DISTRIBUCION, CRECIMIENTO Y EMPLEO. UN ANALISIS MEDIANTE UN JUEGO DIFERENCIAL

María Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón

RESUMEN.—En este trabajo, hemos planteado un juego diferencial de suma no nula, entre trabajadores y empresas considerando la oferta de trabajo como elemento integrante en el desarrollo del modelo. Determinamos un equilibrio de Nash feedback, no eficiente y construimos una estrategia de amenaza, equilibrio perfecto en los subjuegos, que produce unos pagos conjuntos iguales a una solución cooperativa de Pareto.

1. INTRODUCCION

Desde el trabajo de Lancaster en 1973, numerosos autores han desarrollado distintos modelos en donde subyace su idea de distribución del producto entre trabajadores y empresas. El modelo de Lancaster, planteado como un juego diferencial de suma no nula, no considera el factor trabajo en su planteamiento lo que impide analizar el comportamiento de esta variable en el desarrollo del juego.

M. Pohjola (1985) elabora un modelo, basado en el de Lancaster, donde los funcionales objetivos son funcionales de utilidad, considerando el factor trabajo como elemento integrante del modelo, lo que permite analizar la posibilidad de pleno empleo. Otro trabajo, donde se analiza el desempleo y sus pagos, es el realizado por R. Gradus (1988), pero el planteamiento del juego no abandona los aspectos de linealidad de Lancaster ya que considera una función de producción de Leontief, y esto da lugar a que la oferta de trabajo sea ahora una variable de estado del modelo.

En este trabajo, tratamos de seguir una línea abierta en el trabajo de Pohjola (1985) considerando que el producto puede expresarse por una clásica función de Cobb-Douglas. Como en el modelo de Lancaster, el producto se reparte entre dos agentes agregados: los trabajadores y las empresas. Los primeros tratarán de maximizar su participación en el producto, para lo que dispondrán de un control cuyos valores máximo y mínimo supondremos no son negociables. Por su parte, las empresas dispondrán de aquella parte del producto no absorvida por los trabajadores y tratarán de maximizar su beneficio, pero han de decidir si invierten o no y si deciden lo primero, deben determinar en que proporción. Además, supondremos que las empresas disponen de la oferta de trabajo, no negativa y cuyo valor máximo está determinado por el capital existente en la economía y por la tecnología.

El planteamiento de los funcionales objetivos viene sugerido por un trabajo de Kaitala y Pohjola (1990), pero ahora la función de producción es del tipo Cobb-Douglas y a los factores no se les remunera por su participación marginal en el producto.

La búsqueda de distintos equilibrios, dará lugar a diferentes estrategias que nos determinarán el capital en la economía y los valores de los controles. Así, en particular, podremos determinar la oferta de trabajo y su remuneración y como consecuencia el desempleo. Este análisis nos permitirá contrastar el argumento de Malinvaud de un trabajo publicado en 1982, en el que sostiene que una alta tasa de paro y un bajo crecimiento de la economía son consecuencia de altos salarios reales.

En este trabajo, nos proponemos encontrar un equilibrio de Nash en ciclo cerrado (feedback), esto es, donde los controles tienen información de los valores que va alcanzando el capital, además del instante de tiempo en el que se encuentra el juego, como ocurre en el equilibrio de Nash en ciclo abierto. El equilibrio no es eficiente y buscamos una estrategia de amenaza, que tampoco es eficiente pero que si es seguida por ambos jugadores, los pagos que alcanzarían superarían a la de Nash feedback. Esta estrategia constituye un equilibrio perfecto en los subjuegos.

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Al igual que en el modelo de Lancaster, consideramos dos grupos que generan y se distribuyen el producto: trabajadores y empresas. Los primeros aportan el trabajo L y los segundos el capital K; el producto Y obtenido por combinación de ambos factores, suponemos satisface una clásica función de tipo Cobb-Douglas: $Y = K^{\alpha} L^{\beta}$ con $\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta < 1$. Los trabajadores desean maximizar su consumo, que será un porcentaje del producto y, considerando un período temporal T, su objetivo podemos expresarle:

$$\max_{s} J_1 = \int_0^T sK^{\alpha}L^{\beta}\, dt,$$

donde supondremos que $0 < s_1 \leq s \leq s_2 < 1$.

