

ZUBIA	9	9-17	Logroño	1991
-------	---	------	---------	------

EL MODELO DE LA ESFERA DE POINCARÉ: REPRESENTACIÓN DE MEDIOS MATERIALES*

J.J. Gil Pérez**
P.M. Arnal Gil***

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo generalizado de la esfera de Poincaré, que se aplica al análisis de los efectos que producen medios materiales como retardadores y polarizadores sobre la polarización de la luz que interacciona con ellos.

Palabras clave: esfera de Poincaré, luz polarizada.

A generalized model of the Poincaré sphere, that is applied to the analysis of the effects produced by some material media as retarders and polarizers on the light polarization, is presented.

Key words: Poincaré sphere, polarized light.

0. INTRODUCCIÓN

El estudio de los efectos que producen los medios materiales sobre la polarización de la luz que interacciona con ellos, presenta un importante interés por sus aplicaciones en diferentes campos de la Física.

Uno de los procedimientos para estudiar los citados efectos fue propuesto por Poincaré (1892) y consiste en representar los diferentes estados de polarización de la luz en una esfera, llamada esfera de Poincaré.

En este trabajo se hace un estudio detallado de las transformaciones correspondientes a retardadores y polarizadores. Ello permite abordar complejos problemas en los que intervienen combinaciones de diferentes tipos de medios ópticos, ya que tales problemas pueden reducirse siempre al análisis de una determinada sucesión de polarizadores y retardadores que producen, globalmente, el mismo efecto.

* Recibido el 12 de Diciembre de 1989. Aprobado el 25 de Junio de 1991.

** Departamento de Física Aplicada. E.U. de Magisterio. C/ Luis de Ulloa, s/n. 26004 Logroño.

*** Departamento de Matemáticas. E.U. de Magisterio. C/ Luis de Ulloa, s/n. 26004 Logroño.

1. ELIPSE DE POLARIZACIÓN

Dado un haz de luz, el estado de polarización más general es la polarización elíptica, la cual se representa por la llamada elipse de polarización. Esta elipse está caracterizada por tres parámetros independientes, las dos amplitudes A_x , A_y de las componentes del campo eléctrico y su diferencia de fase δ , o bien por las longitudes de sus semiejes mayor y menor (a y b respectivamente) y por el ángulo φ (azimut), que es el ángulo formado por el eje mayor de la elipse con el eje OX de referencia.

La caracterización completa de la elipse de polarización, requiere conocer el sentido de giro del vector campo eléctrico E , cuando describe la elipse. Se dice que la polarización elíptica es dextrógira si: $0^\circ < \delta < 180^\circ$, análogamente se dice que la polarización elíptica es levógira si: $180^\circ < \delta < 360^\circ$.

Introduciendo el ángulo ω (elipticidad), como $\text{tg } \omega = \pm b/a$ y donde el signo indica el sentido de giro del vector campo eléctrico, se puede demostrar que si: $0^\circ < \delta < 180^\circ$ entonces $0^\circ < \omega \leq 45^\circ$ y que si $180^\circ < \delta < 360^\circ$ entonces $-45^\circ \leq \omega < 0^\circ$.

En algunos problemas relativos al paso de un haz de luz a través de una sucesión de medios ópticos, no es necesario tener en cuenta el valor absoluto de la intensidad de la luz. Dicho valor viene dado por:

$$I = a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (1)$$

En los casos en los que interesa la evolución de la forma de la elipse de polarización y no su tamaño, la intensidad de la luz (de la parte polarizada más la de la parte no polarizada) puede tomarse igual a la unidad

