Chambers y Bailey (1996) encuentran evidencia de diferentes distribuciones para los shocks de oferta, para diferentes grupos de meses. Como Deaton y Laroque (1992), Chambers y Bailey (1996) encuentran dificultades en probar la significancia estadística del costo efectivo de almacenamiento. Cafiero (2002) replica parcialmente y discute los resultados de Deaton y Laroque (1992, 1995, 1996), identificando preguntas en los métodos de búsqueda numérica del máximo, que requieren de mayor atención, en relación a los estimadores puntuales. En contraste con los resultados de Deaton y Laroque (1992, 1995, 1996), Miranda y Rui (1996), utilizando máxima verosimilitud, concluyen que el modelo de almacenamiento explica satisfactoriamente el comportamiento de las series de precios, si se incluye en la especificación empírica una curva de "oferta de almacenamiento" cuya forma sigue la tradición de Working (1934, 1948, 1949).

4. Algunas Preguntas Abiertas

Los modelos clásicos de expectativas racionales para precios de *commodities* generan observaciones de precios finitos, para todo tiempo, con probabilidad 1, aun en el caso de repetición de la peor realización de producción, por medio de la imposición del supuesto de precio de demanda finito cuando el consumo es igual a la realización mínima de producción, o probabilidad cero de producción mínima (es posible especificar un modelo que genere realizaciones de precio no acotadas, con esperanza condicional de precio uniformemente acotada). Los modelos que incorporan estas restricciones son inconsistentes con tres hechos estilizados de los mercados en estudio: primero, ellos generan situaciones de cero stock con probabilidad positiva, contrario a la observación de que los stocks son continuamente positivos para la gran mayoría de los productos almacenables que se transan regularmente en mercados organizados. Segundo, los precios por sobre un nivel de umbral no exhiben autocorrelación positiva. Tercero, cuando el almacenamiento es estrictamente positivo, el precio esperado para el siguiente período refleja los costos, de oportunidad y directos, en contraste con lo reportado por estudios empíricos (en la tradición de Working, 1934), donde las observaciones de "mercados invertidos", como parte de la llamada curva de "oferta de almacenamiento", son posibles. Una forma de lograr consistencia con estos tres hechos estilizados es por medio de una función de "beneficio de conveniencia", aun cuando este tipo de funciones no presentan fundamentos microeconómicos para la existencia de tal beneficio. Como una alternativa, Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2004) especifican un modelo donde la relación de "oferta de almacenamiento" se obtiene de manera endógena, como producto de la agregación de diferentes unidades cuyo costo de mercadeo es heterogéneo. Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002) plantean un modelo que resuelve el puzzle de los stocks continuamente positivos y el de la autocorrelación para todo precio, en un modelo para el cual el precio de equilibrio es finito (aunque no acotado). En el modelo de Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002), la producción mínima (que por simplicidad se supone igual a cero) tiene probabilidad positiva, y el precio en consumo igual a la producción mínima es infinito. Las realizaciones de precio en este modelo son todas finitas, la sucesión de precios de equilibrio visita cada vecindad del soporte de la distribución invariante, una cantidad infinita de tiempos. Sin embargo, en este modelo la condición de Euler se cumple con igualdad para todo tiempo, y por lo tanto la trayectoria del precio esperado tiende a $+\infty$, aumentando a una tasa igual a la del costo de almacenamiento.

La existencia continua de stocks positivos, y la trayectoria del precio esperado, que tiende a $+\infty$, es similar a la descripción estándar de un modelo estocástico de utilización de recursos naturales no-renovables. Sin embargo, en el modelo de Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002) las realizaciones de precio no necesariamente crecen, y no tienen una cota superior fija. El precio, aunque siempre crece en esperanza, disminuye con probabilidad uno en tiempos (de parada) finitos. A pesar de que el precio esperado tiende a $+\infty$, y del hecho que un precio de $+\infty$ corresponde a consumo 0, tanto las esperanzas condicionales de consumo, como la esperanza de la distribución límite de consumo, son uniformemente mayores que una constante estrictamente positiva. Las características descritas para precio y consumo plantean preguntas sobre las conclusiones que es posible obtener a partir de pruebas empíricas del modelo estándar de agotamiento de stocks de recursos naturales: si el precio esperado tiene una trayectoria tendiendo a $+\infty$, ello no necesariamente implica que las observaciones de precio tiendan a $+\infty$. Cuando el precio corriente es inusualmente alto, la probabilidad de una gran disminución de precio es alta, pero si éste continúa creciendo, entonces lo hace probablemente a una tasa más alta que la implícita en el factor de descuento, tal cual es característico en el comportamiento de las denominadas "burbujas especulativas". El modelo de Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002) viola la condición de transversalidad de Samuelson (1971) de que el precio esperado descontado tiende a cero en el límite.

