DERIVACIONES SUCESIVAS

Por *Miguel Sánchez López*

RESUMEN

Se trata de sacar el máximo partido a un método tan conocido y antiguo como es el de las derivadas sucesivas en el tratamiento de las EDOS de primer orden, juntamente con el empleo de algunas formulas tipo Taylor, utilizadas en la consecución de los valores iniciales.

Abstract

The purpose si to extracta he máximum utility to the well known and old method of succesive derivatives in the treatment of O.D.E. (ordinary differential equations) of first order together with the employment of formulas like Taylor's, used to obtain initial values.

INTRODUCCIÓN

REPASANDO la historia de las EDOS, desde su inicio –Newton y Leibnitz– parece ser, como los matemáticos actuales, oscilando entre los métodos de W. E. Milne pródigos en diferencias finitas y los condensados Runge-Kutta, se han decantado para la resolución de las mismas, por los métodos R-K de orden superior al clásico de cuatro parámetros, reservando los restantes métodos, para aquellas ecuaciones susceptibles de ser resueltas mediante desarrollos en serie y por tanto derivarse repetidamente.

Nuestro objetivo, una vez elegido este segundo camino, es muy modesto y ha consistido en ir rebuscando en los ejemplos a nuestro alcance, aquellos aparentemente sencillos; esto es, sin la algarabía numérica y literal que tanto impone y tratar de resolverlos utilizando los métodos Taylorianos, llegando hasta la última derivada compatible con nuestro PC popular.

Pasar de esta derivada, en nuestro caso la decimoquinta, es comenzar con el chaqueteo de la maquina, y las no deseadas advertencias del caso.

Este deporte de conseguir altas derivadas, ha sido practicado por muchos autores, los cuales como es sabido, adoptan una EDO, quizás sencilla, como piedra de toque, sobre la cual ensayan y comprueban sus experiencias vividas en el campo matemático de las EDOS.

Así, el primer ejemplo con el cual tropecé hace ya bastantes años, fue con el cálculo de las derivadas sucesivas de la ecuación

$$y''=6.y^2$$

Viene en la *Introducción to a non Linear Diferencial and Integral Equinos*, by Harold T. Davis, donde llega hasta la decimoquinta sin utilizar el ordenador, lo cual sin duda pasará a la historia como un monumento a la buena artesanía derivadora.

Otro famoso de las EDOS, Peter Henrici, en su *Discrete Variable Method in Ordinary Diferencial Equinos*, invita al lector a resolver la inocente ecuación así la califica

$$y'=x^2+y^2$$

Apurando aún más la cosa, Lambert, en su *Computational Methods in Ordinary Diferencial Equinos*, insiste en la evaluación de las derivadas totales de

$$y'=\sqrt{x^2+y^2}$$

También Ramón E. Moore, en su *Automatica Analyis and Control of Error*, trata la tan trillada ecuación

$$y'=y^2$$

utilizando el álgebra de segmentos y las derivadas sucesivas.

Por otra parte, F. Ceschino y J. Kuntzmann, en su *Problemes Differentiels of Conditions Iniciales*, al referirse al empleo de la serie de Taylor, la ven raramente utilizable por el cálculo de las derivadas sucesivas que pronto se convierte en un cálculo inextricable.

Fox, en su *Numerical Solutions of Ordinary and Partial Differential*, dedica una mayor atención a los métodos taylorianos, de los que cuenta sus ventajas y señala los métodos de Wilson y Gibbons.

Finalmente, C. Meynart, en *Les series et leur application a la resolution de divers problemes pratiques d'analyse mathematique*, encuentra posibilidades inmensas en el estudio de las series, tanto para el cálculo integral como para la resolución de las EDOS donde proporciona soluciones de carácter general para toda ecuación diferencial de primer orden, cualquiera que sea sin señalar el laberíntico desarrollo que la abundancia de series proporciona.

DERIVADAS TOTALES

Materia ésta, muy conocida y tratada en todos los libros de Análisis y como objeto de nuestro estudio, se necesita una tabla lo más completa posible de las derivadas sucesivas más usuales con lo que se consigue un ahorro notable de tiempo y trabajo.

A continuación, damos cuenta de una de ellas, tomada parcialmente de los textos más completos en esa materia, como pueden ser el Numerical Analysis de J. Scarborough y la Interpolation de Steffensen.

Función	Derivadas
$y = A+B$	$y^{(n)} = A^{(n)}+B^{(n)}$
$y=A.B$	$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.A^{(j)}.B^{(n-j)}$
$y=A/B$	$y^{(n)}= (A^{(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}.y^{(j)}.B^{(n-j)})/B$
$y=e^{a.x}$	$y^{(n)}= e^{a-x}..a^n$
$y=A^x$	$y^{(n)} =A^x..(\ln A)^n$
$y=x^m$	$y^{(n)} =m.(m-1)....(m-n+1).x^{m-n}$
$y=x^{-m}$	$y^{(n)} =(-1)^n.\ m.(m+1)....(m+n-1)/x^{m+n}$
$y=Ln(X)$	$y^{(n)} =(-1)^{n-1}.(n-1)(!/x(^n$
$y=sen(x)$	$y^{(n)} =sen(x+n.\pi / 2)$

$y=\cos(x)$ $\qquad$ $y^{(n)}=\cos(x+n.\pi/2)$
$y=1/(a+b.x)$ $\qquad$ $y^{(n)}=(-1)n.n!.b^n/(a+b.x)^{n+1}$

La aplicación práctica de esta tabla viene indicada principalmente para aquellas EDOS de tipo polinómico en x e y de grado n, en las cuales pueda encontrarse fácilmente el algoritmo operativo de las derivadas sucesivas, que unido a la regla de Leibnitz sobre la derivada n-èsima del producto de dos funciones, facilita la programación de las mismas.

Veamos, entonces algunos ejemplos que nos ahorraran muchas palabras.

Ej. núm. 1:

Derivación sucesiva de la ecuación

$$y'=y^2 \text{ con } y(0)=1$$

Se puede escribir poniendo de relieve el producto

$y^{(1)}=y.y$ y aplicando el teorema de Leibnitz

$y^{(j+1)}=\sum_{h=0}^{j} \binom{j}{h}.\, y^{(h)}.y^{(j-h)}$ con lo que teóricamente la cuestión está resuelta: conocimiento de la derivada $y^{(j+1)}$ en función de todas las derivadas $y^{(0)}$...... $y^{(j)}$ de orden inferior, supuestamente conocidas y el de los números combinatorios $\binom{j}{h}$ a los cuales en lo sucesivo los designaremos por nc(j,h), a los efectos de programación y dimensionamiento.

Habrá, entonces que introducir en el inicio la primera derivada $y^{(1)}=y'=1$ así como todos los números combinatorios necesarios, para cuya confección hará falta una subrutina.

Resultado

$Y^{(1)}=1$

$Y^{(2)}=2$

$Y^{(3)}=6$

$Y^{(4)}=24$

$Y^{(5)}=120$

$Y^{(6)}=720$

$Y^{(7)}=5040$

$Y^{(8)}=40320$

$Y^{(9)}=362880$

$Y^{(10)}=3628800$

$Y^{(11)}=39916800$

$Y^{(12)}=479001300$

$Y^{(13)}=6227020800$

$Y^{(14)}=87178291200$

$Y^{(15)}=1307674368000$

El hecho de ser estas derivadas las obtenidas y citadas con gran admiración por nuestra parte por H. T. Davis, nos induce a reproducirlas y ver para creer, como S.to Tomás, el gran invento de los ordenadores.