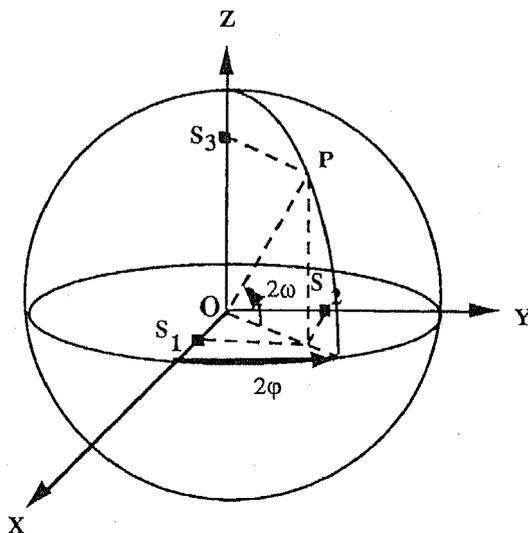
$$I = a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 = 1 \quad (2)$$

Para describir la forma de la elipse de polarización, pueden utilizarse dos parámetros: el ángulo ω , ya definido y que toma valores: $-45^\circ \leq \omega \leq 45^\circ$, y el ángulo φ , también definido y que toma valores: $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

2. REPRESENTACIONES EN LA ESFERA DE POINCARÉ

La esfera de Poincaré constituye un modelo adecuado para la representación de estados de polarización de la luz, así como de la acción de los medios materiales sobre la luz polarizada. Cada posible estado de polarización está representado por un punto en la esfera, con unas coordenadas 2φ y 2ω . Recíprocamente, cada punto de la esfera de longitud 2φ y latitud 2ω representa un estado de polarización, cuya elipse tiene un azimut φ y una elipticidad ω .

El convenio establecido para fijar los ejes de referencia y el sentido de los ángulos 2φ y 2ω es el que se indica en la (Fig. 1).



(Fig. 1)

De acuerdo con lo anterior, los distintos estados de polarización quedan representados del siguiente modo:

* Valores positivos de ω , representan estados de polarización elíptica dextrógira. En la esfera de Poincaré se representan por puntos del hemisferio superior ($0^\circ < 2\omega \leq 90^\circ$).

* Valores negativos de ω , representan estados de polarización elíptica levógira. En la esfera de Poincaré se representan por puntos del hemisferio inferior ($90^\circ \leq 2\omega \leq 0^\circ$).

* Puntos del ecuador ($0^\circ \leq 2\varphi < 360^\circ$ y $w = 0$), representan estados de polarización lineal. En particular, los puntos que están sobre la parte positiva del eje OX, representan estados de polarización horizontal ($\varphi = 0$), mientras que los puntos que están sobre la parte negativa del eje OX, representan estados de polarización vertical ($\varphi = 90^\circ$).

* El polo norte de la esfera, representa un estado de polarización circular dextrógira, mientras que el polo sur, representa un estado de polarización circular levógira. En los dos casos ($\omega = 45^\circ$).

* Puntos del hemisferio norte, representan estados de polarización elíptica dextrógira. Mientras que los puntos del hemisferio sur, representan estados de polarización elíptica levógira. Además, la mitad del valor de la longitud (2φ) y de la latitud (2ω) de cada punto de la esfera, define el azimut φ y la elipticidad ω de la correspondiente elipse de polarización.

* Puntos en el mismo meridiano ($\varphi = \text{constante}$), representan estados de polarización tales que sus elipses de polarización tienen la misma orientación. Mientras que puntos en el mismo paralelo ($\omega = \text{constante}$), representan estados de polarización tales que sus elipses de polarización tienen la misma elipticidad.

* Puntos de la superficie de la esfera, representan luz totalmente polarizada.

* Puntos interiores de la esfera, representan luz parcialmente polarizada. En este caso la distancia del punto al centro es:

$$r = \text{Intensidad parte totalmente polarizada} / \text{Intensidad total} = G \text{ (grado de polarización)}.$$

* El centro de la esfera, representa luz no polarizada, la cual puede interpretarse como una mezcla incoherente de todos los estados de polarización posibles ($r = 0 = G$).