Por su parte las empresas, tratarán de maximizar su beneficio y, suponiendo que el gobierno no interviene, esto representará la parte no absorvida por los trabajadores: $(1 - s)\, K^{\alpha}L^{\beta}$. Ahora bien, ellas deciden la oferta de trabajo y la participación θ de sus beneficios dedicada a la inversión; por tanto, su funcional objetivo podrá expresarse:

$$\max_{L,\theta} J_2 = \int_0^T (1 - \theta)\,(1 - s)\, K^{\alpha} L^{\beta}\, dt,$$

donde, $0 \leq \theta \leq 1$ y L, la oferta de trabajo, no negtiva, supondremos que está acotada superiormente por el capital existente en economía corregido por un factor tecnológico μ, que supondremos constante en todo el horizonte temporal. Así, consideramos que satisface las condiciones $0 \leq L \leq \mu K$.

Suponiendo que no tenemos depreciación de capital, su variación verificará:

$$\dot{K} = \theta(1 - s)\, K^{\alpha}L^{\beta}, \quad K(0) = K_0 > 0$$

Luego, si $\theta = 0$, el capital permanece constante y si $\theta = 1$, todos los veneficos de las empresas se destinarán a la formación de capital.

Por tanto, el modelo se plantea como un juego diferencial con dos jugadores, de suma no nula y horizonte finito T, que supondremos es lo suficientemente amplio para que no condicione la existencia de las diferentes estrategias.

3. DISTINTOS EQUILIBRIOS

Nos proponemos, en primer lugar, encontrar estrategias no cooperativas de Nash en ciclo cerrado (feedback), para lo que necesitamos determinar controles admisibles para ambos jugadores.

Así para los trabajadores, la resolución del problema:

$$\max_{s_1 \leq s \leq s_2} \mathcal{H}_1 = sK^{\alpha}L^{\beta} + \psi_1 \theta(1 - s)K^{\alpha}L^{\beta},$$

donde ψ_1 es la variable de coestado, nos proporciona sus controles admisibles y su campo de validez que viene dado por:

$$s = \begin{cases} s_1, & si \quad \psi_1\theta > 1 \\ [s_1, s_2], & si \quad \psi_1\theta = 1 \\ s_2, & si \quad \psi_1\theta < 1 \end{cases}$$

Para las empresas, el problema se planteará:

$$\max_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 \leq L \leq \mu K}} \mathcal{H}_2 = (1 - \theta)(1 - s)K^{\alpha}L^{\beta} + \psi_2\theta(1 - s)K^{\alpha}L^{\beta},$$

donde ψ_2 es la variable de coestado asociada al capital en su problema. Resolviendo este programa, obtenemos que la oferta de trabajo siempre alcanza su cota superior $L = \mu K$ en todo el horizonte temporal y el parámetro de control θ puede tomar cualquier valor dependiendo del valor que tome ψ_2, así:

$$\theta = \begin{cases} 1, & si \quad \psi_2 > 1 \\ [0, 1], & si \quad \psi_2 = 1 \\ 1, & si \quad \psi_2 < 1 \end{cases}$$

Las condiciones necesarias para las estretegias en ciclo cerrado[1] nos exigen que las variables de coestado verifiquen el sistema dinámico:

$$-\dot{\psi}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial K} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial K} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial K},$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial K} + \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial K},$$

en condiciones terminales, en nuestro caso, $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$.

Teniendo en cuenta los controles admisibles de ambos jugadores, el sistema dinámico puede reformularse:

$$-\dot{\psi}_1 = (\alpha + \beta)\mu^\beta K^{\alpha+\beta-1}(s + \psi_1\theta(1 - s))$$

$$-\dot{\psi}_2 = (\alpha + \beta)\mu^\beta K^{\alpha+\beta-1}(1 - s)(1 - \theta + \psi_2\theta),$$

con las mismas condiciones terminales.

