SIMULACION DE ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO EN UN JUEGO DIFERENCIAL SOBRE LA UNION MONETARIA

J. J. Garcillan García
M. D. Soto Torres

RESUMEN.—Desde un juego diferencial, planteado en horizonte infinito, entre el Banco Central Europeo y las autoridades fiscales de dos países representativos de aquellos que se integrarán en la Unión Monetaria, este trabajo, simula el comportamiento de las deudas, déficits fiscal de las dos naciones y la variación de base monetaria en la Unión Monetaria, sobre distintas estrategias de equilibrio, desarrollando un software sobre Powersim 1.1. El software, permite obtener el comportamiento de las variables si todos los jugadores siguen un equilibrio de Nash no cooperativo o bien, se permite cooperación entre las autoridades fiscales nacionales. También, si se admite el predominio de la política monetaria frente a las políticas fiscales nacionales, admitiendo la posibilidad de que entre ellas puedan formar una coalición. La comparación de las trayectorias en los equilibrios estratégicos sin cooperación fiscal y con comparación fiscal también es posible.

1. INTRODUCCION

Ante la unificación monetaria de ciertos países de la Unión Europea, el análisis de las interrelaciones entre decisiones de política fiscal, llevadas a cabo por las distintas autoridades fiscales nacionales, y decisiones de política monetaria, conducidas por el Banco Central Europeo (B.C.E.), puede ser realizado utilizando la Teoría de Juegos identificando cada autoridad con un jugador, pues es segura la emergencia de objetivos distintos para la política monetaria común y para las políticas fiscales nacionales.

Diversos autores así lo han entendido, planteando juegos que abordan esta problemática. Podemos citar los trabajos de Petit (1990, p. 240) o Tabellini (1986) que plantean juegos para analizar distintas relaciones entre autoridades monetarias y fiscales dentro de una economía nacional y los de Beesma y Bovenberg (1997), Levine y Brociner (1994) o Aarle, Brovenberg y Raith (1997) que construyen juegos para modelar diferentes aspectos de política fiscal y monetaria considerando la futura Unión Monetaria.

En el trabajo de Aarle, Brovenberg y Raith se estudia cómo evolucionaría la deuda, déficit fiscal y variación de la base monetaria en los países de la Unión Monetaria al considerar un juego diferencial, en horizonte infinito, entre tres jugadores. Un jugador se identifica con el B.C.E. y los otros dos jugadores se identifican por dos naciones de la Unión Monetaria que representarían a dos conjuntos de naciones que se integrarán en ella presentando un crecimiento semejante. Entre otras cuestiones, en el trabajo se determina una estrategia de Nash, no cooperativa, en ciclo abierto, entre los tres jugadores, aunque se permite que las autoridades fiscales nacionales puedan formar una coalición. En un trabajo posterior, de Soto y Fernández (1998, a) utilizando el mismo juego diferencial, se considera la posibilidad de que las autoridades fiscales nacionales, formando coalición o no, admitan la primacía de la política monetaria, lo que Currie (1992) supone que puede ocurrir por la mayor credibilidad del Banco Central Europeo. En este supuesto, se determina una estrategia de equilibrio de Stackelberg, en ciclo abierto, siendo líder el B.C.E. y seguidoras las autoridades fiscales nacionales.

La búsqueda de estas cuatro estrategias de equilibrio, siempre en ciclo abierto, conduce al análisis de otros tantos sistemas dinámicos lineales, con distinto número de ecuaciones en Nash y Stackelberg, en los que, bajo algunas condiciones, se encuentra que una de sus soluciones es el equilibrio estratégico buscado. Estas condiciones provienen de los valores que tomen un conjunto de parámetros que se hacen explícitos en el planteamiento del juego diferencial propuesto por Aarle, Brovenberg y Raith y que nosotros con algunas simplificaciones consideramos en este trabajo.