Cada punto de la esfera de Poincaré viene dado por r y dos coordenadas angulares esféricas 2φ y 2ω . Por tanto las coordenadas cartesianas X, Y, Z de un punto cualquiera de la esfera de Poincaré son:

$$\begin{aligned} X &= r \cos 2\omega \cos 2\varphi \\ Y &= r \cos 2\omega \sin 2\varphi \\ Z &= r \sin 2\omega \end{aligned} \quad (3)$$

Las componentes de los vectores de Stokes, pueden expresarse en función del azimut φ y la elipticidad ω de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 G \cos 2\omega \cos 2\varphi \\ S_2 &= S_0 G \cos 2\omega \sin 2\varphi \\ S_3 &= S_0 G \sin 2\omega \end{aligned} \quad (4)$$

Esto nos permite representar un vector de Stokes, por un punto de la esfera de Poincaré cuyas coordenadas X, Y, Z son respectivamente S_1/S_0 , S_2/S_0 , S_3/S_0 .

Es conocido el hecho de que los efectos que produce un medio material sobre la polarización de la luz que interacciona con él, equivale a los que produciría una determinada combinación de polarizadores y retardadores, Jones (1941). Por ello es de especial interés analizar la acción de dichos medios sobre la esfera de Poincaré.

Los polarizadores se caracterizan por producir una absorción o reflexión selectiva de la luz que incide sobre ellos, mientras que los retardadores le producen un determinado retardo óptico.

Tanto los retardadores como los polarizadores (parciales o totales), pueden ser lineales, circulares o elípticos, según el tipo de autoestados de polarización que dejen invariantes.

Si consideramos un haz de luz de vector de Stokes \mathbf{S} , que incide sobre un medio material, el vector de Stokes \mathbf{S}' del haz emergente viene dado por $\mathbf{S}' = \mathbf{M}\mathbf{S}$, donde \mathbf{M} es la matriz de Mueller asociada al citado medio material. En la esfera de Poincaré, los estados de polarización de los haces de luz incidente y emergente vienen dados por los puntos, que representan a sus respectivos vectores de Stokes, cuyas coordenadas se obtienen de (4).

3. RETARDADORES

En este apartado analizamos, desde el punto de vista geométrico, el modo en que los retardadores transforman la polarización de la luz que interacciona con ellos.

En primer lugar consideraremos el caso de retardadores lineales, lo que permite abordar después el caso de retardadores elípticos y circulares.

Un retardador está caracterizado por el ángulo θ que forma el eje rápido del retardador con el eje OX y el retardo δ .

Para concretar, consideremos el caso particular de un haz de luz linealmente polarizada, de azimut λ respecto del eje de referencia OX, que incide sobre un retardador lineal cuyos ejes rápido y lento coinciden con los ejes OX y OY respectivamente ($\theta = 0$).

Si la intensidad de la luz incidente es la unidad, entonces los semiejes de la elipse de polarización del haz de luz emergente serán $a = \cos \omega$ y $b = \sin \omega$. Descomponiendo el campo eléctrico en la dirección de los ejes OX y OY respectivamente, se obtienen las amplitudes del haz emergente:

$$\begin{aligned} A_x &= |\cos \omega \cos \varphi + i \sin \omega \sin \varphi| \\ A_y &= |\cos \omega \sin \varphi - i \sin \omega \cos \varphi| \end{aligned} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que:

$$A_x = \cos \lambda, \quad A_y = \sin \lambda \quad (6)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos^2 \lambda &= \cos^2 \omega \cos^2 \varphi + \sin^2 \omega \sin^2 \varphi \\ \sin^2 \lambda &= \cos^2 \omega \sin^2 \varphi + \sin^2 \omega \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

y por tanto:

$$\cos 2\lambda = \cos 2\omega \cos 2\varphi \quad (8)$$

El valor de la diferencia de fase entre las dos componentes del haz emergente coincide, en este caso, con el retardo δ introducido por el retardador. La relación entre δ , ω y φ viene dada por:

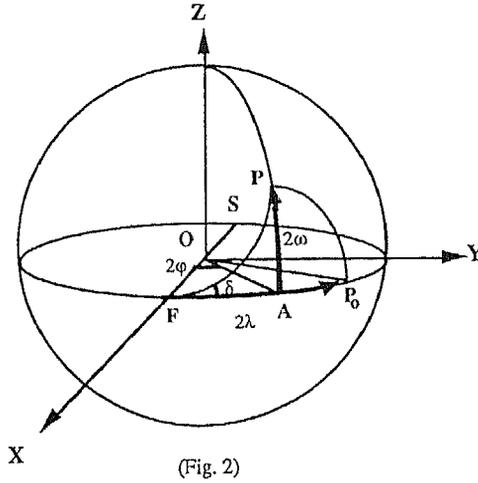
$$\tan \delta = \tan 2\omega / \sin 2\varphi \quad (9)$$

Si representamos en la esfera de Poincaré (Fig. 2) el haz incidente de luz polarizada linealmente por P_0 , el vector propio rápido del retardador lineal por F, y el haz de luz emergente por P vemos que:

$$FP_0 = 2\lambda, \quad FA = 2\varphi \quad \text{y} \quad AP = 2\omega$$

Observando los triángulos esféricos FAP, FP_0P y teniendo en cuenta (8) y (9) se deduce que:

$$FP = FP_0 \quad \text{y} \quad PFP_0 = \delta \quad (10)$$



Es decir, el punto P que representa la luz emergente se puede obtener como una rotación de eje FS y ángulo δ , del punto P que representa la luz incidente.

Es de señalar que FS es el eje que une los puntos que representan los estados de polarización de los vectores propios rápido y lento del retardador lineal y δ es el retardo introducido por el retardador. La rotación de la esfera es de sentido contrario al de las agujas del reloj para un observador que mira de F a S.

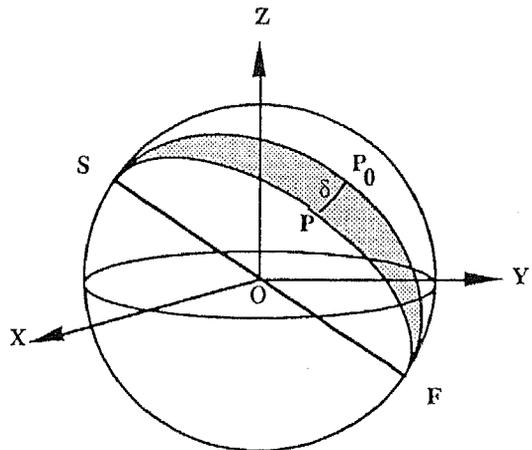
Los puntos F y S, diametralmente opuestos, representan estados de polarización ortogonales entre sí.

Teniendo en cuenta que la especificación de los ejes OX y OY en el plano perpendicular a OZ es arbitraria y que todos los puntos del ecuador representan estados de polarización lineal, el resultado anterior es fácilmente generalizable a los casos en que el retardador es elíptico.

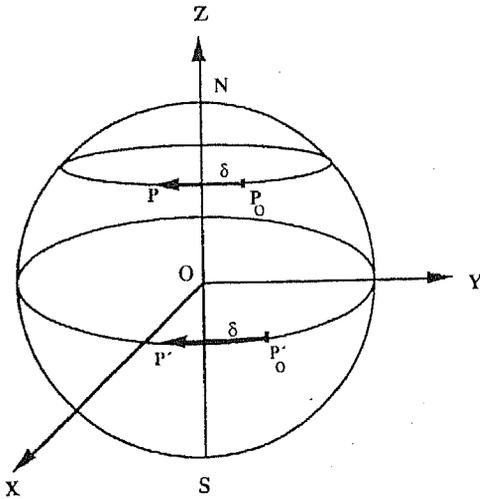
Para estudiar el efecto producido por un retardador (en general elíptico) sobre un haz incidente de luz polarizada, se produce de la siguiente forma (Fig. 3):

1. Se marcan en la esfera, tanto el punto P_0 que representa la polarización del haz incidente, como los puntos F y S que representan los vectores propios de los del retardador (ejes rápido y lento respectivamente).