El análisis de este sistema dinámico nos permite encontrar dos estrategias en ciclo cerrado dependiendo del valor de s_2. Así, si $s_2 \geq \frac{1}{2}$, la única estrategia que satisface las condiciones necesarias, que también son suficientes[2], es $L = \mu K$ en todo el horizonte temporal y $\theta = 1$, $s = s_1$ en $[0, t_f]$ y $\theta = 0$, $s = s_2$ en $(t_f, T]$, donde:

$$T - t_f = \frac{[K(t_f)]^{1-\alpha-\beta}}{(1 - s_2)\mu^\beta(\alpha + \beta)},$$

con

$$[K(t_f)]^{1-\alpha-\beta} = K_0^{1-\alpha-\beta} + (1 - s_1)(1 - \alpha - \beta)\mu^\beta t_f,$$

1 Mehlmann, A. (1988), p. 84.
2 Mehlmann, A. (1988), p. 79.

y $K(t_f) = K(T)$. Esta estrategia[3], que coincide con una estrategia de Nash en ciclo abierto si $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \geq \frac{1-s_2}{s_2}$, permite un crecimiento de capital hasta t_f y, con ello, un crecimiento de la oferta laboral hasta ese momento; un consumo nulo para las empresas y mínimo para los trabajadores hasta t_f y después de ese momento, el máximo para los trabajadores y el mínimo para las empresas.

La estrategia analizada constituye un equilibrio perfecto en los subjuegos, ya que las funciones:

$$V_1(t,K) = \begin{cases} -\mu^\beta [K(t_f)]^{\alpha+\beta}\left[s_1 + \frac{s_2}{1-s_2}(1-s_1)\right]\left[t - \frac{K^{1-\alpha-\beta} - K_0^{1-\alpha-\beta}}{(1-s_1)\mu^\beta(1-\alpha-\beta)}\right] + \\ + \left[\frac{s_1}{1-s_1} + \frac{s_2}{(1-s_2(\alpha+\beta)}\right]K(t_f) - \frac{s_1}{1-s_1}K & si \quad t \in [0, t_f] \\ s_2(T-t)\mu^\beta K^{\alpha+\beta} & si \quad t \in [t_f, T]. \end{cases}$$

$$V_2(t,K) = \begin{cases} \frac{K(t_f)}{\alpha+\beta} - \\ -\left[t - \frac{K^{1-\alpha-\beta} - K_0^{1-\alpha-\beta}}{(1-s_1)\mu^\beta(1-\alpha-\beta)}\right](1-s_1)\mu^\beta[K(t_f)]^{\alpha+\beta} & si \quad t \in [0, t_f] \\ (1-s_2)(T-t)\mu^\beta K^{\alpha+\beta} & si \quad t \in [t_f, T], \end{cases}$$

satisfacen las condiciones requeridas[4].

Si $s_2 < \frac{1}{2}$, la estrategia óptima aplica controles diferentes en tres subintervalos del horizonte temporal. Así, en $[0, t'_f]$ tenemos $s = s_1$, $\theta = 1$; en $(t'_f, t_f]$ se tiene $s = s_2$, $\theta = 1$ y, por último, en $(t_f, T]$ los controles son $s = s_2$, $\theta = 0$. Además, siempre $L = \mu K$. La amplitud del intervalo terminal viene determinada por la misma expresión que en el caso anterior, pero ahora:

$$[K(t_f)]^{1-\alpha-\beta} = [K(t'_f)]^{1-\alpha-\beta} + (1-s_2)(1-\alpha-\beta)\mu^\beta(t_f - t'_f),$$

y
$$K(t_f) = \left(\frac{1}{2s_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+b}} K(t'_f),$$

con

$$[K(t'_f)]^{1-\alpha-\beta} = K_0^{1-\alpha-\beta} + (1-s_1)(1-\alpha-\beta)\mu^\beta t'_f, \qquad K(t_f) = K(T).$$

3 Soto Torres, M. D. y Fernández Lechón, R. (1994).
4 Condiciones exisgidas en el teorema 2.4 de Mehlmann, A. (1988), p. 65.