El problema de los ajustes dados a los parámetros se presenta en las cuatro estrategias de equilibrio que vamos a considerar, e inciden sobre la evolución de las variables deuda, déficit fiscal y variación monetaria así como sobre las condiciones iniciales que estas variables tienen que tomar para seguir el correspondiente equilibrio estratégico. Las comparaciones, entre los valores que toman estas variables durante el desarrollo del juego, en los distintos equilibrios, no resultan obvias debido al conjunto de condiciones que es necesario manejar. Sin embargo, las comparaciones entre los valores que alcanzan las variables en su evolución sobre las estrategias de equilibrio, nos permitirían determinar cómo influyen en su evolución las distintas suposiciones que están implícitas en las diferentes estrategias que se consideran.

Para resolver el problema de las comparaciones hemos considerado un caso particular de valores de los parámetros y nos hemos restringido a las comparaciones entre Nash y Stackelberg cuando no cooperan las autoridades fiscales y en las dos posibilidades cuando forman coalición. Para ello, hemos construido un «taller de simulación» que se presenta en este trabajo. El software desarrollado está implementado sobre el programa Powersim 1.1, que fue desarrollado fundamentalmente para simular sistemas construidos con Dinámica de Sistemas, pero que puede ser utilizado para conseguir nuestro objetivo sin más que identificar las variables que surgen en los distintos sistemas dinámicos con las utilizadas en el procedimiento sistémico.

Las limitaciones, que hemos impuesto en nuestro análisis comparativo, han sido seleccionadas para probar la potencialidad del software desarrollado. Dar cabida a todas las posibilidades puede ser llevado a cabo sin necesidad de nuevas aportaciones de ingenio.

El trabajo ha sido dividido en secciones. En la segunda nos ocupamos del planteamiento del juego diferencial. En la tercera, dividida en dos subsecciones, nos ocupamos de forma consecutiva, del análisis de los sistemas dinámicos que nos van a permitir encontrar una solución estratégica de Nash sin y con cooperación fiscal y de la estrategia de equilibrio de Stackelberg siendo líder el B.C.E. siendo seguidoras las dos autoridades fiscales o bien un único jugador cooperativo. También esta sección se ocupa en particular, del problema asociado a las condiciones iniciales de deuda, déficit fiscal y variación de base monetaria en relación a los parámetros del juego. En la cuarta sección, presentamos el software y sus posibilidades mostrando algunos de los resultados que se pueden obtener.

2. PLANTEAMIENTO DEL JUEGO DIFERENCIAL

Se supone que las dos autoridades fiscales nacionales determinan objetivos de déficit fiscal $\bar{f}_i, i = 1,2$ y controlan sus valores de déficit $f_i(t), i = 1,2$ durante el horizonte del juego. También se supone que estos dos jugadores especifican objetivos de deuda $\bar{d}_i, i = 1,2$, pero no controlan sus valores de deuda en cada momento, $d_i(t), i = 1,2$, que se retroalimentan con el déficit y variación monetaria. Todas estas especificaciones, se supone están normalizadas por el P.I.B. Europeo. Para formular los objetivos de las dos autoridades fiscales, introducimos dos nuevas variables $u_i(t) = f_i(t) - \bar{f}_i$, $x_i(t) = d_i(t) - \bar{d}_i$, $i = 1,2$, que nos determinan las desviaciones de déficit y deuda respecto a los objetivos económicos fijados por las autoridades nacionales. Se supone que las dos autoridades fiscales tratan de minimizar, durante el juego, el valor actual de las desviaciones cuadráticas de déficit, deuda propia y ajena con una ponderación determinada. Así el funcional a minimizar por cada uno de los dos jugadores puede expresarse:

$$J_i \equiv \int_0^{\infty} [u_i(t)^2 + Qx_i(t)^2 + Q'x_j(t)^2]e^{-\delta \cdot t}\, dt,$$

con $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ siendo Q la ponderación que fija cada nación a su desviación de deuda propia y Q' a la desviación de deuda de la otra nación.

