Procesos estocásticos (aplicados) en Geografía Física

Javier Martín Vide
Universidad de Barcelona

"La probabilidad es la guía misma de la vida"
Cicerón, **De Natura.**

El tema para el que tan amablemente he sido invitado como ponente lleva por título: Procesos estocásticos (aplicados) en Geografía Física. Se trata, pues, siendo cabales con este título, de desarrollar una ponencia alusiva a los modelos y procedimientos probabilísticos de aplicación en Geografía, y, específicamente, en su rama física. Es la única vez que aparece esta denominación de Geografía Fisica en los títulos de las ponencias del Coloquio, de modo que, al tiempo que agradecemos al Comité de Organización su no olvido -máxime teniendo en cuenta que sus miembros mayoritariamente han investigado en otras ramas de la Geografía-, prometemos, nosotros, hacer hincapié en esa vertiente física de la disciplina geográfica. Pero esto no obsta para que buena parte de las primeras ideas y enfoques que voy a exponer no haya que encasillarlos en la mencionada rama de la Geografía, sino que puedan ser vistos como generales para nuestra disciplina y, a menudo, de ámbito más amplio, extradisciplinarios, de la ciencia en sentido lato.

Así, y a modo de sucinto guión, en un primera parte de la ponencia[1] expondremos unas notas y analizaremos unas ideas sobre el determinismo **versus** indeterminismo científico, la necesidad del azar y de lo aleatorio y la importancia de los conceptos y los modelos probabilísiticos y estocásticos. Mientras que en una segunda parte de la ponencia mostraremos algunos procedimientos probabilísticos y sus aplicaciones en Geografía Física.

1.-DETERMINISMO VERSUS INDETERMINISMO CIENTIFICO. ¿EXISTE UN AZAR ESENCIAL EN LA NATURALEZA?

Bien, abriendo con la primera parte, con esas notas e ideas sobre el debate entre determinismo e indeterminismo científico, podríamos planteamos la siguiente pregunta: ¿lo aleatorio forma parte de la propia naturaleza o no es más que un tapujo de nuestra ignorancia? Es decir, cuando en lugar de afirmar que de tal conjunto de causas se sigue tal efecto, sino que éste se dará con una cierta probabilidad, ¿estamos realizando sólo una proximación a la previsión del fenómeno porque nuestro conocimiento no alcanza a más?, ¿o esa indeterminación es inherente al proceso estudiado? Entre paréntesis, nótese que nuestra duda no pretende, ni

[1] El presente texto refleja fielmente el desarrollo expositivo de la ponencia. De ahí, la adopción de las primeras personas verbales y de un estilo *oral.*

mucho menos, remover el largo y clásico debate en Geografía entre determinismo y posibilismo. Es, diríase, de enunciado mucho más general en cuanto a su extensión disciplinaria. Pero es, también, de respuesta dificilísima. Volvamos a nuestra pregunta. En un reciente curso sobre previsión de avenidas, un conocido catedrático[2] de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid daba una contundente respuesta: *En realidad, esa palabra aleatorio es la mejor forma que hemos encontrado para encubrir nuestra ignorancia sobre las leyes que rigen las causas que producen ciertos fenómenos de aparición rara y variable, como las crecidas. Conforme avanza nuestro conocimiento de los fenómenos, algunos de éstos dejan de ser aleatorios y pasan a llamarse causales. Pero, aún se ve muy lejos el momento en que podamos conocer mejor las leyes cíclicas complejas de la hidrología y hemos de acudir a la estadística y a la probabilidad para clasificar las avenidas como único medio para lograr una mínima previsión científica de ellas. La conclusión ineludible de esa metodología es que no la tomemos al pie de la letra y seamos conscientes de sus limitaciones para no usarla más allá de lo que es: una herramienta de trabajo muy burda, la única que tenemos por el momento.* Sí, una contundente respuesta, que en lo que toca a la prevención sobre las limitaciones de la metodología probabilística casi todos suscribiríamos. Pero el acuerdo no se alcanzaría, en modo alguno, en lo referente a la inexistencia de un azar **per se** en la naturaleza y en sus procesos, de un azar esencial y ontológico. Por otra parte, la cita tiene ilustres padres: así, el gran matemático Poincaré decía que el azar *es solamante la medida de nuestra ignorancia.*

Para documentar la polémica -acerca de la existencia o no del azar esencial- podríamos traer a colación el famoso simposium de Figueres[3], que tuvo lugar en aquella ciudad en noviembre de 1985, y, que, sin lugar a dudas, ha sido uno de los actos científicos y culturales más importantes celebrado en España en esta década. Allí, seis científicos de las vanguardias de disciplinas tales como la matemática, la física, la química, la biología o la astrofísica, y una audiencia activa de científicos, filósofos de la ciencia y artistas, debatieron en profundidad el tema del determinismo y el azar, y más, como prolongación, hasta el de la libertad. Baste recordar que entre los primeros participó René Thom, creador de la Teoría de las Catástrofes, e Ilya Prigogine, Premio Nobel de Química.

En este simposium, por supuesto, no hubo acuerdo sobre la pregunta antes planteada. Los científicos defensores del determinismo, entre ellos, curiosamente, Thom, insistieron en que -por utilizar las palabras de uno de ellos, P.T. Landsberg[4]- *las limitaciones humanas y nuestra ignorancia restringen las prediccio-*

[2] Prof. Dr. Eugenio Vallarino y Cánovas del Castillo, en el **Curso de avenidas. Cálculo, laminación y previsión**, organizado por el Departamento de Hidráulica de la ETS, de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, 1984.