De nuevo el capital y la oferta laboral crecen en $[0, t_f]$, pero el crecimiento es más rápido en $[0, t'_f]$ que en $(t'_f, t_f]$. El consumo máximo de los trabajadores se adelanta con respecto al de la estrategia anterior y las empresas acumulan capital en un intervalo de amplitud más grande.

Esta estrategia también es un equilibrio perfecto en los subjuegos ya que las funciones:

$$
V_1(t,K) = \begin{cases}
\dfrac{s_1}{1-s_2}[K(t'_f)-K] + \dfrac{s_2}{1-s_2}[K(t_f)-K(t'_f)] + \dfrac{s_2K(t_f)}{(1-s_2)(\alpha+\beta)} - \\
-\mu^\beta[K(t'_f)]^{\alpha+\beta}\left[t - \dfrac{K^{1-\alpha-\beta}-K_0^{1-\alpha-\beta}}{(1-s_1)\mu^\beta(1-\alpha-\beta)}\right] & si \quad t \in [0, t'_f] \\
\dfrac{s_2}{1-s_2}[K(t_f)-K] - 2s_2\mu^\beta[K(t_f)]^{\alpha+\beta}(t-t'_f) + \dfrac{s_2K(t_f)}{(1-s_2)(\alpha+\beta)} + \\
+ 2s_2[K(t_f)]^{\alpha+\beta}\left[\dfrac{K^{1-\alpha-\beta}-[K(t'_f)]^{1-\alpha-\beta}}{(1-s_2)(1-\alpha-\beta)}\right] & si \quad t \in [t'_f, t_f] \\
s_2(T-t)\mu^\beta K^{\alpha+\beta} & si \quad t \in [t_f, T].
\end{cases}
$$

$$
V_2(t,K) = \begin{cases}
-(1-s_2)\mu^\beta \dfrac{1}{2s_2}[K(t'_f)]^{\alpha+\beta} + \left[t - \dfrac{K^{1-\alpha-\beta}-K_0^{1-\alpha-\beta}}{(1-s_2)\mu^\beta(1-\alpha-\beta)}\right] + \\
+ \dfrac{K(t_f)}{\alpha+\beta} & si \quad t \in [0, t'_f] \\
\dfrac{K(t_f)}{\alpha+\beta} - (1-s_2)\mu^\beta[K(t_f)]^{\alpha+\beta}(t-t_f) + \\
+ [K(t_f)]^{\alpha+\beta}\left[\dfrac{K^{1-\alpha-\beta}-[K(t_f)]^{1-\alpha-\beta}}{(1-\alpha-\beta)}\right] & si \quad t \in [t'_f, t_f] \\
(1-s_2)(T-t)\mu^\beta K^{\alpha+\beta} & si \quad t \in [t_f, T].
\end{cases}
$$

satisface la ecuación en derivadas parciales requerida (la referencia es la misma que en el caso anterior).

4. ESTRATEGIA DE AMENAZA

Una estrategia de amenaza para cada jugador consistirá en seguir una estrategia más eficiente hasta que el otro se desvíe, entonces, cada jugador a partir de ese momento seguirá la solución no cooperativa de Nash en ciclo cerrado.

Determinamos, en primer lugar, estrategias más eficientes para ambos jugadores que las encontradas en la sección anterior. para lo cual, notemos que los funcionales objetivos de ambos jugadores[5] para $s_2 \geq \frac{1}{2}$, puede expresarse:

$$J_1 = \frac{s_1}{1 - s_1} K(t_f) + s_2 \mu^\beta g(t_f), \qquad J_2 = (1 - s_2)\mu^\beta g(t_f)$$

con

$$g(y) = [K(y)]^{\alpha+\beta}(T - y) = [\mu^\beta(1 - \alpha - \beta)(1 - s_1)y]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} (T - y),$$

La función $g(y)$ alcanza un máximo en $y = (\alpha + \beta)T$ y dado que $t_f < T(\alpha + B)$, es seguro que tenemos una estrategia más eficiente si $L = \mu K$ es considerado en todo el horizonte con $s = s_1$, $\theta = 1$ en $[0, t']$ y $s = s_2$, $\theta = 0$ en $(t', T]$ tomando t' tal que $t_f < t' \leq T(\alpha + \beta)$.