Por su parte el B.C.E. fija un objetivo de variación de base monetaria $\bar{m}$ y controla su valor instantáneo $m(t)$. Ambas especificaciones se suponen también normalizadas por el P.I.B. Europeo. El objetivo del B.C.E., durante el desarrollo del juego, será minimizar el valor actual de las desviaciones cuadráticas de la variación monetaria respecto a su objetivo instantáneo, junto con las desviaciones de deuda de cada nación y de las dos conjuntamente, con una ponderación determinada. Si denotamos por $v(t)$ a la diferencia $m(t) - \bar{m}$, el funcional a minimizar por la autoridad monetaria puede formularse como

$$J_m \equiv \int_0^{\infty} (v(t)^2 + z[\omega^2 x_1(t)^2 + 2\omega(1-\omega)x_1(t)x_2(t) + (1-\omega)^2 x_2(t)^2])e^{-\delta \cdot t}dt,$$

donde ω es la participación de la nación, denotada por uno, en el P.I.B. Europeo y $1-\omega$ la participación de la otra nación. El parámetro z, no negativo, trata de recoger la sensibilidad que el B.C.E. muestra hacía la política económica general de los países que integrarán la Unión Monetaria.

Todos los jugadores conocen el sistema dinámico que satisfacen las deudas y sus condiciones iniciales y por tanto, conocen las evoluciones de las desviaciones de las deudas y sus condiciones iniciales:

$$\dot{x}_1(t) = rx_1(t) + u_1(t) - \frac{\theta}{\omega} v(t) + a, \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\dot{x}_2(t) = rx_2(t) + u_2(t) - \frac{1-\theta}{1-\omega} v(t) + b, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

donde r, supuesto constante para poder trabajar con un sistema dinámico de coeficientes constantes, es $i(t) - (\dot{Y}(t) / Y(t))$ siendo $i(t)$ la tasa de interés nominal e $Y(t)$ el P.I.B. Europeo. El parámetro θ representa la fracción de moneda común distribuida por el B.C.E. a la nación denotada por uno y $1 - \theta$ la suministrada a la nación dos. Los valores de a y b son respectivamente, $r\bar{d}_1 + \bar{f}_1 - (\theta/\omega)\bar{m}$ y $r\bar{d}_2 + \bar{f}_2 - ((1-\theta)/(1-\omega))\bar{m}$.

De ahora en adelante eliminaremos la dependencia explícita de las variables respecto al tiempo, sin intentar crear confusión.

3. SISTEMAS DINAMICOS ASOCIADOS A LAS ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO

Desde el planteamiento del juego diferencial, las distintas estrategias de equilibrio que en este trabajo se van a considerar, pueden encontrarse aplicando el principio del mínimo a distintos problemas de control (Basar y Olsder p. 318 y 410). En todos los casos, las condiciones necesarias son suficientes al trabajar con programas convexos (Seierstad y Sydsaeter p. 234).

3.1. EQUILIBRIOS DE NASH

Si las autoridades fiscales nacionales no cooperan y ninguno de los jugadores tiene el poder de imponerse en el proceso de decisión, un equilibrio de Nash no cooperativo puede obtenerse al aplicar el principio del mínimo a tres problemas de control paramétricos. Estos problemas corresponden a cada uno de los problemas de control que tienen planteados los jugadores, fijados los controles de los otros dos. Los problemas, por tanto, tienen distinto funcional objetivo y están sujetos, todos ellos, al sistema dinámico que determina la evolución de las deudas.

Si consideramos las condiciones necesarias del principio del mínimo, salvo la condición de transversalidad, y agrupamos los resultados de los jugadores, encontramos un sistema dinámico lineal formado por cinco ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega} v + a, \qquad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\dot{x}_2 = rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega} v + b, \qquad x_2(0) = x_2^0,$$

$$\dot{v} = -z\omega x_1 - z(1-\omega)x_2 - (r-\delta)v,$$
$$\dot{u}_1 = Qx_1 - (r-\delta)u_1,$$
$$\dot{u}_2 = Qx_2 - (r-\delta)u_2,$$

que recoge la evolución de las deudas, déficit fiscal y variación monetaria respecto a los objetivos propuestos por las tres autoridades.