[3] Los trabajos presentados en este simposium se recogen en la obra WAGENSBERG, J. (Editor): **Proceso al azar**, Barcelona, Tusquets. También, existe una serie de nueve capítulos de vídeo sobre las sesiones, producidos por Trasbals, S.A., Barcelona.

nes a probabilidades que, más tarde, se converten en hechos definidos. Las incertidumbres del futuro se convierten en certezas del pasado. Así, en cierto sentido todo es determinista porque 'las cosas ocurren'. Este propio autor ve concebible que en un futuro próximo se disponga en Física de una mecánica X que explique los mismos fenómenos que la mecánica cuántica[5], pero con predicciones definitivas. Esa sería, pues, una mecánica determinista, preferible a la cuántica, por la perfecta seguridad de sus pronósticos. Todas estas ideas enraízan perfectamente con el determinismo laplaciano, que puede resumirse en la expresión: *si conociéremos el presente, podríamos conocer el futuro.* Es decir, que un conocimiento totalmente preciso de las condiciones iniciales, o estado inicial, de un sistema, así como la posesión de las leyes, y sus correspondientes ecuaciones, que expliquen los procesos que tienen lugar en él, nos permitiría predecir exactamente, por medio de los resultados concretos y determinados obtenidos por tales ecuaciones, el estado del sistema en un instante del futuro. Resumido, y repitiendo: *si conociéremos el presente, podríamos conocer el futuro.* La consecuencia de este silogismo condicional quizá sea cierta, es más, poseyendo las leyes y ecuaciones deterministas, cierta del todo, pero, como han expresado muchos investigadores, la premisa es falsa, ya que las condiciones iniciales o del presente son magnitudes que poseen casi siempre un cierto error, por pequeño que éste sea. No puede conocerse, por ejemplo, la posición de todas las partículas de un sistema en un instante dado con una precisión absoluta, o lo que es lo mismo, con un error cero. No puede mejorarse infinitamente la precisión, ni usando nuestros ordenadores; la computación infinita es una quimera. Por tanto, el error cero es inalcanzable, es -como dice Wagensberg[6]- el error inhumano. Y ello no es reconocer, al final, que el azar y la indeterminación asoman por acusa de nuestra limitación cognoscitiva. Porque el infinito no es un concepto físico y real, sino sólo matemático. De modo que por qué vamos nosotros, seres reales o de un mundo real, a pretender alcanzar esa precisión infinita, que no es de nuestro mundo.

Pero pensemos -para reforzar esta ya clara postura por mi parte a favor de la existencia de un azar esencial- en un típico ejemplo de proceso estocástico, o aleatorio, es decir, ligado al azar: el lanzamiento de un dado al aire, o de una moneda. Reparemos que tal hecho es un juego de azar, un muy simple y antiguo juego de azar - hoy que estamos rodeados por doquier por juegos de azar -. Y etimológicamente ello es así: azar viene de **alea, ae,** juego de azar, riesgo, suerte, incertidumbre, y, en sentido más concreto, el propio juego de dados. De ahí, de alea deriva **aleatorius, a, um,** relativo al juego. Luego, en efecto, el juego de dados es, etimológicamente, aleatorio. Pues bien, determinar antes del lanzamiento qué cara del dado, o de la moneda saldrá exige, evidentemente, un conocimiento perfecto,

---

[4] Peter T. Landsberg, nacido en Berlín, ocupa la cátedra de la Faculty of Mathematical Studies de Southampton.

[5] Recuérdese que la Mecánica cuántica explica las propiedades ondulatorias de partículas tales como electrones, protones, etc., mediante las llamadas funciones de onda, que describen el comportamiento de esas partículas. Y las funciones de onda asignan probabilidades a los diversos estados, no valores fijos.

[6] Jorge Wagensberg, físico y filósofo de la ciencia, organizador del simposium de Figueres, de quien tuve la suerte de ser alumno.

infinito, sin error alguno - inalcanzable, por tanto - de las condiciones iniciales del dado y de su movimiento. Pero **las cosas ocurren**, replicará el determinista, y, tras el lanzamiento, un 4 o un 6, o lo que sea, o cara o cruz, quedará ahí en el suelo como un suceso cierto.

Pongamos otro ejemplo, éste de la mecánica clásica, el conocido del péndulo con el brazo en la posición superior. Aquí, la posición inicial determina fatalmente el movimiento del sistema hacia y lado y otro. Pero la predicción precisa no siempre es posible, porque, al colocar el brazo en la posición superior lo más exactamente que se pueda con nuestros procedimientos técnicos, jamás se elimina del todo un leve error o diferencia respecto a la vertical matemática. Error que desequilibrará el brazo hacia uno u otro lado, con una frecuencia similar, pero imposible de decidir con exactitud en cada caso concreto. Claro, se habla de un equilibrio inestable, de un punto crítico. Y son, precisamente, estos puntos críticos, de bifurcación, singulares, etc. los que plantean serios problemas en Física y en Química a los deterministas. Pero éstos vuelven a la carga indicando que el movimiento del brazo del péndulo hacia uno u otro lado está perfectamente explicado por nuestras leyes físicas, y según ellas va a producirse, siendo la elección de un lado o el otro una cuestión casi, casi menor, ya que tal elección conduciría el resultado cierto si alcanzáramos el error cero en la precisión de las condiciones iniciales -error inhumano, me apresuro a recordar-.