En cuanto a la estrategia de Nash con $s_2 < \frac{1}{2}$, los funcionales objetivo de expresan:

$$J_1 = \frac{s_1}{1 - s_1} K(t'_f) + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(t_f) - K(t'_f)] + s_2 \mu^\beta f(t'_f, t_f)$$

$$J_2 = (1 - s_2)\mu^\beta f(t'_f, t_f),$$

donde

$$f(x, y) = [\mu^\beta(1 - \alpha - \beta)((1 - s_2)(y - x) + (1 - s_1)x)]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} (T - y).$$

Esta función para cada valor fijo de x alcanza un máximo en:

$$y = T(\alpha - \beta) - (1 - \alpha - \beta)\frac{s_2 - s_1}{1 - s_2} x,$$

y, en particular, fijado el momento t'_f definido anteriormente, tenemos que el máximo es el momento t_f. Ahora bien, al verificarse $f(x, y) < g(y)$, bastará, para mejorar el funcional objetivo de las empresas si $s_2 < \frac{1}{2}$, considerar $L = \mu K$ en todo el horizonte temporal y una política terminal del tipo $s = s_2$, $\theta = 0$ en $(t', T]$ con $t_f \leq t' \leq T(\alpha + \beta)$. En cuando a los trabajado-

5 En toda esta sección supondremos, sin pérdida de generalidad, que $K_0 = O$.

res, estos mejorarán su funcional si elegimos t'' tal que $K(t'') > K(t'_f)$ y mantengamos en $[0, t'']$ la política $s = s_1$, $\theta = 1$ y en $(t'', t']$ la política $s = s_2$, $\theta = 1$, exigiendo adicionalmente $K(t') - K(t'') \geq K(t_f) - K(t'_f)$. Estos requerimientos pueden lograrse si $t' = T(\alpha + \beta)$ y t'' viene determinado por la expresión:

$$t'' = \frac{T(\alpha+\beta)}{1 + \frac{1-s_1}{1-s_2}\left[\left(\frac{1}{2s_2}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} - 1\right]},$$

que es equivalente a la relación $K(t') = \left(\frac{1}{2s_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} K(t'')$.

Las estrategias de Nash en ciclo cerrado tanto para $s_2 \geq \frac{1}{2}$ como $s_2 < \frac{1}{2}$ no pertenecen a la frontera de Pareto, que se determina resolviendo el problema:

$$\max_{s,\theta,L} \int_0^T [\rho s + (1-\rho)(1-s)(1-\theta)] K^\alpha L^\beta \, dt,$$

$$\dot{K} = \theta(1-s)K^\alpha L^\beta, \quad K(0) = K_0, \quad 0 < s_1 \leq s \leq s_2 < 1$$

$$0 \leq L \leq \mu K, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

La solución de este problema, que se obtiene por simple aplicación del Principio del Máximo, donde las condiciones necesarias son también suficientes, teniendo en cuenta las condiciones de Arrow[6], pueden agruparse en cinco posibilidades. Así, si hay preferencia absoluta para las empresas, la estrategia óptima será $s = s_1$, $\theta = 1$ en $[0, t_p]$, $s = s_1$, $\theta = 0$ en $(t_p, T]$ donde:

$$T - t_p = \frac{[K(t_p)]^{1-\alpha-\beta}}{(\alpha+\beta)\mu^\beta (1-s_1)}.$$

No hay otra estrategia que proporcione un valor del funcional objetivo para las empresas superior al que se obtiene con esta.

Si $0 < \rho < \frac{1}{2}$, tenemos idénticos controles, pero:

$$T - t_p = \frac{(1-\rho)\,[K(t_p)]^{1-\alpha-\beta}}{(\alpha+\beta)\mu^\beta(\rho s_1 + (1-\rho)(1-s_1))}.$$

6 Ver Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981), p. 209; Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1993), p. 289.