La ecuación que considera Davis es la siguiente: $y''=6y^2+\lambda x$, pero como sólo consideramos las derivadas sucesivas, podemos rebajar el orden y simplificar para quedarnos en la conocida $y'=y^2$ con $y(0)=1$. Sus resultados aparecerán divididos por 6.

$Y'=y^2=1$

$Y''=2yy'=2$

$Y^{(3)}=2(yy''+y'^2)=6$

$Y^{(4)}=2(yy^{(3)}+3y'y'')=24$

$Y^{(5)}=2(yy^{(4)}+4y'y(3)+3y''2)=120$

$Y^{(6)}=2(yy^{(5)}+10y''y^{(3)}+5y'y^{(4)})=720$

$Y^{(7)}=2(yy^{(6)}+6y'y^{(5)}+15y''y^{(4)}+10(y^{(3)})2)=5040$

$Y^{(8)}=2(yy^{(7)}+7y'y^{(6)}+21y''y^{(8)}+35y^{(3)}y^{(4)})=40320$

$Y^{(9)}=2(yy^{(8)}+8y'y^{(7)}+28y''y^{(6)}+56y^{(3)}y^{(5)}+35(y^{(4)})2)=362880$

$Y^{(10)}=2(yy^{(9)}+9y'y^{(8)}+36y''y^{(7)}+84y^{(3)}y^{(6)}+126y^{(4)}y^{(5)})=3628800$

$Y^{(11)}=2(yy^{(10)}+10y'y^{(9)}+45y''y^{(8)}+120y^{(3)}y^{(7)}+210y^{(4)}y^{(6)}+126(y^{(5)})2)=$ 39916800

$Y^{(12)}=2(yy^{(11)}+11y'y^{(10)}+55y''y^{(9)}+165y^{(3)}y^{(8)}+330y^{(4)}y^{(7)}+462y^{(5)}y^{(8)})=$ 479001600

$Y^{(13)}=2(yy^{(12)}+12y'y^{(11)}+66y''y^{(10)}+220y^{(3)}y^{(9)}+495y^{(4)}y^{(8)}+792y^{(5)}y^{(7)}+46$ $2(y^{(6)})2)=6227020800$

$Y^{(14)}=2(yy^{(13)}+13y'y^{(12)}+78y''y^{(11)}+286y(3)y^{(10)}+715y(4)y^{(19)}+1287y^{(5)}$ $y^{(8)}+1716y^{(6)}y^{(7)})=87178291200$

Ejemplo 2:

$y'=x^2.y$ con $y(0)=1$

En este caso las derivadas sucesivas pueden calcularse directamente, sin las sumatorias y números combinatorios subsiguientes.

Así, derivando manualmente varias veces la ecuación del ejemplo, es fácil encontrar como

La derivada j-ésima toma la forma

$$Y^{(j)}= A(j).y^{(j-3)}+B(j).x.y^{(j-2)}+C(j).x^2.y^{(j-1)}$$

donde las constantes A(j), B(j), C(j) vienen determinadas por

$A(j)=A(j-1)+B(j-1)$ $B(j)=2.(j-1)$ $C(j)=1$ y en el inicio

$A(1)=0$ $B(1)=0$ $C(1)=1$

Las derivadas sucesivas serían

$Y^{(1)}=0$

$Y^{(2)}=0$

$Y^{(3)}=2$

$Y^{(4)}=0$

$Y^{(5)}=0$

$Y^{(6)}=40$

$Y^{(7)}=0$

$Y^{(8)}=0$

$Y^{(9)}=2240$

$Y^{(10)}=0$

$Y^{(11)}=0$

$Y^{(12)}=246400$

$Y^{(13)}=0$

$Y^{(14)}=0$

$Y^{(15)}=44844800$

Ejemplo 3:

En otros casos, la EDO tiene la forma

$(1-x^2).y'=$(2° miembro), en cuyo caso calculando manualmente la segunda derivada o sea

$-2.x.\ y'+(1-x^2).\ y''$ se tiene para las siguientes

(2) $A(J).\ y^{(j-1)}+B(j).\ x.\ y^{(j-1)}+C(j).\ (1-x^2).\ y^{(j+1)}=(2^{\circ}\ \text{miembro})^{(j)} = D^{(j)}$

donde $A(j)=A(j-1)+B(j-1)$ $\quad B(j)=B(j-1)-2$ $\quad C(j)=1-x^2$

y $A(2)=-2$ $\quad B(2)=-4$ $\quad C(j)=1$

Con lo que, sí la D^j del segundo miembro es factible, la (2) se encarga del cálculo de $y^{(j+1)}$.

Apliquémosla a la EDO

$(1-x^2).y'=x-x.y$ $\quad$ con $y(.5)=2$

resulta

$y^{(1)}=-.6666666666666666$

$y_{(2)}=-1.777777777777778$

$y^{(3)}=-3.555555555555555$

$y^{(4)}=-18.96296296296296$

$y^{(5)}=-126.4197530864197$

$y^{(6)}=-1137.777777777778$

$y^{(7)}=-12389.13580246914$

$y^{(8)}=-160468.8065843621$

$y^{(9)}=-2397592.757201646$

$y^{(10)}=-40652097.66803841$

$y^{(11)}=-770669797.896662$

$y^{(12)}=-16155454062.73434$

$y^{(13)}=-371024129958.7258$

$y^{(14)}=-926442073940.109$

Ejemplo 4:

$y'= (y-x)/(y+x)$ $\quad$ con $y(0)=1$

Consideramos las nuevas funciones $y_1=y-x$ $\quad y_2=y+x$ $\quad$ cuyas derivadas sucesivas serían

$y_1' = y'-1$ $\qquad\qquad y_2'=y'+1$

$y_1'' = y''$ $\qquad\qquad$ $y_2'' = y''$

.... $\qquad\qquad$ ....

$y_1^{(j)} = y^{(j)}$ $\qquad\qquad$ $y_1^{(j)} = y^{(j)}$

($\forall$ >1 y la ecuación se transformaría en

$$y'.y_2 = y_1$$

y derivando j veces

$$\sum_{h=0}^{h=j} nc(j.h.).y^{(h+1)}.y_2^{(j-g)} = y_1^{(j)}$$

aislando ahora en la sumatoria, el termino correspondiente al valor h=j, tendremos la formula iterativa

$$y^{(j+1)} = (y_2^{(j)} - \sum_{h=1}^{j} \binom{j}{h}.y^{(h+1)}.y_2^{(j-h)} + y_1^{(j)})/y_2^{(j)}$$

que resuelve la cuestión.

Resultado

$y' = 1$

$y'' = -2$

$y^{(3)} = 8$

$y^{(4)} = -60$

$y^{(5)} = 640$

$y^{(6)} = 8840$

$y^{(7)} = 149760$

$y^{(8)} = -3004400$

$y^{(9)} = 69632000$

$y^{(10)} = -1830535200$

$y^{(11)} = 53815091200$

$y^{(12)} = -1749359268800$

$y^{(13)} = 62301693542400$

$y^{(14)} = -2412339909200000$

Ejemplo 5:

Sea la ecuación

$y' = sqr((1-x^2)/(1-y^2))$ $\qquad$ con $y(0)=.5$

Elevando al cuadrado y considerando las nuevas funciones

$y_2 = 1 - y^2 \qquad y_{12} = (y')^2 \qquad x_2 = 1 - x^2$

La ecuación se convierte en

(1) $\qquad x_2 = y_{12} . y_2$

y derivando j veces

$$x_2^{(j)} = \sum_{h=0}^{j} \binom{j}{h} . y_{12}^{(h)} . y_2^{(j-h)}$$

en la cual aparecen las derivadas de las nuevas funciones cuyas subrutinas serían las siguientes

subrutina de x_2

$x_2 = 1 - x^2$
$x_2^{(1)} = -2.x$
$x_2^{(j)} = 0 \qquad \forall\, j > 2$

subrutina de y_2

$y_2 = 1 - y^2$

$y_2^{(1)} = -2.y.y'$

$$y_2^{(j+1)} = -2. \sum_{h=0}^{j} nc\,(j,h) . y^{(h)} . y^{(j-h)} = -2.y.y^{(j)} - 2. \sum_{h=1}^{j} nc(j,h) . y^{(h)} . y^{(j-h)}$$

subrutina de y_{12}

$y_{12} = y^{(1)} . y^{(1)}$

$$y_{12}^{(j)} = 2.y^{(1)}.y^{(j+1)} + \sum_{h=1}^{h=j-1} nc(j,h)\ .y^{(h+1)}.y^{(j-h+1)}$$

sustituyendo estas ecuaciones en (1) y para j>2 se tiene una ecuación que permitirá calcular $y^{(j+1)}$.