La cuestión y el debate están -en mi opinión- zanjados o quedan en suspenso, porque parece desprenderse -y así ocurrió en Figueres- que el determinismo de los deterministas es menos rígido que el de los indeterministas. El propio René Thom considera su teoría de catástrofes determinista, ya que para él no hay por qué exigir a un enfoque determinista unicidad en las soluciones. Una bifurcación de una solución en dos no supone para el creador de la teoría de catástrofes el abandono del determinismo. Lo contrario, piensan algunos indeterministas. Quizás, como ocurre muchas veces, el desacuerdo se origina en un desajuste semántico y terminológico, en la polisemia de algunos términos. Sobre la teoría de catástrofes tal vez habría que recordar -y así lo han expresado también físicos de la talla de Ludwig[7]- consideraríamos de una enorme utilidad conocer antes una dinámica -aceptémoslo- determinista pero conteniendo una bifurcación, como es el caso de la teoría de Thom, las probabilidades de ocurrencia de cualquier solución, salida o catástrofe.

Volviendo, finalmente, a esos puntos críticos, las experiencias de la Física descubren cada día más y más casos en los que no se verifica la ley de que una variación pequeña en las causas provoca una variación pequeña en los efectos. Porque hay ya muchos casos en los que una pequeñísima variación de esas causas *primeras* produce saltos, discontinuidades, *catástrofes* en los efectos. Estos casos corresponden a singularidades matemáticas, y en ellos, precisamente, hay que -como dice el profesor Wagensberg, entre otros- situar el azar fuerte, el esencial. Parece,

[7] Günther Ludwig ocupa la cátedra de Fundamentos de la Física en la Universidad Phillips de Marburg; participó en el simposium de Figueres.

incluso, que aun logrando el error cero, la dinámica en ellos sería indeterminista. Quizás, como indica este mismo profesor, el debate, al margen de la polisemia mencionada en los términos, admita una respuesta intermedia: *Me siento cómodo con un mundo determinista en la extensión rutinaria de las adaptaciones y azaroso puntualmente en ciertas singularidades. Tal esquema de coexistencia entre leyes y contingencias me propone un mundo razonablemente indeterminista en el que, como mínimo, quepo yo como ser humano con libertad y todo.*

2.-ALGUNAS NOTAS SOBRE LAS CARACTERISTICAS Y LOS SIGNIFICADOS DE PROBABILIDAD Y DE AZAR

Bien, aproximándonos a nuestro mundo geográfico y real, veamos, de un modo sucinto, algunas características y significados de lo aleatorio -del azar- y de la probabilidad. En primer lugar, conviene recordar que ambos téminos se usan, habitualmente, con sentidos diversos. Respecto al término probabilidad, podríamos señalar al menos tres. Veámoslo con ejemplos. La afirmación de que la probabilidad de obtener dos caras al lanzar dos monedas al aire es de 1/4 es un juicio que puede llamarse de probabilidad a priori temas éstos sobre los que trata el cálculo de probabilidades como rama de la Matemática (y de la pura, si quieren). La afirmación, en cambio, de que existe una probabilidad algo mayor de que, en Cáceres, un día de septiembre sea lluvioso a que lo sea en julio, es un aserto o juicio estadístico, pues deriva de una estimación de la frecuencia con que una propiedad -ser lluvioso, en el ejemplo- es asignable a los elementos o sujetos de un conjunto dado- los días de julio y los de septiembre, en nuestro caso-. Pero aún existe al menos un tipo más de afirmación en la que se usa explícitamente el término probabilidad, cuando, por ejemplo, afirmamos que la probabilidad de que el Barça gane la liga es pequeña. En este caso, puede hablarse -siguiendo la terminología de AYER, A.J., (1974)[8]- de un juicio de credibilidad. Es decir, aquí probabilidad es sinónimo de una especie de grado de confianza de nuestro juicio, apresurado o no. Por tanto, resumiendo esta primera nota, solemos mezclar, incluso en nuestra literatura geográfica, juicios de probabilidad apriorísticos, juicios estadísticos y juicios de credibilidad.

En segundo lugar, aun siendo casi obvio en este auditorio, en el cálculo de probabilidades **debe** tenerse muy presente (y noten, jugando con las palabras, que he dicho debe y no **debe de**, que, como saben, es un magnífico ejemplo que nos suministra el lenguaje de obligatoriedad **versus** probabilidad) la independencia o no de los sucesos -recuérdese la conocida paradoja de Montecarlo: tras una larga sucesión de números rojos en una ruleta, sean n, la probabilidad de que en la tirada n+1 se obtenga un número negro sigue siendo igual a la de que salga uno rojo-.

En tercer lugar, las proposiciones del cálculo de probabilidades no son experimentables de un modo completo. Toparíamos, por ejemplo, con la necesidad

[8] AYER, A.J. (1974): **Matemáticas en el Mundo Moderno**, Madrid, Blume, de donde se ha extraído algunas ideas para el apartado 2.

de experimentar hasta el infinito -si no lanzamos infinitas veces la moneda, cualquier desviación sobre el porcentaje de caras y cruces podría aún ser corregida posteriormente-.