2. Se realiza una rotación de eje FS y ángulo igual al retardo δ introducido por el retardador. El sentido de la rotación es contrario al de las agujas del reloj para un observador que mira desde F a S.



3. El punto P, que corresponde a la posición que tendría P_0 tras la rotación, representa la polarización del haz emergente.



(Fig. 4)

Es importante observar que el procedimiento indicado es también aplicable al caso en que la luz incidente sea parcialmente polarizada, ya que el retardador sólo afecta a la parte de luz totalmente polarizada, y deja invariante la parte de luz no polarizada. En consecuencia, la rotación afecta tanto a los puntos de la superficie de la esfera como a los interiores.

Un caso de especial interés es el de un retardador circular (rotor), es decir, un retardador cuyos vectores propios son de polarización circular dextro y levo respectivamente.

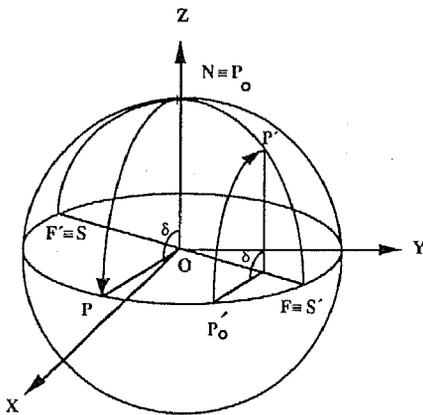
Un retardador circular actúa, como indica la Fig. 4, produciendo un giro de la esfera en torno al eje NS, por lo que transforma un vector incidente, en otro con la misma elipticidad y con un azimut incrementado en δ .

La acción de un retardador lineal de cuarto de onda ($d = p/2$), está representada en la Fig. 5, donde se indica la transformación de un estado de polarización circular ($N = P_0$) en otro de polarización lineal P.

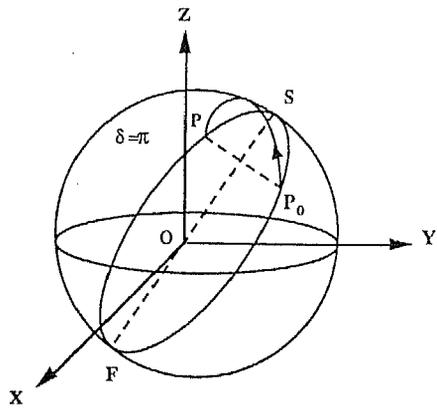
La transformación inversa muestra que no todo estado de polarización lineal, es convertido en otro de polarización circular.

La Fig. 6 muestra la acción de un retardador elíptico de media onda ($\delta = \pi$).

Si se traza el círculo máximo que pasa por el punto de entrada P_0 y por el de salida P, entonces la bisectriz del ángulo entre dichos puntos, determina los vectores propios del retardador.



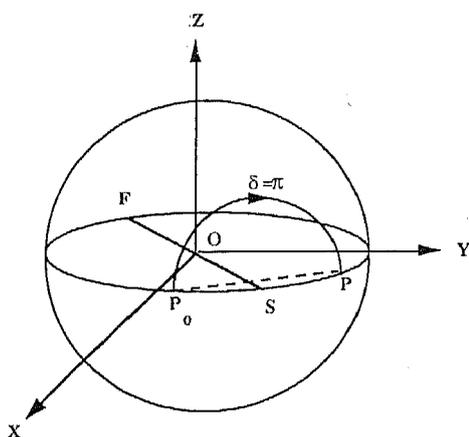
(Fig. 5)