Resultados

$Y^{(1)} = 1.154700538379251$

$Y^{(2)} = 0.888888888888888$

$Y^{(3)} = 3.635168361564311$

$Y^{(4)} = 31.7366255l440329$

$Y^{(5)}$= 338.3145861342742

$Y^{(6)}$= 4793.639993903368

$Y^{(7)}$= 82307.36985172227

$Y^{(8)}$= 1678363.888070259

$Y^{(9)}$= 39546494.05855191

$Y^{(10)}$=1058179222.959088

$Y^{(11)}$=31693780298.43842

$Y^{(12)}$=1050588166393.458

$Y^{(13)}$=38184485776907.8

$Y^{(14)}$=1509989158876579

$Y^{(15)}$=6.454289581306373D+16

Podríamos seguir con otros ejemplos, y mostrar la polimorfia de que gozan las derivaciones sucesivas, pero existe una cuestión fundamental:

¿Son fiables estos resultados?

Tenemos al menos dos caminos, para cerciorarnos de su veracidad.

Uno, la comprobación manual de las respectivas derivaciones, lo cual acarrearía seguramente un gran dolor de cabeza y otro consistente en utilizar los resultados obtenidos en la resolución de una EDO conocida, que necesite de esas derivadas y constatar así su fiabilidad.

DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

Cuando los métodos anteriores del calculo de las derivadas sucesivas de una determinada función se complican extraordinariamente, queda aun la esperanza de conseguir lo que se busca, que no es ni más ni menos que lograr lo que pudiéramos llamar un binomio de Leibnitz por su analogía con el binomio de Newton, utilizando la derivación de las funciones implícitas, esto es partiendo de

$Y'=f(x,y)$ continuar con

$Y''=f_x+ f_y.f$

$Y^{(3)}=f_{xx}+2.f_{xy}.f+f^2.f_{yy}+f_x.f_y +f_y^2$

....

y llegar así hasta conseguir un desarrollo laberíntico. Hay pues que ordenarlo y para ello necesitamos una nueva notación en lo que sigue: los sub y superíndices aparte de ser molestos para escribirlos, no son tampoco los más adecuados para el calculo numérico con el ordenador de que gozamos.

Proponemos entonces la siguiente:

$F(L,M,N)=d^{(L)}/dx^{(L)}\partial^{(M)}/\partial x^{(M)}\partial^{(N)}/\partial y^{(N)}$

cuyo significado sería, la derivada total L-ésima,de la derivada parcial M-ésima respecto de x, de la derivada parcial N-ésima respecto de y de la función

$y'=f(x,y)=F(0,0,0)$

Con esta notación, si $f(x,y)=x^2+y^2+2.x.y$ se tendrá

$F(0,0,0)=f(x,y)$;$F(1,0,0)=2.x+2.y.y'+2.y+2.x.y'=y''$

$F(1,0,1)=2.y'+2$: $F(1,1,0)=2+2.y'$;$F(1,1,1)=0$

$F(2,0,0)=y'''$ ....$F(n,0,0)=y^{(n+1)}$, etc.

En cuanto a los restantes valores de F(L,M,N) es válida la siguiente fórmula

$$F(L,M,N)=F(0,L+M,N)+\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}.F(h,0,0).F(j-h.L+M-j-1,N+1)$$

Cuya obtención, caso de interesar, fue la siguiente:

Aplicando la regla de la derivación de las funciones compuestas, se tiene

$F(L,M,N)=D^{(L)}F(0,M,N)=D^{(L-1)}D^{(1)}F(0,M,N)=$

$D^{(L-1)}[F(0,M+1,N)+F(0,M,N+1).y']$

Variando L y encadenando estas identidades, tenemos

$D^{(L)}F(0,M,N)=D^{(L-1)}F(0,M+1,N)+D^{(L-1)}[F(0,M,N+1).y']$

$D^{(L-1)}F(0,M+1,N)=D^{(L-2)}F(0,M+2,N)+D^{(L-2)}[F(0,M+1,N+1).y']$

$D^{(L-2)}F(0,M+2,N)=D^{(L-3)}F(0,M+3,N)+D^{(L-3)}[F(0,M+2,N+1).y']$

....

$D^{(2)}F(0,M+L(\ 2,N)=D^{(1)}F(0,L+M\ (\ 1,N)+D^{(1)}[F(0,L+M\ (2,N+1).y']$

$D^{(1)}F(0,M+L\ (\ 1,N)=D^{(0)}F(0,M+L,N)+D^{(0)}[F(0,M+L(\ 1,N+1).y']$

Sumando y simplificando, se tiene

$$F(L,M,N)=F(0,L+M,N)+\sum_{j=0}^{L-1} D^{(j)}[F(0,M+L-j-1,N+1).y']$$

Aplicando el binomio de Leibnitz, queda

$$F(L,M,N)=F(0,L+M,N)+\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}.D^{(h)}.y'.D^{(j-h)}.F(0,L+M-j-1,N+1)$$

Y teniendo en cuenta que $y'=F(0,0,0)$ y por tanto $D^{(h)}y'=F(h,0,0)$, finalmente se tiene

$$(1)\quad F(L,M,N)=F(0,L+M,N)+\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}.F(h,0,0).F(j-h,L+M-j-1,N+1)$$

La programación de esta fórmula no es difícil y sirve para obtener los valores numéricos de cualquier derivada mixta F(L,M,N), siempre que se conozcan las F(0,M,N) necesarias.

Es por lo que el input de su programa debe contener TODOS los valores de las F(0,M,N) obtenidos a partir de y' y que sean claro está distintos de cero.

Entonces, si queremos obtener los valores numéricos de las derivadas

F(1,0,0), F(2,0,0)......F(L,0,0)

necesarias para cualquier desarrollo Tayloriano es preciso ordenar las F(L,M,N) sucesivas, partiendo de la F(1,M,N) cuyas derivadas son del tipo F(0,M,N) ya conocidas por el input y llegar así, hasta la prevista F(L,0,0).

En lo que sigue tratamos de conseguir hasta la undécima derivada $y^{(11)}=F(10,0,O)$ y no de un orden mayor como en las totales, cuyo tope estaba en él de la doble precisión, porque nuestro PC, por lo que sea no admite variables con tres subíndices y un dimensionado mayor que diez, lo que le hace perder atractivo a la formula (1).

Así, pues, empezamos con la F(1,0,0), la cual no necesita de ninguna F(L,M,N); le basta con las F(0,0,1) y F(0,1,0) ya introducidas en el input junto con la básica F(0,0,0).

La F(2,0,0), necesita además de las anteriores, a la F(1,0,1).