En cuanto, el cálculo de probabilidades puede ser aplicado consistentemente, si se posee una regla que decida en todos los casos qué sucesos son igualmente probables.

En quinto, la aplicación del cálculo de probabilidades a casos concretos transforma los juicios de probabilidad **a priori** en juicios estadísticos.

Y, finalmente, recordemos lo engañoso que resultan para nuestro sentido común algunos problemas y cuestiones del cálculo de probabilidades -las paradojas y falacias son aquí numerosísimas-.

Con estas notas, podemos revisar algunos de los sentidos que se atribuyen al término azar. Uno primero, que enlaza con los juicios de probabilidad **a priori**, es aquél usado en procesos en los que un suceso se ajusta al cálculo de probabilidades, y si, de esta manera, ocurre con una frecuencia significativamente desviada de la calculada solemos afirmar que tal discrepancia no puede ser atribuida al azar. Un segundo sentido del término azar o aleatorio es aquel que se aplica a sucesos que se desvían con respecto a una frecuencia establecida -en este caso estamos más cerca de los juicios estadísticos, pero, lo que hay que recalcar, es que este sentido dado al azar parece contradictorio con el primero-. Un ejemplo: se dice que las mutaciones genéticas se producen al azar. O sea, los sucesos que se apartan de la norma los marcamos con el sello de lo aleatorio. Un tercer sentido de azar es el utilizado para caracteriazar un suceso -sea humano o animal- en el que faltó la intencionalidad del agente (naturalmente que tal suceso tuvo una o más causas). Con el infortunio o el azar se justifica, por ejemplo, una lesión de un futbolista, si el contrario que entró en contacto con él actuó de buena fe. Un cuarto sentido de azar es el utilizado para justificar la coincidencia de sucesos, existiendo seguramente una ley, descubierta o no, que pueda relacionarlos. Azar, pues, en cierta medida, como ignorancia. En fin, un quinto sentido es el que se atribuye a una *elección* aleatoria, a un sorteo. ¿Qué número saldrá? Es cuestión de azar, tal vez ese azar esencial o fuerte del que hablamos antes. Véase, pues, los diferentes, y hasta en algún caso contradictorios significados dados a los términos probabilidad y azar.

Y, de cara ya a la segunda parte de la ponencia, podríamos preguntarnos, con el encuadre de las notas, ideas y significados recogidos hasta ahora, qué utilidad tiene en nuestra investigación y en nuestra praxis geográficas el tratamiento probabilístico en sentido amplio -los métodos y procedimientos probabilísticos y estocásticos-. Pues bien, sin alargarnos en demasía, porque sería desarrollar otra ponencia, aun suponiendo que no existiera el azar que hemos denominado esencial en los hechos que estudiamos como geógrafos, es decir, que los sistemas que analizamos presentaran un funcionamiento determinista, perfectamente causal, la probabilidad es una herramienta de un valor verdaderamente inestimable en cuanto al tratamiento y a la evaluación concretos. Los sistemas geográficos son, a veces, tan extraordinariamente complejos, que, aun poseyendo las leyes ciertas que expliquen su funcionamiento, el análisis previo detallado de las causas puede resultar impracticable -muchas veces, el número de causas es elevado, no siempre bien conocidas en sí mismas ni en cuanto a sus interacciones, y, además, la información de partida muy cuantiosa-. Pero bien, tal complejidad puede ser tratable y descrita en términos de probabilidad. Y así, por poner un ejemplo referente a la cuantía de información disponible, nuestros muestreos aleatorios bien realizados nos permiten inferir resultados válidos, con el control de un margen de error determinado, para toda una población. No negamos, en estos casos, un comportamiento determinista de los sistemas, pero resulta muy práctico, resolutivo y cómodo tratarlos bajo el enfoque de lo probabilístico y de lo aleatorio. Y quedan aún, quizá, los casos en que exista un azar **per se** en nuestros sistemas[9]. Al menos, poniendo un ejemplo climatológico, los estudios más recientes sobre la atmósfera y la física de fluidos parecen concluir en que la dinámica de una corriente turbulenta de gases es indeterminista, y, así, la evolución del tiempo atmosférico es indeterminista. El clima es un sistema inestable. Esto -habrá notado el auditorio- no justifica todos los errores y faltas de acierto de las previsiones meteorológicas. En ellas existe una componente de azar elevada, pero en buena parte suprimible, azar derivado de la insuficiencia de nuestros conocimientos. Pero parece que debe quedar un remanente imposible de eliminar.

3.-INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA INFILTRACION (*PERCOLATION PROCESSES*)

Como un ejemplo de una teoría probabilística reciente y muy sugestiva, ya con interesantes aplicaciones en la explicación de fenómenos físicos y químicos, vamos a presentar la llamada teoría de la infiltración o de la percolación[10]. Las bases de esta teoría fueron sentadas hace sólo treinta años, en 1957, por los científicos ingleses S.R. Broadbent y J.M. Hammersley. Fue realmente curioso cómo se llegó a ella; es ilustrativo recordarlo. A mediados del sexto decenio de este siglo, Broadbent se dedicaba al estudio de caretas antigás para uso en el interior de las minas, según un encargo de la Asociación Británica de Investigación del Uso de la Hulla. Pero topó con un problema que llamó también la atención del matemático Hammersley, el otro padre de la teoría. Resulta que es el carbón el principal material del filtro de la careta. Y el carbón posee poros unidos formando un laberinto enrevesado. El gas tóxico al penetrar por los poros del carbón va ***sedimentándose*** en las paredes del laberinto. Si los poros eran bastante anchos y estaban bien conectados entre sí, el gas tóxico penetraba mucho en el filtro, pudiendo llegar a las vías respiratorias del minero. Si los poros son estrechos y están mal conectados, el gas apenas penetra, pero tampoco el aire que ha de respirar. En

[9] En la ponencia de la profesora Th. Saint-Julien presentada al Coloquio se confirmó la existencia de bifurcaciones en algunos sistemas geográficos.