En el óptimo social, los controles en el intervalo $[0, t_p]$ son los mismos que en los dos casos previos, pero en (t_p, T) es óptimo $s \in [s_1, s_2]$ y $\theta = 0$ con:

$$T - t_p = \frac{[K(t_p)]^{1-\alpha-\beta}}{(\alpha+\beta)\mu^\beta}.$$

Si $\frac{1}{2} < \rho < 1$, la estrategia óptima divide al horizonte temporal en tres subintervalos; así, en $[0, t''_p]$ es óptimo $s = s_1$, $\theta = 1$; en $(t''_p, t'_p]$, $s = s_2$, $\theta = 1$ y en $(t'_p, T]$, $s = s_2$, $\theta = 0$ con:

$$T - t'_p = \frac{(1-\rho)\,[K(t'_p)]^{1-\alpha-\beta}}{(\alpha+\beta)\mu^\beta[\rho s_2 + (1-\rho)(1-s_2)]},$$

y

$$K(t'_p) = \left(\frac{\rho}{\rho s_2 + (1-\rho)(1-s_2)}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} K(t''_p).$$

Por último, si los trabajadores tienen preferencia absoluta, el valor de t'_p anterior coincide con T y t''_p viene determinado por la relación:

$$T - t''_p = \frac{[K(t''_p)]^{1-\alpha-\beta}\left[\left(\frac{1}{s_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} - 1\right]}{(\alpha+\beta)\mu^\beta},$$

Ahora, el funcional objetivo para las empesas es nulo, pero los trabajadores alcanzan su máximo consumo. Además, en todas ellas $L = \mu K$ en todo el horizonte temporal.

Los pares (J_1, J_2) correspondientes a estas estrategias constituyen la frontera de Pareto, en donde se observa que el consumo de los trabajadores crece a medida que crece su preferencia, mientras los beneficios de las empresas decrecen con ρ, anulándose cuando $\rho = 1$. El capital en la economía crece con ρ, alcanzando el mayor valor si $\rho = 1$ y, en este caso, tendríamos la mejor oferta laboral, mientras que la distribución conjunta alcanza su valor máximo en el óptimo social.

En la frontera de Pareto siempre podemos encontrar una estrategia más eficiente que la de Nash en ciclo cerrado, tanto en el caso $s_2 < \frac{1}{2}$ como $s_2 \geq \frac{1}{2}$, que se encuentra siempre considerando un valor de ρ tal que

$0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$, aunque es diferente dependiendo del valor de los parámetros, pero tiene el inconveniente de que no constituye como estrategia de amenaza un equilibrio perfecto en los subjuevos[7].

Las estrategias que anteriormente hemos definido si lo constituyen tomando siempre $t' = T(\alpha + \beta)$. Para probar este resultado es suficiente[8], comprobar que para cada jugador y para cualquier momento en el que se realice la amenaza, los funcionales objetivos de ambos jugadores son menores o iguales en la estrategia de amenaza efectiva que si siguieran la estrategia más eficiente.

Así, si consideramos en primer lugar la estrategia de Nash con $s_2 \geq \frac{1}{2}$, tendremos que ambos jugadores siguen la más eficiente hasta que uno de ellos se desvía, continuando ambos la de Nash. Entonces, si la desviación se produce en $z \in [0, t_f]$, obtendrían que a lo largo de todo el horizonte temporal seguirían a de Nash, por tanto, menos eficiente. Si la amenaza efectiva se realiza en $z \in (t_f, t']$, la estrategia que seguirán los jugadores será: $L = \mu K$ en todo el horizonte, $s = s_1$, $\theta = 1$ en $[0, z]$ y $s = s_2$, $\theta = 0$ en $(z, T]$; por tanto, el funcional objetivo para los trabajadores será:

$$\frac{s_1}{1 - s_1} K(z) + s_2 \mu^\beta g(z),$$

que no supera al funcional del mismo jugador en la más eficiente. Idéntico resultado obtenemos para las empresas.

Por último, si la desviación se realiza en $z \in (t', T)$ la estrategia de ambos jugadores coincide con la más eficiente por lo que los funcionales de ambos jugadores, en una y otra situación, son iguales.