La F(3,0,0), a las

F(1,0,2), F(1,1,1) y F(2,0,1)

La F(4,0,0), a las

F(1,0,3), F(1,1,2), F(1,2,1)

F(2,0,2), F(2,1,1)

F(3,0,1)

Enseguida se observa, como las derivadas mixtas necesarias para la consecución de F(1,0,0), F(2,0,0), F(3,0,0) y F(4,0,0), aparte de las utilizadas en las F(0,J,K) supuestamente conocidas por el input, son tales que la suma de los índices

L+M+N = a la L del F(L,0,0) correspondiente.

Además los indicativos L y N son distintos de cero.

De aquí, a generalizar esta regla, no hay más que un paso, aunque para su demostración no faltará un lector con tiempo y talante para ello.

Nosotros, hemos calculado las restantes derivadas sobre la base de estas hipótesis, las hemos comparado con las obtenidas siguiendo otros métodos y la comprobación ha sido perfecta.

Con todo lo cual siguiendo la costumbre hemos pergeñado el correspondiente diagrama de flujo con el cual se han obtenido los resultados que siguen.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$Y'=F(0,0,0)=x+y \quad y(0)=1$	$y'=F(0,0,0)=x.y^2-y \quad y(0)=1$
$Y=1$	$y=1$
$Y'=1$	$y'=-1$
$Y''=2$	$y''=2$
$Y^{(3)}=2$	$y^{(3)}=-6$
$Y^{(4)}=2$	$y^{(4)}=24$
$Y^{(5)}=2$	$y^{(5)}=-120$
$Y^{(6)}=2$	$y^{(6)}=720$
$Y^{(7)}=2$	$y^{(7)}=-5040$

$Y^{(8)}=2$	$y^{(8)}=40320$
$Y^{(9)}=2$	$y^{(9)}=-362880$
$Y^{(10)}=2$	

Ejemplo 3	Ejemplo 4
$Y'=y.y \quad y(0)=1$	$y'=1-y/x \quad y(2)=2$
$Y=1$	$y=2$
$Y'=1$	$y'=0$
$Y''=2$	$y''=.5$
$Y^{(3)}=6$	$y^{(3)}=-.75$
$Y^{(4)}=24$	$y^{(4)}=1.5$
$Y^{(5)}=120$	$y^{(5)}=-3.75$
$Y^{(6)}=720$	$y^{(6)}=11.25$
$Y^{(7)}=5040$	$y^{(7)}=-39.375$
$Y^{(8)}= 10320$	$y^{(8)}=157.5$
$Y^{(9)}=362850$	$y^{(9)}=-708.75$

A continuación y como figuras 1,2 y 3,damos el organigrama correspondiente al ejemplo 2, (fig. 1), así como las subrutinas necesarias para la obtención de los números combinatorios ncom y otra para el cálculo de la ecuación (1) o FLMN.

Enseguida se observa como las únicas derivadas introducidas son las parciales del tipo F(0,M,N) y derivar parcialmente indudablemente es más llevadero que las derivadas totales.