[10] El lector puede ampliar el contenido de este apartado 3 en la excelente obra de EFROS, A. (1987): **Física y Geometría del desorden**, Moscú, Mir, de donde está inspirada la presentación de la teoría de la infiltración aquí expuesta.

consecuencia, en el primer caso -poros anchos y bien conectados- pasa el gas tóxico junto con el aire y en el segundo -poros estrechos y mal conectados- no pasa el gas venenoso, pero tampoco el aire. El movimiento del gas por el laberinto de poros no puede, por las restricciones espaciales que imponen los conductos, explicarse por el conocido fenómeno de la difusión de los gases. Pues bien, el nuevo fenómeno y otros similares recibieron el nombre de procesos de infiltración o percolación (*percolation processes*).

Vamos a introducirnos con un sencillo ejemplo en la teoría de la infiltración. Este ejemplo (ver figuras a final de texto) es un problema resuelto por dos físicos norteamericanos, B.P. Watson y P.L. Leath, en 1974[11]. Estos físicos se propusieron estudiar la conductividad eléctrica en una rejilla. Trabajaban con una rejilla cuadrada de 137x137=18769 nudos, a la que, en dos lados opuestos, soldaron unos electrodos conectados a un circuito eléctrico. A continuación, fueron bloqueando los nudos de un modo aleatorio, y midiendo la resistencia eléctrica, o, su inversa, la electroconductividad. Evidentemente, al aumentar el número de nudos bloqueados disminuía la electroconductividad. Pues bien, siendo:

$$x=\frac{\text{número de nudos no bloqueados}}{\text{número de nudos}}$$

para cierto valor de x la conductividad eléctrica se reduce a 0 (claro, esto ocurre cuando se rompe la última vía o laberinto que enlaza un electrodo con el otro). Ese valor de x-sea x_c- recibe el nombre de umbral de infiltración o de percolación del experimento. No hace falta pensar mucho para darse cuenta de que xc es una variable aleatoria, ya que al repetir el experimento los nudos que van siendo bloqueados definen unos laberintos muy diferentes. Cabe, pues, realizando varias veces -sean Q- el experimento con la misma rejilla, hallar un $\bar{x}_c^Q$, o valor medio de los umbrales de infiltración de Q experimentos.

Hay que insistir en que $\bar{x}_c^Q$ depende del número N de nudos de la rejilla y del número Q de experimentos.

En consecuencia, $\bar{x}_c^Q$ sigue siendo una variable aleatoria, porque otra serie de Q experimentos daría un resultado algo diferente al primero. Pero cuanto mayor sea Q tanto menos se diferenciarán los diferentes valores medios, de modo que, al aumentar Q, $\bar{x}_c^Q$ tiende a un número fijo, sea $x_c(N)$.

Éste se denomina valor medio del umbral de infiltración de un retículo con N nudos. Pues bien, $x_c(N)$ es, al tiempo, una variable, pues depende de N.

---

[11] El experimento de Watson y Leath, conocido como el problema de los nudos, es descrito y resuelto en **Physical Review**, 1974.

Finalmente

$$X_c = \lim_{N \to \infty} x_c$$

es el umbral de infiltración, o de percolación, del retículo cuadrado.

Veamos, para centrar esta ideas, cómo resolvemos el caso de una rejilla 2x2, ó sea, N=4 nudos. Numerados los nudos, sea el 1 el primer nudo, elegido al azar, bloqueado (no importa qué nudo sea el primero bloqueado; comenzar por otro es un caso similar al resuelto). Con la disposición de la figura 2, si el segundo nudo bloqueado es el 2, aún pasará la corriente eléctrica, luego habrá que bloquear otro más (por tanto, $x_c=1/4$). Si, en cambio, el segundo nudo bloqueado es el 3 o el 4, la conductividad eléctrica se reduce a 0 (en cada uno de estos dos casos, x_c $=2/4=1/2$). Como los tres casos son equiprobables, el cálculo de $x_c(4)$ se reduce al de una esperanza matemática con 1/3 como valor de las probabilidades. Así:

$$x_c(4) = 1/4 \ . \ 1/3 + 1/2 \ . \ 1/3 + 1/2 \ . \ 1/3 = 2/12 = 0.42$$

Watson y Leath obtuvieron para su enorme rejilla $x_c(18769) = 0.59$. Y estudiaron un retículo cuadrado con tantos nudos porque el valor hallado es el que, con dos decimales, corresponde a X_c. En consecuencia, en el retículo cuadrado, es decir, en una rejilla cuadrada con muchos nudos, las vías de infiltración quedan cortadas con un 59% de nudos bloqueados. Como comparación, los resultados para otros tipos de retículos planos son: $X_c= 0.5$, para el retículo triangular, y $X_c = 0.70$, para el hexagonal.