Si $s_2 < \frac{1}{2}$, los momentos de cambio de los controles de la estrategia más eficiente y de la de Nash, satisfacen $t_f' < t''$, $t_f < t'$, pero dependiendo del valor del parámetro s_2, lo que condiciona también el valor de s_1; la relación entre t'' y t_f puede ser mayor, menor o igual a la unidad. Luego, tenemos tres situaciones donde siempre el funcional de la estrategia más eficiente no es inferior al de la de amenaza. Estudiemos la situación de que los tiempos verifiquen la relación $0 < t_f' < t'' < t_f < t' < T$, el resto de las situaciones no presentan complicaciones adicionales. Así, si la amenaza se produce en $z \in [0, t_f']$ la estragegia más efectiva coincide con la de Nash por lo que los funcionales son inferiores a los dé la más eficiente. Si la

7 Haurie, A. (1976) lo justifica aludiendo al trabajo de P. T. Liu (1973), por el hecho de que los esquemas cooperativos no satisfacen características de juegos en forma extensiva.

8 Ver Mehlmann, A. (1988) teorema 2.5, p. 69.

amenaza se lleva a cabo en $z \in (t'_f, t'']$, la estrategia que siguen ambos jugadores será $s = s_1$, $\theta = 1$ en $[0, z]$; $s = s_2$, $\theta = 1$ en $(z, t_f]$ y $s = s_2$, $\theta = 0$ en $(t_f, T]$. El funcional para los trabajadores será:

$$\frac{s_1}{1 - s_1} K(t'_f) + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(t_f) - K(z)] + s_2 \mu^\beta f(z, t_f),$$

inferior al de la más eficiente, pues $K(t_f) - K(z) < Kt') - K(t'')$ y $f(z, t_f) < g(t_f) < g(T(\alpha + \beta))$; para las empresas también se obtiene el resultado. Si $z \in (t'', t_f]$, el funcional de los trabajadores:

$$\frac{s_1}{1 - s_1} K(t'') + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(t_f) - K(t'')] + s_2 \mu^\beta f(t'', t_f),$$

también satisface la relación y lo mismo ocurre con las empresas. Un resultado análoso se obtiene si $z \in (t_f, t']$ pues:

$$\frac{s_1}{1 - s_1} K(t'') + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(z) - K(t'')] + s_2 \mu^\beta f(t'', z)$$

$$\leq \frac{s_1}{1 - s_1} K(t'') + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(t') - K(t'')] + s_2 \mu^\beta g(t'),$$

y $(1 - s_2) f(t'', z) \leq (1 - s_2) f(t'', t')$. Por último, si $z \in (t', T]$, la estrategia de amenaza y la más eficiente coinciden.

Por tanto, las estrategias eficientes definidas constituyen un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Estas estrategias de amenaza, que no siguen esquemas cooperativos, tienen la característica[9] de que $J_1 + J_2$ alcanza el mismo valor que una estrategia cooperativa. En efecto, si consideramos la estrategia de amenaza para $s_2 \geq \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$J_1 + J_2 = \frac{s_1}{1 - s_2} K(t_f) + \mu^\beta g(t_f)$$

que coincide con el valor que $J_1 + J_2$ alcanza en la solución cooperativa con $\rho = 0$. Si $s_2 < \frac{1}{2}$, la suma de los funcionales en la estrategia de amenaza será:

9 Seierstad, A. (1993) sobre un juego diferencial modificado del de Lancaster, encuentra estragegias de amenaza que también satisfacen esta paropiedad.

$$J_1 + J_2 /_A = \frac{s_1}{1 - s_1} K(t_f') + \frac{s_2}{1 - s_2} [K(t_f) - K(t_f')] + \mu^\beta f(t_f', t_f),$$

donde t_f, t_f' y los controles en los subintervalos ya han sido establecidos; entonces, si denotamos por $J_1 + J_2 /_\rho$ la suma de los funcionales para ambos jugadores con $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ y definimos la función continua:

$$h(\rho) = J_1 + J_2 /_\rho - J_1 + J_2 /_A,$$

obtenemos $h(\frac{1}{2}) > 0$ y $h(1) < 0$, por tanto, existirá un $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$ con $h(\rho) = 0$, con lo que la estrategia de amenaza alcanza una distribución conjunta igual a un esquema cooperativo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha planteado un juego diferencial, de suma no nula, entre trabajadores y empresas, con objeto de determinar estrategias óptimas de distribución del producto entre ellos, de crecimiento de capital y de empleo, dentro de una solución no cooperativa de Nash en ciclo cerrado (feedback). Hemos obtenido, en función del valor de un parámetro de negociación antes del inicio del juego s_2, dos estrategias diferentes, equilibrios perfectos en los subjuegos. Estas estrategias tienen en común que la oferta laboral se utiliza en todas las posibilidades que permite el capital y la tecnología y que a partir de un momento t_f, las empresas recogen beneficios no permitiendo el incremento de stock de capital; entonces, si la demanda de trabajo sigue un proceso de crecimiento desde el inicio del juego, a partir del momento t_f es seguro un crecimiento del desempleo, siendo también en esta última etapa donde los trabajadores realizan un mayor consumo. Otro resultado en el análisis de estas estrategias es la diferencia de crecimiento de capital entre una y otra, obteniéndose un crecimiento superior en el caso de $s_2 \geq \frac{1}{2}$.

Dentro de la solución cooperativa de Pareto, siempre podemos encontrar estrategias más eficientes que las obtenidas en la solución no cooperativa de Nash, donde las decisiones se toman teniendo en cuenta el momento de tiempo y el capital. Sin embargo, no podemos utilizarlas como amenaza, pues siempre se podría encontrar un momento donde la amenaza sería mejor por lo menos para uno de los jugadores, resultando ser este un problema que ya argumento Haurie en un juego cuadrático.

Observando el comportamiento de los funcionales objetivos de ambos jugadores hemos determinado una estrategia para cada posibilidad ($s_2 \geq \frac{1}{2}$,

$s_2 < \frac{1}{2}$) más eficiente que las de Nash. Si esta estrategia fuese seguida por ambos jugadores, el capital en la economía sería mayor y, por tanto, la oferta de trabajo y ambos mejorarían los valores de sus funcionales objetivo aunque el problema del desempleo seguiría patente. La estrategia de amenaza construida permite obtener un resultado conjunto para ambos jugadores igual al que podrían obtener si adoptaran una solución cooperativa de Pareto. Así, si $s_2 \geq \frac{1}{2}$ el resultado conjunto sería igual al resultado de jugar con preferencia absoluta para los trabajadores, mientras que si $s_2 < \frac{1}{2}$, obtendría un resultado que coincidiría con el obtenido si jugasen con mayor preferencia para empresa

BIBLIOGRAFIA

Gradus, R. (1988): «The Reaction of the firm on Governmental Policy: A Game—Theoretical Aproach» en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 3* (G. Feichtinger Ed.). North-Holland, Amsterdam, pp. 265-290.

Haurie, A. (1976): «A Note on Nonzero-sum Differential Games with Bargaining Solution». *Journal of Optimization Theory and Applications.* Vol. 18, nº 1, pp. 31-39.

Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990): «Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a two-class Neoclassical Growth Model». *International Economic Review.* Vol. 31, nº 2, pp. 421-438.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* North-Holland, New York.

Lancaster, K. (1973): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». *Journal of Political Economy.* Vol. 81, pp. 1.092-1.109.

Liu, P. T. (1973): «Nonzero-sum Differential Games with Bargaining Solutions». *Journal of Optimization Theory and Applications.* Vol. 11, nº 3, pp. 284-292.

Malinvaud, E. (1982): «Wages and Unemployment». *Economic Journal.* Vol. 92, pp. 1-12.

Mehlmann, A. (1988): *Applied Differential Games.* Plenum Press, New York

Pohjola, M. (1985): «Growth, Distribution and Employment Modelled as a Differential Game» en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2.* (G. Feichtinger Ed.). North-Holland, Amsterdam, pp. 581-591.

Seierstad, A. (1993): «The Dynamic Efficiency of Capitalism». *Journal of Economic Dynamics and Control.* Vol. 17, nº 5/6, pp. 877-886.

Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1993): *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North-Holland, Amsterdam.

Soto Torres, M. D. y Fernández Lechón, R. (1994): «Distribución, Crecimiento y Empleo. Una Solución No Cooperativa». *VIII Reunión Anual ASEPELT.* Palma de Mallorca.