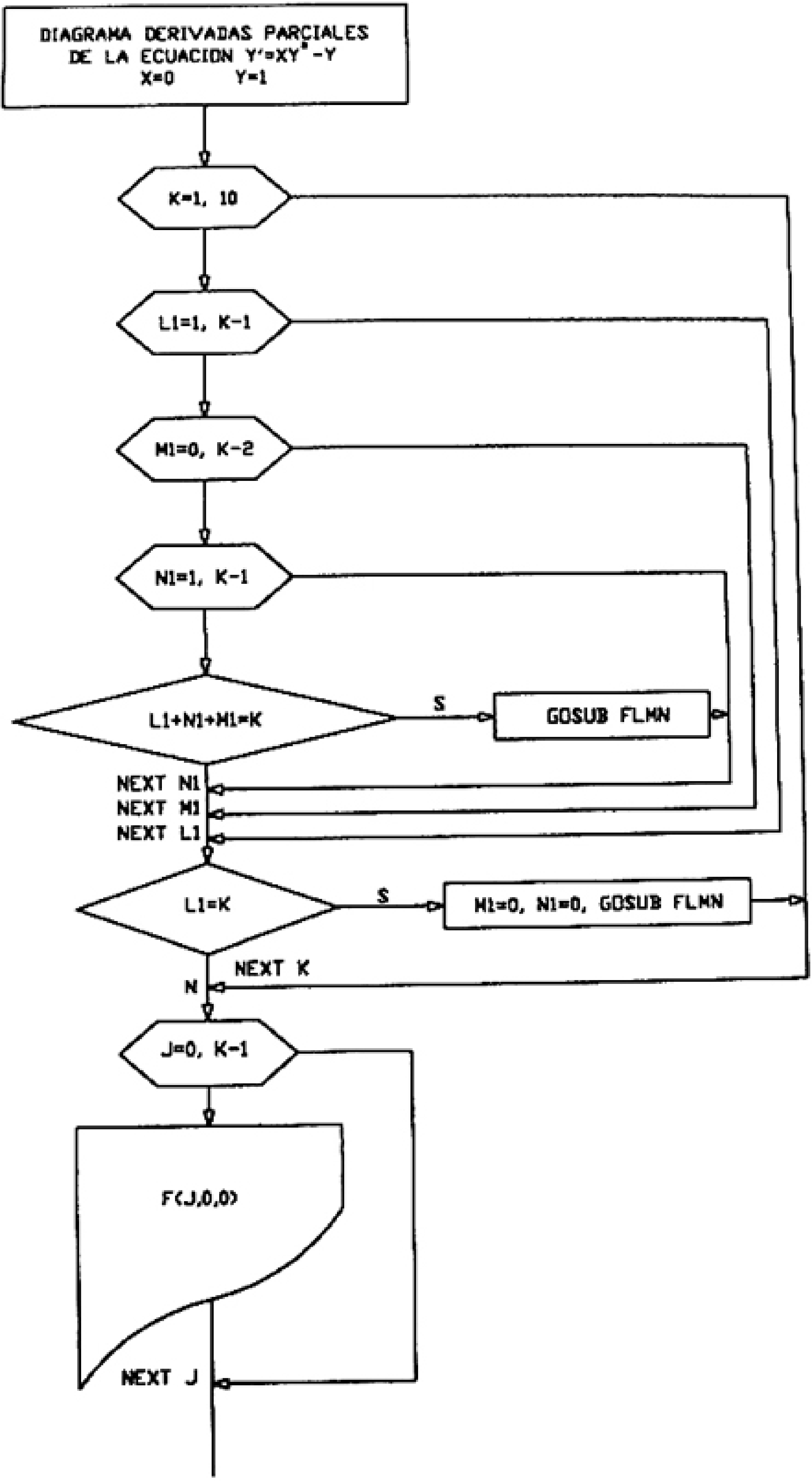
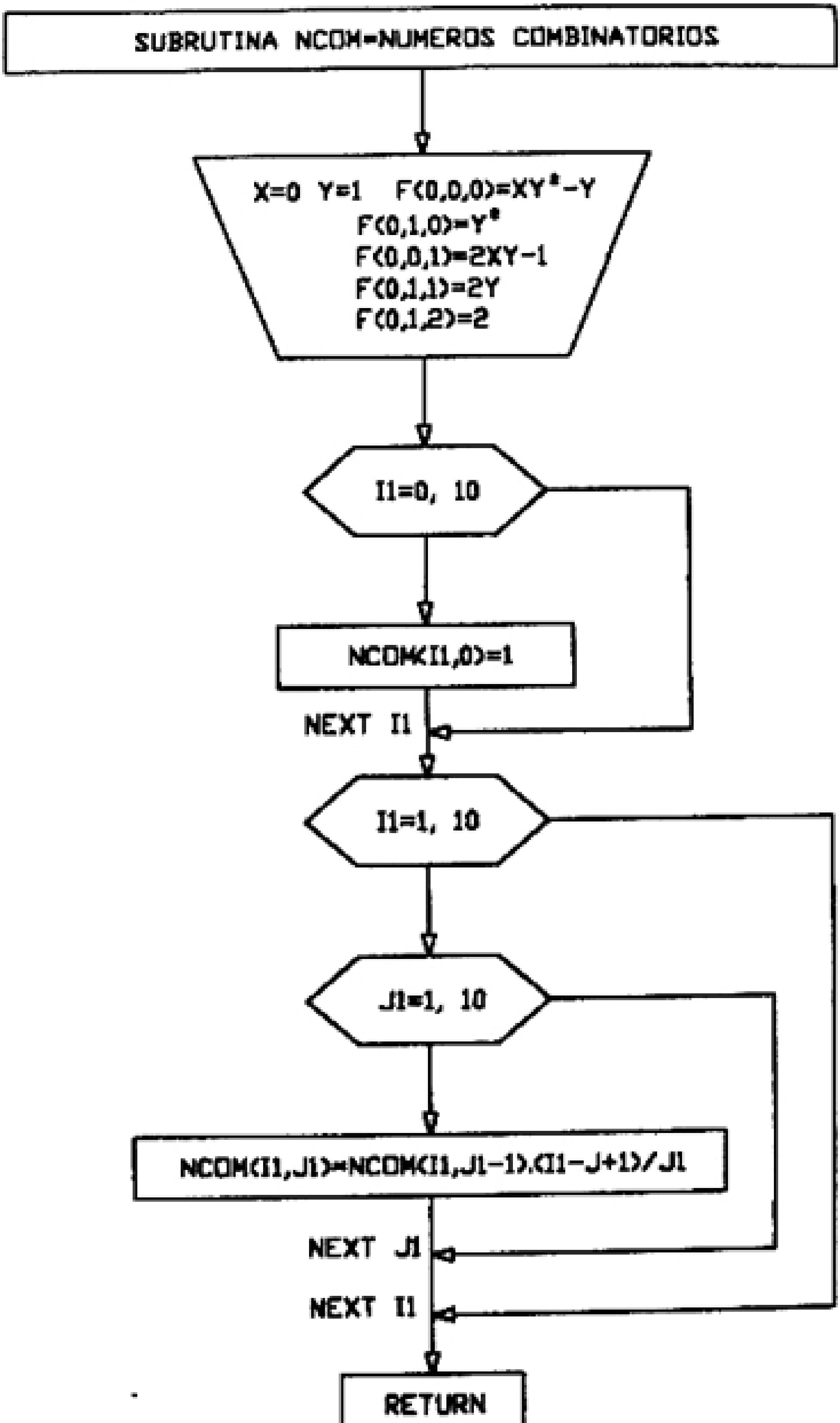
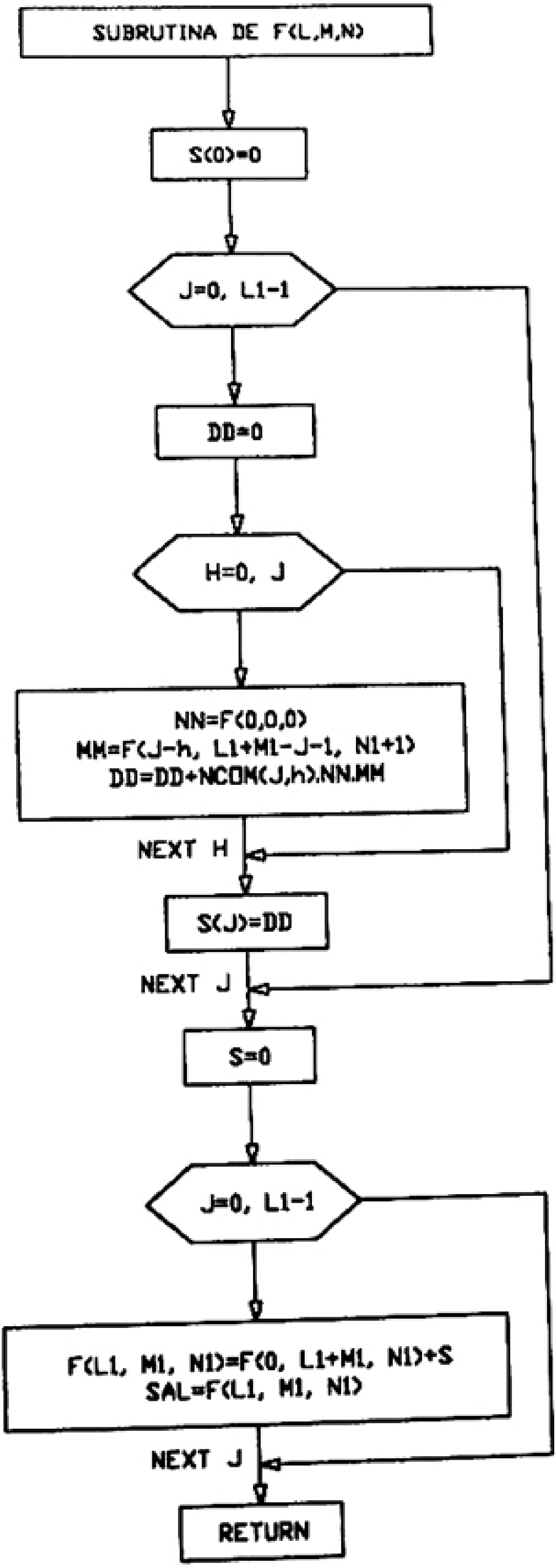


DIAGRAMA DERIVADAS PARCIALES
DE LA ECUACION Y'=XY²-Y
X=0 Y=1
K=1, 10
L1=1, K-1
M1=0, K-2
N1=1, K-1
L1+N1+M1=K
S
GOSUB FLMN
NEXT N1
NEXT M1
NEXT L1
L1=K
S
M1=0, N1=0, GOSUB FLMN
NEXT K
N
J=0, K-1
F(J,0,0)
NEXT J


SUBRUTINA NCOM=NUMEROS COMBINATORIOS
X=0 Y=1 F(0,0,0)=XY²-Y
F(0,1,0)=Y²
F(0,0,1)=2XY-1
F(0,1,1)=2Y
F(0,1,2)=2
I1=0, 10
NCOM(I1,0)=1
NEXT I1
I1=1, 10
J1=1, 10
NCOM(I1,J1)=NCOM(I1,J1-1).(I1-J+1)/J1
NEXT J1
NEXT I1
RETURN


SUBRUTINA DE F(L,M,N)
S(0)=0
J=0, L1-1
DD=0
H=0, J
NN=F(0,0,0)
MM=F(J-h, L1+M1-J-1, N1+1)
DD=DD+NCOM(J,h).NN.MM
NEXT H
S(J)=DD
NEXT J
S=0
J=0, L1-1
F(L1, M1, N1)=F(0, L1+M1, N1)+S
SAL=F(L1, M1, N1)
NEXT J
RETURN

DESARROLLOS TAYLORIANOS

Es sabido, como al intentar resolver una EDO

$y' = f(x,y)$

que por otra parte cumple todos los requisitos tratados en los teoremas existenciales, el primer objetivo es la consecución, lo más aproximada, de uno o varios valores iniciales, paras luego continuar con los clásicos de Basford-Adam, los Runge-Kutta de gran potencia o simplemente una solución analítica.

Para el inicio, están indicados los desarrollos en serie y dado el gran numero de las derivadas obtenidas sucesivamente, optamos por los desarrollos en serie de Taylor.