Quizás resulte interesante exponer, siquiera sea brevemente, un método para la resolución general de problemas de infiltración. Se trata, precisamente del método de Montecarlo, es decir, un procedimiento que utiliza fundamentalmente un generador de número aleatorios. Estudiaremos el caso de un retículo plano cuadrado cuyo lado tenga L nudos, o sea, $N=L^2$.

Hagamos que la distancia entre los nudos consecutivos paralelos a los lados sea igual a la unidad, y coloquemos unos ejes de coordenadas cartesianas paralelos a los lados y a una unidad de distancia de dos de ellos, el izquierdo y el inferior. Cada nudo puede, entonces, ser identificado por sus coordenadas cartesianas (X,Y), con X e Y variando entre los enteros positivos 1 y L. Construyamos una función de dos variables V(X,Y), llamada primer bloque dimensional, tal que:

$$V : \{(X,Y) \mid X=1,\dots, L;\ Y=1,\dots,L;\ L \in N^{*}\} \text{ -------} > [0, 1]$$

$$(X,Y) \quad \text{------->n}^{\underline{o}} \text{ aleatorio.}$$

A continuación, construyamos un segundo bloque dimensional, D(X,Y), así:

K : {(X,Y)} ---------- > {0, 1} de manera que, elegido un t ε [0,1] aleatoriamente, si

V (X, Y)≤ t entonces K (X,Y)=1, y si
V (X, Y) > t entonces K (X,Y)=0,

representando en el primer caso que (X,Y) es un nudo no bloqueado y en el segundo, bloqueado. Como los valores de V están uniformemente distribuidos en el intervalo [o,a], si t es un número próximo a cero, entonces V(X,Y)>t, para casi todas las parejas (X,Y), es decir, los nudos estarán bloqueados. Por tanto, intuitivamente t viene a coincidir con el porcentaje de nudos no bloqueados.

Por tanto, con los bloques dimensionales V y K tenemos identificados los nudos y sabemos si están o no bloqueados. Ahora estamos en disposición de estudiar las vías de infiltración, sea de izquierda a derecha. Se comienza asignando a los nudos $\{(1,Y)\}_{Y=1,\dots,L}$ con K(1,Y)=1, es decir, a los nudos no bloqueados de la primera columna, un número distinto de 1 y de 0, sea, por ejemplo, el 2. A partir de aquí, el ordenador busca qué nudos de la segunda columna tienen K(2,Y)=1 y están conectados con un nudo de la primera columna con K(1,Y)=2. Estos nudos de la segunda columna reciben, entonces, como valor de k un 2. Repitiendo este procedimiento, se consigue ir trazando las vías de infiltración. El proceso descrito puede concluir en que aparezca al menos un 2 en la columna final de la derecha; entonces, para el t elegido, existe percolación. O bien, que se encuentre una columna con ningún 2; en este caso, con el t elegido no existe percolación, ya que la columna citada corta las vías de infiltración. Si estamos en el primer caso, el ordenador reduce ligeramente el valor de t y comienza de nuevo la búsqueda de las vías de infiltración. Si existen, se vuelve a reducir t, hasta que, finalmente, con un cierto t no haya infiltración. Llegados a este punto, se realiza la búsqueda con la semisuma del valor último de t y el más pequeño con el que todavía existía infiltración. Si así no hay, se prueba con la semisuma del valor ensayado en el último caso y el más pequeño con el que aún existía infiltración. Si existiere, se ensayaría con la semisuma del último valor probado y el valor de t con el que no existía infiltración. En resumen, vamos encerrando o acotando el umbral de infiltración en una horquilla. De un modo paralelo se actuaría si con el primer valor de t no hubiera habido percolación.

Todavía no se ha acabado el proceso, porque hay que realizar muchos nuevos experimentos usando otros conjuntos diferentes de número aleatorios como valores del bloque V. Así obtendríamos el valor medio del umbral de infiltración, $x_c(N)$, sumando los valores de los umbrales obtenidos y dividiendo por el número, muy grande, de experimentos.

Para hallar, por fin, el verdadero umbral de infiltración, $X_c = \lim_{N\to\infty} x_c(N)$, habría que variar el número N y obtener $x_c(N) = x_c(N)$ en función de él. Para estudiar esta dependencia, la mejor expresión analítica es: $x_c(N) = x_c(\infty) + D\omega\cdot$

Hay que elegir $x_c(\infty)$, D y $\omega > 0$, del modo que mejor describan los valores de los distintos $x_c(N)$. Según sea la velocidad y la memoria del ordenador, tendremos más o menos $x_c(N)$, y calcularemos con mayor o menor precisión el umbral de infiltración del retículo cuadrado.

Bien, hasta aquí una presentación resumida de esta interesante teoría de la infiltración/percolación, inspirada en la pequeña pero muy buena obra de EFROS, A. (1987). Y qué aplicaciones puede tener esta teoría en nuestra disciplina geográfica. Vamos a señalar, a modo de ejemplo, sin desarrollarlas, tres posibles. Quizás alguien pueda decir que no son ejemplos o aplicaciones geográficos. Bueno, esto nos llevaría a un debate ya clásico y larguísimo. En todo caso, nótese que en los siguientes ejemplos -como en toda la teoría de la infiltración- la distribución y configuración espacial de unos elementos, en cuanto a su geometría, es el objeto de la investigación.