En el modelo de Bobenrieth, Bobenrieth y Wright (2002) existe una única, continua, distribución límite invariante para cada una de las variables endógenas, y la distribución invariante para el precio tiene esperanza $+\infty$. El soporte de la distribución límite es un intervalo que incluye a $+\infty$, aunque todas las observaciones de precios son finitas, casi seguramente. Las distribuciones condicionales de precios (para un horizonte suficientemente lejano), y la distribución límite, son altamente asimétricas, con la esperanza de precio localizada en el extremo superior de la distribución: para $\varepsilon > 0$ y $D > 0$ arbitrarios dados, existe un horizonte finito $N \geq 0$ y un número real $D' \geq D$ tal que $t \geq N$ implica que $E[p_t] > D'$, y que Prob$[p_t \geq D'] < \varepsilon$. De esta forma, la distinción empírica entre diferentes versiones de la familia del modelo de almacenamiento descrito presenta un desafío. La asimetría de las distribución de precios implica que la media de realizaciones de precio, condicional en información corriente, presenta con probabilidad arbitrariamente alta un sesgo negativo en la estimación del precio esperado, generando observaciones muestrales de precios que podrían ser interpretadas como de "reversión a la media", como en un número de estudios empíricos para precios de activos financieros.

Referencias

Bobenrieth, E. S. A., J. R. A. Bobenrieth y B. D. Wright (2002). "A Commodity Price Process With a Unique Continuous Invariant Distribution Having Infinite Mean". *Econometrica* 70, 1213-1219.

Bobenrieth, E. S. A., J. R. A. Bobenrieth y B. D. Wright (2004). "A Model of Supply of Storage". *Economic Development and Cultural Change,* Forthcoming April 2004.

Cafiero, C. (2002). "Estimation of the Commodity Storage Model". Ph.D. dissertation, Department of Agricultural and Resource Economics, University of California at Berkeley.

Carroll, C. D. y M. S. Kimball (2001). "Liquidity Constraints and Precautionary Savings". National Bureau of Economic Research, Working Paper 8496.

Chambers, M. J. y R. E. Bailey (1996). "A Theory of Commodity Price Fluctuations". *Journal of Political Economy* 104, 924-957.

Christiano, L. J. y J. D. M. Fisher (2000). "Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints". *Journal of Economic Dynamics & Control* 24, 1179-1232.

Deaton, A. (1991). "Saving and Liquidity Constraints". *Econometrica* 59, 1221-1248.

Deaton, A. (1992). "Understanding Consumption". Clarendon Lectures in Economics, Clarendon Press, Oxford.

Deaton, A. y G. Laroque (1992). "On the Behaviour of Commodity Prices". *Review of Economic Studies* 59, 1-23.

Deaton, A. y G. Laroque (1995). "Estimating a Nonlinear Rational Expectations Commodity Price Model with Unobservable State Variables". *Journal of Applied Econometrics* 10, S9-S40.

Deaton, A. y G. Laroque (1996). "Competitive Storage and Commodity Price Dynamics". *Journal of Political Economy* 104, 896-923.

Gardner, B. G. (1979). "Optimal Stockpiling of Grain". Lexington, MA: Lexington Books.

Gustafson, R. L. (1958). "Carryover Levels for Grains: A Method for Determining Amounts That Are Optimal Under Specified Conditions". Technical Bulletin 1178, Washington, DC: United States Department of Agriculture.

Levhari, D., L. J. Mirman y I. Zilcha (1980). "Capital Accumulation Under Uncertainty". *International Economic Review* 21(3), 661-671.

Miranda, M. J. y X. Rui (1996). "An Empirical Reassessment of the Commodity Storage Model". Mimeo.

Rothschild, M. y J. E. Stiglitz (1970). "Increasing Risk: I. A Definition". *Journal of Economic Theory* 2, 225-243.

Samuelson, P. A. (1971). "Stochastic Speculative Price". *Proceedings of the National Academy of Science* 68, 335-337.

Schechtman, J. y V. L. S. Escudero (1977). "Some Results on 'An Income Fluctuation Problem'". *Journal of Economic Theory* 16, 151-166.

Scheinkman, J. A. y J. Schechtman (1983). "A Simple Competitive Model with Production and Storage". *Review of Economic Studies* 50, 427-441.

Williams, J. C. y B. D. Wright (1991). "Storage and Commodity Markets". Cambridge University Press, Cambridge.

Working, H. (1934). "Price Relations between May and New-Crop Wheat Futures at Chicago since 1885". *Food Research Institute Wheat Studies* 10, 183-228.

Working, H. (1948). "Theory of the Inverse Carrying Charge in Futures Markets". *Journal of Farm Economics* 30, 1-28.

Working, H. (1949). "The Theory of Price of Storage". *American Economic Review* 39, 1254-1262.

Wright, B. D. y J. C. Williams (1982). "The Economic Role of Commodity Storage". *Economic Journal* 92, 596-614.

Wright, B. D. y J. C. Williams (1984). "The Welfare Effects of the Introduction of Storage". *Quarterly Journal of Economics* 99, 169-182.

Wright, B. D. (2001). "Storage and Price Stabilization". Chapter 14, *Handbook of Agricultural Economics*, Edited by Gardner, B. y G. Rausser, Elsevier Science B. V.