Fórmula de Taylor.

El teorema de Taylor establece que si están definidas las derivadas sucesivas de la función f(x) en el intervalo [a,x],o sean las

$y', y'', y^{(3)}........y^{(n)}, y^{(n+1)}$

se verifica

$$y(x)=y(a)+y'(a).(x-a)+y''(a).(x-a)^{(2)}/2!+.....y^{(n)}.(x-a)^{(n)}/n!+R_n(x)$$

donde R_n o resto del desarrollo puede tener distintas formas –Cauchy, Lagrange– y la que nos interesa o resto integral

$$R_n=\int_a^x y^{(n+1)}(t).(x-t)^n.dt/n!$$

Suele también escribirse en la forma

$$y(0+h)=y(0)+y'(0).h/1!+y''(0).h^2/2!+.....y^{(n)}(0).h^n/n!+\int_{t=0}^{h} y^{(n+1)}(t).(h-t)^n.dt/n!$$

Entonces la fórmula de Taylor, consta de un polinomio perfectamente conocido y de una integral que debe ser muy difícil de calcular, «de locura» definen algunos autores el tal intento.

Pero eso no impide que se puedan hallar cotas de su valor aumentando el número de derivadas y por tanto el número de términos del polinomio de Taylor.

El hecho de ser el integrando un producto de dos factores nos induce a utilizar una versión del teorema de la media, dada por Dirichlet.

Esta versión es

$$\int_a^b u(x).p(x).dx=u(\xi).\int_a^b p(x).dx$$

que aplicada al resto integral, se convierte en

$$R_{n+1}= y^{(n+1)}(\xi).\int_a^h (h-t)^n.dt = y^{(n+1)}(\xi).[-(h-t)^{n+1}(n+1)!] \quad \text{con } h \geq \xi \geq 0$$

Y más breve $\xi=\theta.h$ con $1 \geq \theta \geq 0$

$R_{n+1}= y^{(n+1)}(\theta.h).h^{n+1}/(n+1)!$

Considerando los valores extremos del parámetro θ, 0 y 1,tendremos dos fórmulas de Taylor y_1 e y_2 entre las cuales debe situarse el valor exacto de y. Claro está que se supone que la función y(x) es monótona en el intervalo [o, h]. Estas fórmulas son la clave de un método que a la vez que comprueba la fiabilidad de las derivadas utilizadas resuelve con cierta aproximación la EDO en cuestión.

Son estas

$$(1) \qquad y_1(h)=\sum_{j=0}^{j=n} y^{(j)}(0).h^j/n(+y^{(n+1)}(0).h^{n+1} / (n+1)!$$

$$(2) \qquad y_2(h)=\sum_{j=0}^{j=n} y^{(j)}(0).h^j /n! + y^{(n+1)}(h).h^{n+1}/(n+1)!$$

actuaría la (1) como predictora, ya que todos sus elementos son conocidos y la (2) como correctora.

En cuanto al detalle de cómo utilizar una y otras, nos referimos al organigrama adjunto que nos ha servido para la confección de los ejemplos resueltos.

En él, se observa que terminamos el proceso cuando el error=ER

$Re = Abs(Y_1 - Y_2) < 10^{-16}$

Puesto que valores inferiores no serian acusados, por la doble precisión en la que se supone estamos trabajando.

Además, cuando Re sea mayor que 10^{-16}, puede ocurrir que al no tener en cuenta los errores de redondeo obtenidos en el calculo de las derivadas, el Re teórico sea inferior al real en uno o dos dígitos.

Así, tomando como ejemplo la EDO

$y'=(1+y^2)/(1+x^2)$ con $y(0)=1$ y $h=.1$

lo primero sería comprobar la monotonía de las derivadas en el intervalo inicial [0,h],como se ve a continuación

DERIVADAS INICIALES	DERIVADAS FINALES
$Y' = 2$	$Y' = 2.267....$
$Y'' = 4$	$Y'' = 4.823.....$
$Y^{(3)}= 12$	$Y^{(3)}= 15.410....$
$Y^{(4)}= 48$	$Y^{(4)}=62.641.....$
$Y^{(5)}= 240$	$Y^{(5)}= 349.439...$
$Y^{(6)}= 1440$	$Y^{(6)}= 2232.345...$
$Y^{(7)}= 10080$	$Y^{(7)}= 13328.951...$
$Y^{(8)}= 80640$	$Y^{(8)}= 141734.031...$
$Y^{(9)}= 725760$	$Y^{(9)}= 1358193.669...$
$Y^{(10)}= 7257600$	$Y^{(10)}= 14461466.030...$
$Y^{(11)}= 79833600$	$Y^{(11)}= 169350128.062..$
$Y^{(12)}= 958003200$	$Y^{(12)}= 2164199305.266..$
$Y^{(13)}= 12454041600$	$Y^{(13)}= 29956451823.191..$
$Y^{(14)}= 1743565822400$	$Y^{(14)}= 446550917234.238$
$Y^{(15)}= 1743565822400$	$Y^{(15)}= 446550917234.238$

La solución viene da por

$$Y_1= 1.222222222222222$$
$$Y_E= 1.222222222222222$$
$$Y_2= 1.2222222222223$$

con 13 dígitos coincidentes.

El Runge-Kutta proporciona

$$Y_R= 1.22222313634945$$

Se podría mejorar los resultados, bien aumentando el numero de derivadas, lo cual no cabe en este caso, o recortar el paso h.

Reduciéndolo h=.06 obtendríamos

Y_1= 1.127659574468085
Y_e= 1.127659574468085
Y_2= 1.127659574468085
E_R= 0
Y_R= 1.127659608689788

En resumen, hemos llegado a la conclusión de que tomando un paso h apropiado, las tres Y-es Y_1, Y_E, Y_2 coinciden con lo cual el error R_e de Y_E será el debido al cálculo de Y_1 y puesto que

$$Y_1=\sum_{j=0}^{n+1} h^j.y^{(j)}(0)/j!$$

Cuando la serie parcial tengan todos sus términos con el mismo signo, en el calculo del error de Y_1 aparecerán n+1 términos del tipo

$h^j.y^{(j)}(0)/j!$

en los cuales las derivadas $y^{(j)}(0)$ son a su vez, sumas del tipo

$nc(j,h).y^{(h)}(0).y^{(j-h)}(0).$

con lo cual, el calculo se hace muy laborioso.

En cambio, si la serie es alternada se sabe que el error de una suma parcial de tal serie es menor que el primer termino despreciado