Primer ejemplo: el contagio de enfermedades en un cultivo arbóreo cuyos árboles estén plantados, como es usual, formando un determinado retículo. Si el contagio se realiza por vecindad, la distancia **d** entre las ramas de los pares vecinos influirá decisivamente en la transmisión de la enfermedad, hablándose si ésta es inevitable del par *enlazado*. Basta ahora conocer la variable aleatoria X(d) que nos provea la probabilidad de que dos árboles contiguos estén *enlazados*, en función de la distancia entre sus ramas, para, trabajando con los llamados enlaces, que es una variante de los nudos antes mencionados, poder llegar a determinar la probabilidad de que un árbol enfermo contagie a un cierto número del campo de cultivo.

Segundo ejemplo: la propagación de un incendio forestal, suponiendo una distribución más o menos reticular de los árboles y una determinada dirección del viento. El problema, que es un caso de la llamada percolación orientada, admite solución en cuanto a si el incendio quedará localizado o restringido a una pequeña área o si afectará a todo el bosque[12].

Tercer ejemplo: la determinación, sobre un mapa con una distribución cualquiera de tierras y mares, de vías acuáticas que conduzcan de un extremo a otro. Para este problema, no reticular, una extensión de la teoría de la infiltración nos permite llegar a conocer el valor del área de las tierras a partir del cual desaparece la conexión.

Bien, esto es sólo una muestra de las aplicaciones de la teoría de la infiltración. A buen seguro, los presentes tendrá ya en mente otras posibles. Piénsese que la teoría de la infiltración puede dar respuestas en los casos de estudio de las relaciones entre un gran número de elementos de nuestros sistemas espaciales, si

[12] Una pequeña reseña de este caso apareció en el suplemento *Ciencia* del periódico **La Vanguardia**, 31-VII-88,

los enlaces entre ellos y sus vecinos tienen un carácter aleatorio o, sin apurar, pseudoaleatorio.

4.-ALGUNAS APLICACIONES DE LAS CADENAS DE MARKOV EN CLIMATOLOGIA

Bien, ahora, enfilando el último tramo de esta ponencia, haremos referencia a los procesos estocásticos conocidos por cadenas de Markov. En primer lugar, quizá convenga precisar el término estocástico. En un sentido amplio, un proceso estocástico es cualquier proceso que incorpora un elemento aleatorio. O sea, estocástico como sinónimo de ligado al azar. Y así se habla de proceso estocástico **versus** proceso determinístico (SILK, J., 1979)[13]. Esto enlaza bien con la propia etimología del término estocástico, derivado del griego *stokhastes*, adivino.

En un sentido más preciso, matemáticamente, un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias. Pues bien, entre las cadenas de Markov -en plural, porque existen de muchos tipos, contra lo que a veces parece desprenderse de algunas lecturas-, algunas resultan de especial utilidad en Geografía, particularmente en Climatología. Éstas son las cadenas homogéneas, de tiempo discreto, de dos estados y de primer, segundo o más órdenes.

Una cadena de Markov de *tiempo discreto* y de *primer orden se define como* un proceso estocástico que cumple:

(1) que es discreto en el tiempo (de tiempodiscreto)
(2) que tiene un espacio de estados finito o contable (cadena)
(3) que satisface la condición (propiedad de Markov 1º orden)

$$P[X_m=x_m|X_0=x_0,...,X_{m-1}=x_{m-1}] = P[X_m=x_m|X_{m-1}=x_{m-1}]$$
$$\forall m, \forall x_0,...x_m$$

Una cadena de Markov es homogénea o estacionaria si la probabilidad de una determinada transición no depende del instante en que se produce. Y una cadena de Markov es finita con dos estados cuando el número de valores o estados posibles de sus variables aleatorias es finito e igual a dos.

Pues bien, podemos plantear el análisis de la frecuencia de la precipitación diaria mediante un proceso estocástico en el que el tiempo y el estado son discretos, si, por ejemplo, usamos como unidad de tiempo el día y como estados posibles: lluvioso y seco -si se recogió o no precipitación apreciable en el trascurso

[13] SILK, J. (1979): **Statistical Concepts in Geography**, London, Allen and Unwin.

de cada día-. De esta manera, la sucesión de estados de los días es una cadena de tiempo discreto y de dos estados. Para que además sea una cadena de Markov ha de verificar la propiedad de Markov. En este punto surge una dificultad, pues es bien conocido el fenómeno de la persistencia de los días con precipitación, que no se reduce exclusivamente al estado del día anterior al considerado -*como exige la propiedad de Markov*-, sino también a los de los días precedentes a ése. Esta dificultad puede considerarse obviada al ser la dependencia mucho mayor respecto al día anterior que a otros pretéritos. Por otra parte, la homogeneidad de la cadena de Markov de la sucesión de días lluviosos y secos es un punto largo de debatir, para cuya comprobación existen algunas pruebas de decisión estadística. Notemos aquí sólo que el paso de un estado a otro en días consecutivos depende algo de las fechas en que se produce. Sin embargo, este modelo realiza, en todos los casos ensayados, un ajuste muy notable de la frecuencia de aparición de secuencias lluviosas, tanto mensual como anualmente. Según él, la probabilidad de que una secuencia lluviosa dure exactamente n días, p_n, se calcula mediante:

$$p_n = (1 - p_{10})^{n-1} \cdot p_{10}$$

siendo p_{10} la probabilidad de aparición de día seco después de día lluvioso. Algunos autores indican que, dada la bondad de los ajustes, y desde un punto de vista práctico, es preferible a veces sacrificar el cumplimiento fiel de las hipótesis markovianas en aras de la simplicidad, que se perdería, sin ganar claramente en verosimilitud, al intentar modificar el modelo para que el fenómeno estudiado quedar totalmente bajo los presupuestos teóricos. Sin embargo, tal modificación es obligada en el estudio de las secuencias secas, al menos en nuestros climas, muestran claramente una mayor persistencia que los lluviosos. Y así, y sin salirnos de los procesos markovianos, puede proponerse como modelo que perfecciona el anterior procedimiento, para el caso de la sequía, la cadena de Markov de segundo orden e, igual que la probabilidad de que un día presente uno de los dos estados, por ejemplo, la aparición de un día seco, depende de lo ocurrido el día anterior -como en la cadena de Markov de primer orden- y, además, de lo ocurrido en el día anterior a ése. En la cadena de Markov de segundo orden, la probabilidad de que una secuencia seca dure exactamente n días, q_n.

Se calcula mediante:

$$q_n = p_{100} \cdot p_{100}^{n-2} \cdot p_{001} \quad \text{para } n \geq 2$$

$$q_1 = p_{101}$$

siendo p_{100} la probabilidad empírica de ocurrencia de un día seco tras uno anterior también seco y el precedente a éste lluvioso, p_{000}, la correspondiente probabilidad de día seco después de dos secos, p_{001}, la de uno lluvioso tras dos días secos y

P_{101}, la de uno lluvioso después de uno seco y el anterior a éste lluvioso. Pues bien, este modelo ofreció mejores ajustes que la cadena de Markov de primer orden al aplicarlo al caso de Almería (MARTIN VIDE, J., 1985)[14]. No obstante, y tal vez por las especiales características climáticas del sudeste español, en cuanto a la larga duración de las secuencias secas, los valores calculados por la cadena de Markov de segundo orden todavía muestran discrepancias algo notables con los empíricos para valores altos de **n**. En consecuencia, una cadena de Markov de un orden superior, probablemente de tercer orden -de cálculo bastante más aparatoso- ofrecería ya unos resultados muy satisfactorios. Las posibilidades de los procesos markovianos son, pues, numerosas.

En fin, tal como empezábamos, la probabilidad -palabra repetida a lo largo de esta ponencia muchas decenas de veces- guía, ciertamente, la vida misma.

Addendum: Por su novedad, y especialmente por el contenido y la relevancia científica de los autores, hay que anunciar la aparición, en el momento del redactado final de esta ponencia, de la obra de PRIGOGINE, I. y STENGERS, I. (1988): **Entre le temps et l'éternité**, París, Fayard.

[14] MARTIN VIDE, J. y MORENO, M.C.(1985): *El estudio de las sequías mediante el análisis probabilístico de las secuencias secas. El caso de Almería.* **IX Coloquio de Geografía. Ponencias. I**, A.G.E.

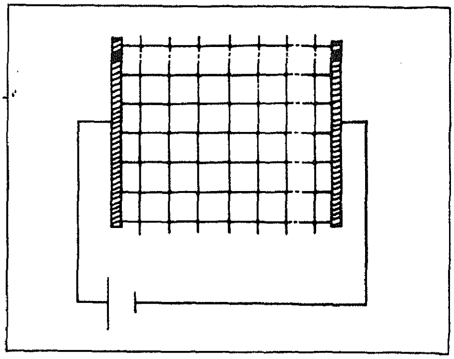

Figura 1: Esquema simplificado del experimento de Watson y Leath.

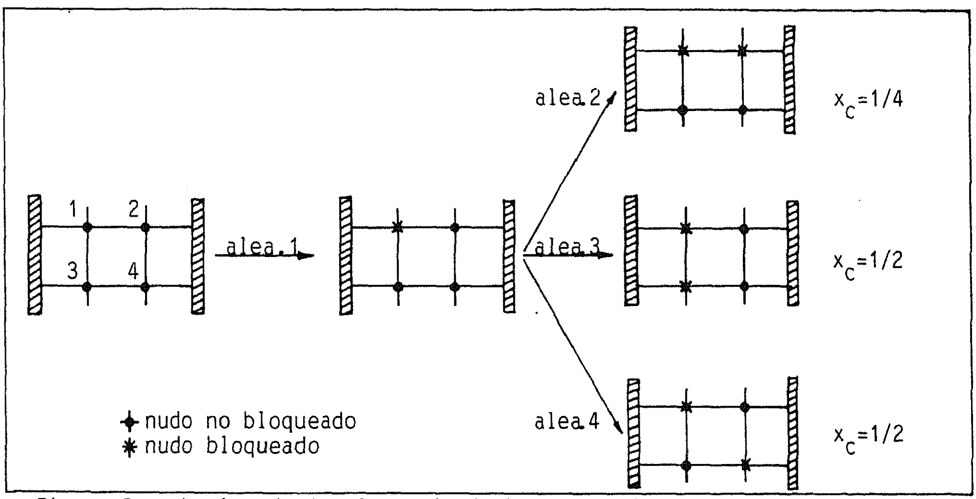

Figura 2: Umbrales de infiltración de los casos del retículo cuadrado 2x2.