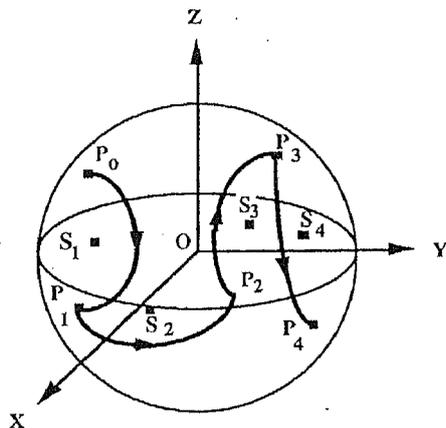
(Fig. 6)

La Fig. 7 muestra cómo un retardador lineal de media onda, transforma estados de polarización lineal en otros estados de polarización lineal, lo que equivale a una rotación del plano de vibración del vector campo eléctrico de la luz (rotor transcendente).

De forma general, si consideramos una sucesión de retardadores, un estado de polarización incidente evoluciona por medio de la composición sucesiva de los correspondientes giros, de forma que la trayectoria en la esfera de Poincaré se realiza manteniendo constante la distancia r al centro (Fig. 8).



(Fig. 7)



(Fig. 8)

Puesto que para cualquier combinación de rotaciones sucesivas, existe una única rotación que produce el mismo efecto, una serie de retardadores equivale a un único retardador en cuanto a sus efectos sobre la polarización de la luz.

4. POLARIZADORES

Consideremos en primer lugar un polarizador lineal total. Su vector propio de polarización forma un ángulo θ con el eje OX. Para un haz de luz incidente, de intensidad unidad, cuya elipse de polarización tiene azimut ψ y semiejes a y b , la intensidad del haz de luz emergente viene dado por:

$$I = a^2 \cos^2 (\theta - \psi) + b^2 \sin^2 (\theta - \psi) \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que:

$$a = \cos \omega \quad \text{y} \quad b = \sin \omega \quad (12)$$

la ecuación (11) puede escribirse:

$$I = 1/2 + 1/2 \cos 2\omega \cos 2(\psi - \theta) \quad (13)$$

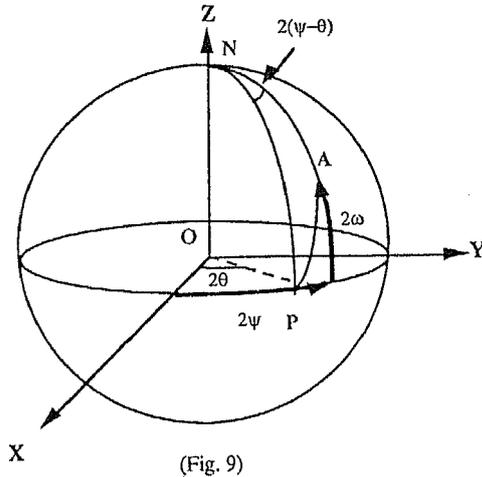
En la Fig. 9 se representa el vector propio del polarizador lineal (P), el estado de polarización del haz incidente (A) con azimut ψ y elipticidad ω .

Del triángulo esférico NPA se sigue:

$$\cos AP = \cos 2\omega \cos 2(\psi - \theta) \quad (14)$$

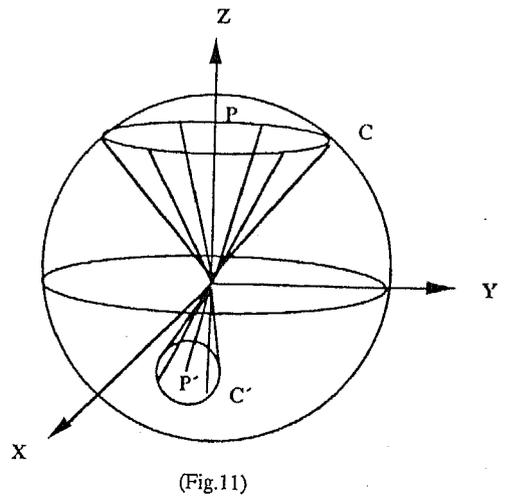
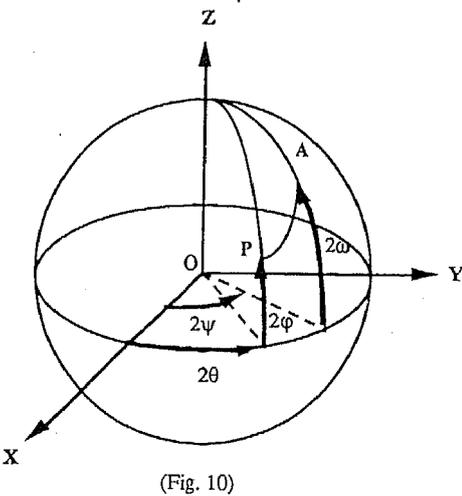
entonces (13) se puede expresar como:

$$I = \cos^2 AP / 2 \quad (15)$$



El resultado es válido incluso cuando el polarizador es elíptico. En este caso el vector nulo del polarizador se representa por un punto P ($2\theta, 2\phi$) que no está en el ecuador de la esfera (Fig. 10).

Otra consecuencia importante de la relación (15) es que, en la esfera de Poincaré, el lugar geométrico de los estados de polarización que emergen del polarizador lineal con la misma intensidad (para un mismo vector incidente), es una circunferencia cuyo centro está en el eje que une el centro de la esfera con el punto que representa el vector propio del polarizador (Fig. 11).



BIBLIOGRAFÍA

- Azzam, R.M.A. y Bashara, N.H., 1977. *Ellipsometry and Polarized Light*. N. Holland, Amsterdam.
- Bolinder, E.F. 1975. Comments on "Poincaré sphere representation of partially polarized fields" *IEEE Trans.* (AP-23), 747-748.
- Bourret, R. 1974. The depolarization of electromagnetic radiation in a random medium: Evolution of the Stokes parameters. *Opt. Acta* (21), 721-735.
- Cocke, W.J., Holm, D.A. 1972. Lorentz transformation properties of the Stokes parameters. *Nature* (London) *Phys. Sci.* (240), 161-162.
- Deschamps, G.A., MAST, P.E. 1973. Poincaré sphere representation of partially polarized fields" *IEEE Trans.* (AP-21), 474-478.
- Gantmacher, F.R. 1959. *Applications of Theory of Matrices*. Interscience Publishers, N.Y.
- Gil, J.J. 1983. Tesis doctoral. Departamento de Óptica. Fac. Ciencias. Universidad de Zaragoza.
- Gil, J.J. y Bernabeu, E. 1985. A depolarization criterion in Mueller matrices. *Optica Acta.* (32), 259-261.
- Gil, J.J. y Bernabeu, E. 1986. Depolarization and polarization indices of an optical system. *Optica acta* (33), 185-189.
- Gil, J.J. y Bernabeu, E. 1987. Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix. *Optik.* (76), 67-71.
- Jones, R.C. 1941. New calculus for the treatment of optical systems. I. *J. Opt. Soc. Am. A.* (31), 488-493.
- Kim, K., Mandel, L. y Wolf, E. 1987. Relationship between Jones and Mueller matrices for random media *J. Opt. Soc. Am.* (4), 433-437.
- Parke, N.G. 1949. Optical Algebra. *J. Math. Phys.* (13), 131-139.
- Poincaré, H. 1892. *Théorie Mathématique de la lumière* (Vol. 2). Gauthiers-Villars, Paris.
- Sekera, Z. 1966. Scattering matrices and reciprocity relationships for various representations of the state of polarization. *J. Opt. Soc. Am.* (56) 1732-740.
- Theocaris, P.S. y Gdoutos, E.E. 1979. *Matrix Theory of Photoelasticity*. Springer-Verlag, Berlín.
- Weeks, D.W. 1957. A study of sixteen coherency matrices. *J. Math. Phys.* N.Y. (13) 380-386.