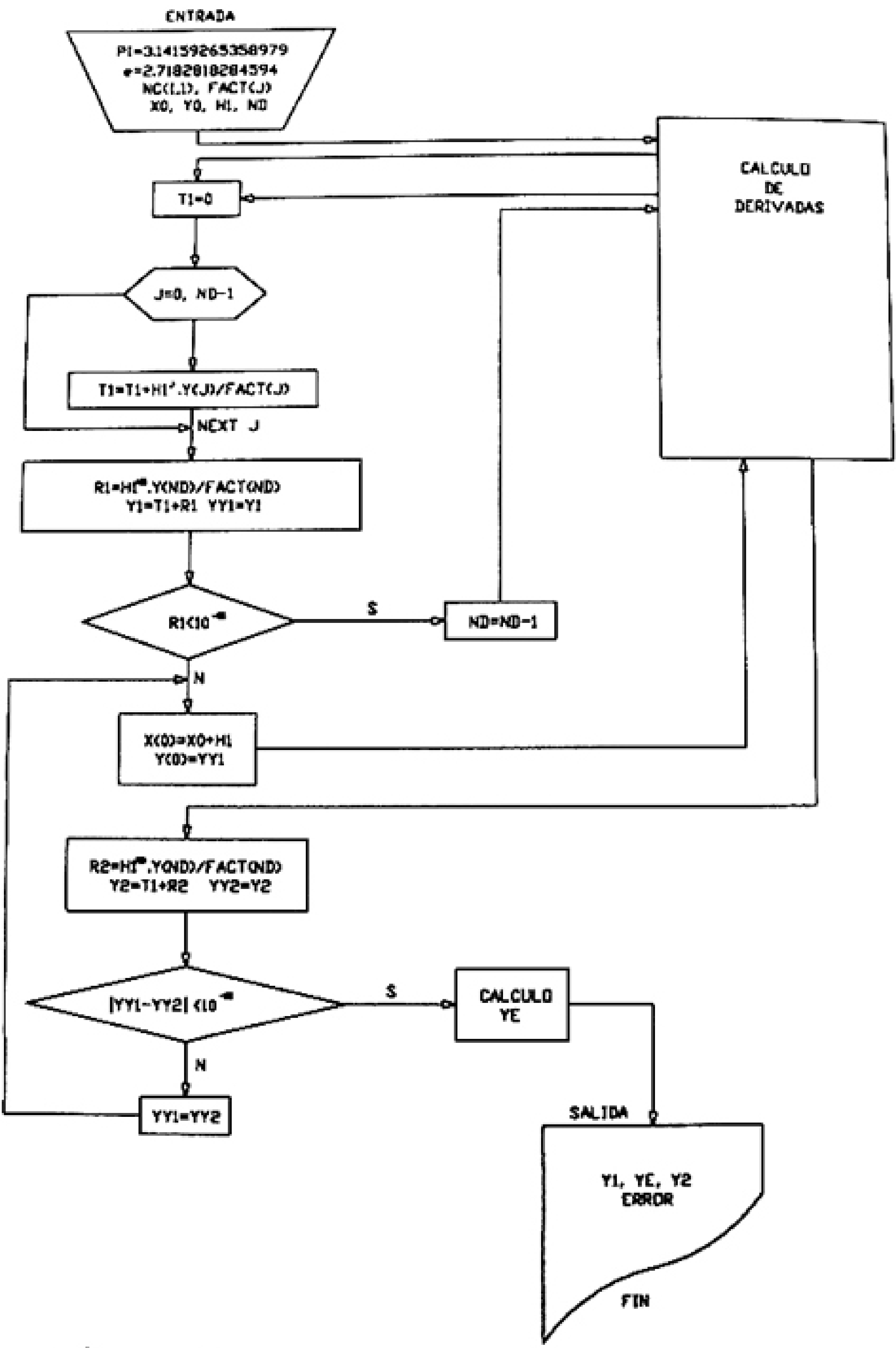
$E_R< h^{n+2}.y^{(n+2)}(0)/(n+2)!$

Derivadas nulas. Es interesante la observación de las sucesivas derivadas, pues a veces, a partir de una, la r-ésima de ellas, todas las siguientes son nulas, lo cual señala como solución un polinomio de grado r-1, salvo que alguna de ellas a partir de la décimo sexta y por tanto invisible no lo fuera.

Como por otra parte el desarrollo de Y_1 es el mismo que el de Y_e, bastara con calcular r-1 derivadas, sin hacer uso además de las Y_2 correspondiente y facilitarse la programación.

EJEMPLOS RESUELTOS

Como ya se hizo constar en el comienzo, el objetivo que nos guiaba, era rebuscar posibles EDOS, susceptibles de ser resueltas utilizando la técnica descrita de las derivaciones sucesivas y comprobar de paso cómo su número es mayor de lo que a primera vista pudiera creerse.



NC(J,I)= $\binom{J}{I}$ ND=Nº DERIVADAS
FACT(J)=J!

Entonces, para su comprobación necesitamos a la par que la EDO, la solución exacta Ye de la misma, so pena de vivir el engorroso interrogatorio, que tratamos de evitar; de otra manera no dar cumplimiento a uno de los famosos dichos que G. Polya en su libro *Como plantear y resolver problemas* atribuye al viejo y distraído profesor tradicional de matemáticas. Lo transcribimos textualmente: «Para resolver esta ecuación diferencial, no tienen más que mirarla, hasta que se les ocurra la solución».

Es de suponer, que en esos momentos de mironeo, el mirón iría pensando en si la EDO es homogénea, o si tiene las variables separadas, o si posee un factor integrante, etc., etc., y seguro que hasta en la cuadratura final que tampoco es moco de pavo.

Así, pues, tan sólo hemos pensado, en dar soluciones numéricas en lugar de fórmulas explícitas o implícitas.

Se han seleccionado, por tanto, dentro de los muchos trabajados, ejemplos completamente arbitarios, según el homor del día, tomados de las obras reseñadas en la bibliogrfía y se han resuelto siguiendo el diagrama de la figura 4, no obstante pudieran presentarse situaciones incómodas, nada infrecuentes cuando la fecha de jubilación esté ya olvidada.

Por ejemplo, cuando creamos existe algún error, en las derivadas sucesivas habría que calcular entonces, manualmente las dos o tres primeras deriivadas y si ambos resultados artesanal e informático, coinciden debe creerse en la bodad de la solución informática en su conjunto.

También, puede presentarse algún error en las subrutinas que den los números combinatorios, o las factoriales o simplemente que alguna variable no esté includia en la doble precisión, etc. Todos estos extravíos ocasionan molestias y pérdida de tiempo.

Ejemplo 1:

MUR195 X.Y' =4.(Y – SQR(Y)) ;Y(1)=1 h= .1

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
Y'=0		Y1=1
Y''=0		YE=1
$Y^{(3)}$=0		Y2=1
$Y^{(4)}$=0		
$Y^{(5)}$=0		
$Y^{(6)}$=0		
$Y^{(7)}$=0	$YE=(C.X^2 + 1)^2$ C=0	

$Y^{(8)}=0$
$Y^{(9)}=0$
$Y^{(10)}=0$
$Y^{(11)}=0$
$Y^{(12)}=0$
$Y^{(13)}=0$
$Y^{(14)}=0$
$Y^{(15)}=0$

Ejemplo 2:
KAM521 $(Y')^3 + X.Y' - Y=0$;$Y(0)=1$ h=.1

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=1$		Y1=1.100000001490116
$Y''=0$		YE=1.100000001490116
$Y^{(3)}=0$		Y2=1.100000001490116
$Y^{(4)}=0$		
$Y^{(5)}=0$		
$Y^{(6)}=0$		
$Y^{(7)}=0$	$YE=C.X+C^3$ C=1	
$Y^{(8)}=0$		
$Y^{(9)}=0$		
$Y^{(10)}=0$		
$Y^{(11)}=0$		
$Y^{(13)}=0$		
$Y^{(14)}=0$		
$Y^{(15)}=0$		

Ejemplo 3:
KAPLAN5 $Y'=X.EXP(Y^2)$; $Y(0)=1$ h=.1

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=1$		Y1=1
$Y''=0$		YE=1
$Y^{(3)}=0$		Y2=1
$Y^{(4)}=0$		
$Y^{(5)}=0$		
$Y^{(6)}=0$		
$Y^{(7)}=0$	YE=X+1	
$Y^{(8)}=0$		

$Y^{(10)}=0$
$Y^{(11)}=0$
$Y^{(12)}=0$
$Y^{(13)}=0$
$Y^{(14)}=0$
$Y^{(15)}=0$

Ejemplo 4:
KAM386 $(Y')^2 + X^3.Y' - 2.X^2.Y=0;$ $Y(1)=1$ h=.1

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=1$		Y1=1.105000001639128
$Y''=1$		YE=1.105000001639128
$Y^{(3)}=0$		Y2=1.105000001639128
$Y^{(4)}=0$		
$Y^{(5)}=0$		
$Y^{(6)}=0$		
$Y^{(7)}=0$	$YE=(1+X^2)/2$	
$Y^{(8)}=0$		
$Y^{(9)}=0$		
$Y^{(11)}=0$		
$Y^{(12)}=0$		
$Y^{(13)}=0$		
$Y^{(14)}=0$		
$Y^{(15)}=0$		

Ejemplo 5:
LAMBERT $Y'=4.X.Y^{1/2};$ $Y(1)=1$ h=.1

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=4$		Y1= 1.4641
$Y''=12$		YE=1.4641
$Y^{(3)}=24$		Y2=1.4641
$Y^{(4)}=24$		
$Y^{(5)}=0$		
$Y^{(6)}=0$		
$Y^{(7)}=0$	$YE=X^4$	
$Y^{(8)}=0$		
$Y^{(10)}=0$		
$Y^{(11)}=0$		

$Y^{(12)}=0$
$Y^{(13)}=0$
$Y^{(14)}=0$
$Y^{(15)}=0$

Ejemplo 6:
LASS $Y'=-Y;$ $Y(0)=1$ $h=.1$

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=-1$		Y1=.9048374180359624
$Y''=1$		YE=.9048374180359595
$Y^{(3)}=-1$		Y2=.9048374180359388
$Y^{(4)}=1$		ER=2.35477...D–14
$Y^{(5)}=-1$		
$Y^{(6)}=1$		
$Y^{(7)}=-1$	$YE=e^{-X}$	
$Y^{(8)}=1$		
$Y^{(9)}=-1$		
$Y^{(10)}=1$		
$Y^{(11)}=-1$		
$Y^{(12)}=1$		
$Y^{(13)}=-1$		
$Y^{(14)}=1$		
$Y^{(15)}=-1$		

Ejemplo 7:
FORD2 $Y'=X.Y/(X-Y);$ $Y(2)=1$ $h=.1$

DERIVADAS INICIALES		SALIDA
$Y'=2$		Y1=1.215688009883212
$Y''=3$		YE=1.215688009883213
$Y^{(3)}=4$		Y2=1.21568800988331
$Y^{(4)}=5$		ER=9.769962...D–14
$Y^{(5)}=6$		
$Y^{(6)}=7$	$YE=(X-1).e^{X-2}$	
$Y^{(7)}=8$		
$Y^{(8)}=9$		
$Y^{(9)}=10$		
$Y^{(10)}=11$		

Ejemplo 8:

FORD3 $Y'=X.Y^2-Y$;$Y(0)=1$ h=.1

DERIVADAS INICIALES	SALIDA
$Y'=-1$	Y1=.9090909090909102
$Y''=2$	YE=.9090909090909091
$Y^{(3)}=-6$	Y2=.9090909090909046
$Y^{(4)}=24$	ER=5.55111...D-15
$Y^{(5)}=-120$	
$Y^{(6)}=720$	
$Y^{(7)}=-5040$ YE=1/(1+X)	
$Y^{(8)}=40320$	
$Y^{(9)}=-362880$	
$Y^{(10)}=3628800$	
$Y^{(11)}=-39916800$	
$Y^{(12)}=479001600$	
$Y^{(13)}=-6227020800$	
$Y^{(14)}=87178291200$	
$Y^{(15)}=-1307674368000$	

Ejemplo 9:

SIMMONS3 $Y'=X^2+Y^2$; $Y(0)=0$ h=.1

DERIVADAS INICIALES	SALIDA
$Y'=0$	Y1=3.333349206445407D-04
$Y''=0$	YE=3.333349206445407D-04
$Y^{(3)}=2$	Y2=3.33334920644622D-04
$Y^{(4)}=0$	ER=8.131516...D-17
$Y^{(5)}=0$	
$Y^{(6)}=0$	
$Y^{(7)}=80$ $YE=X^3/3+X^7/63+2.X^{11}/2079+\ldots$	
$Y^{(8)}=0$	
$Y^{(9)}=0$	
$Y^{(10)}=0$	
$Y^{(11)}=38400$	
$Y^{(12)}=0$	
$Y^{(13)}=0$	
$Y^{(14)}=0$	
$Y^{(15)}=77875200$	

Ejemplo 10:

MUR146A $X.Y'=-X-Y;$ $Y(1)=1$ $h=.1$

DERIVADAS INICIALES	SALIDA
$Y'=-2$	Y1=.813636363636363636
$Y''=3$	YE=.813636363636363635
$Y^{(3)}=-9$	Y2=.813636363636363638
$Y^{(4)}=36$	
$Y^{(5)}=-180$	
$Y^{(6)}=1080$	
$Y^{(7)}=-7560$	$YE=(3-X^2)/2.X$
$Y^{(8)}=60480$	
$Y^{(9)}=-544320$	
$Y^{(10)}=5443200$	
$Y^{(11)}=-59875200$	
$Y^{(12)}=718502400$	
$Y^{(13)}=-9340531200$	
$Y^{(14)}=130767436800$	
$Y^{(15)}=-1961511552000$	
$Y^{(16)}=31384184832000$	

BIBLIOGRAFÍA

R. BELLMAN (1970): *Methods of Non Linear Analysis.* Academic Press.

M. BRAUN (1992): *Differential Equations and their Solutions.* Springer. Berlín.

F. CESCHINO and J. KUNZMANN (1963): *Problemes differentiales des conditions initiales.* Dunod. París.

H. DAVID (1960): *Introduction Nonlinear Differential and Integral Equations.* Dover. N.Y.

L. R. FORD (1955): *Differential Equations.* Mc Graw-Hill. N.Y.

L. FOX (1962): *Numerical Solutions of Ordinary and Partial Differential Equations.* Pergamon Press. London.

P. HENRICI (1962): *Discrete Variable Methods in Ordinary Equations.* John Wiley. N.Y.

E. HAIRER; S. P. NORSETT; G. WANNER (1987): *Solving Ordinary Differential Equations I.* Springer-Verlag. Berlín.

F. B. HILDEBRAND (1960): *Introduction to Numerical Analysis.* Mc Graw-Hill. N.Y.

E. L. INCE (1956): *Ordinary Differential Equations.* Dover N.Y.

E. KAMKEN (1959): *Differentialgleichungen und Losungen.* Chelsea Publishing Company. N.Y.

J. D. LAMBERT (1973): *Computational Methods in Ordinary Differential Equations.* John Wi-lley. London.

H. LEVY and E.A. BAGOT (1950): *Nunerical Solutions of Differential Equations.* Dover. N.Y.

S.G. MIKLIN; K. L. SMOLINSKLY (1967): *Modern Analitic and Computatuinal Methds in Sciences and Mathematic.* Elseviere Publishing. N. Y.

W. E. MILNE (1953): *Numerical Solution of Differential Equations.* John Willey. N.Y.

G. M. MURPHY (1960): *Ordinary Differential Equations and their Solutions.* D. Van Nostrand. N.Y.

L. PONTRIAGUINE (1969): *Equations Differentielles Ordinaires.* Mir. Moscú.

A. RALSTON WILF (1967): *Mathematical Methods for Digital Computer.* John Willey. N.Y.

J. B. SCARBOROUGH (1966): *Numerical Mathematical Analysis.* John Hopkin Press. Baltimore.

G. F. SIMMONS (1972): *Differential Equations.* Mc Graw-Hill. N.Y.

J. F. STEFFENSEN (1965): *Interpolation.* Chelsea Publishin. N.Y.

HISTORIA ECLESIÁSTICA