Este sistema admite un único estado de equilibrio si los parámetros satisfacen: $\delta \neq r$, $r(\delta - r) \neq Q$ y $r(\delta - r) \neq Q + z$. Supuestas estas condiciones, podemos caracterizar el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema dinámico determinando los valores propios de la matriz de los coeficientes. Si la solución estacionaria encontrada, cuyas componentes alcanzan el valor:

$$x_{1N}^* = \frac{(\delta - r)\left[[z(1-\theta) + Q - r(\delta - r)]a - z\theta \dfrac{1-\omega}{\omega} b\right]}{[Q - r(\delta - r)][Q + z - r(\delta - r)]},$$

$$x_{1N}^* = \frac{(\delta - r)\left[[z\theta + Q - r(\delta - r)]\, b - z(1-\theta) \dfrac{\omega}{1-\omega} a\right]}{[Q - r(\delta - r)][Q + z - r(\delta - r)]},$$

$$v_N^* = \frac{z[\omega a + (1 - \omega)b]}{Q + z - r(\delta - r)},$$

$$(\delta - r)u_{iN}^* + Qx_{iN}^* = 0, \quad i = 1,2,$$

fuese un atractor o un punto de silla, una solución del sistema dinámico con condiciones iniciales sobre el subespacio estable asociado a él verificaría la condición de transversalidad y correspondería a la estrategia de equilibrio buscada.

La matriz de los coeficientes admite cinco valores propios no nulos, distintos y al menos siempre dos positivos:

$$\lambda_2 = \frac{\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4Q}}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{\delta + \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4(Q+z)}}{2},$$

El signo de los otros tres valores propios:

$$\lambda_1 = \delta - r,\ \lambda_3 = \frac{\delta - \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4Q}}{2}, \qquad \lambda_5 = \frac{\delta - \sqrt{(\delta - 2r)^2 + 4(Q+z)}}{2},$$

depende de la posición que ocupe el factor $r\,(\delta - r)$ en la recta real. Si el factor es negativo, tendremos tres valores propios negativos y los vectores propios asociados a ellos $\{b_1^N, b_3^N, b_5^N\}$ con componentes:

$$b_1^N = \left(0,0,1,\frac{\theta}{\omega},\frac{1-\theta}{1-\omega}\right),$$

$$b_3^N = \left(-(\delta - r - \lambda_3),\ \frac{\omega}{1-\omega}(\delta - r - \lambda_3), 0, Q,\ \frac{-\omega}{1-\omega}Q\right)$$

$$b_5^N = \left(-(\delta - r - \lambda_5),\ \frac{-\omega(1-\theta)}{\theta(1-\omega)}(\delta - r - \lambda_5),\ \frac{-z\omega}{\theta},\ Q,\ \frac{\omega(1-\theta)}{\theta(1-\omega)}Q\right)$$

constituirán una base del subespacio estable. Si $\psi_N^0 = (x_1^0, x_2^0, v^0, u_1^0, u_2^0) \in \langle b_1^N, b_3^N, b_5^N\rangle$, una solución del sistema dinámico que parta de esas condiciones constituirá un equilibrio de Nash no cooperativo. La dimensión del subespacio estable es dos si $0 < r(\delta - r) < Q$ y la estrategia buscada será aquella solución del sistema dinámico con $\psi_N^0 \in \langle b_3^N, b_5^N\rangle$. En este caso las condiciones iniciales de deuda, conocidas por todos los jugadores, determinarán las condiciones iniciales de variación monetaria y déficit fiscal de las dos naciones. La dimensión del subespacio es uno si $Q < r(\delta - r) < Q + z$. Ahora el equilibrio de Nash será aquella trayectoria que verifique $\psi_N^0 \in \langle b_5^N \rangle$, lo que exige que las componentes de ψ_N^0 se determinen desde una sola componente de b_5^N. Esta posibilidad implicaría que los valores iniciales de desviación de deuda tendrían que satisfacer: $\theta(1-\omega)x_1^0 + (1-\theta)\omega x_2^0 = 0$. Esta condición exige que en el momento inicial los valores de deuda de una nación superan a los de su objetivo económico y la otra nación, tiene que tener un valor de deuda por debajo del suyo; además, los valores iniciales del resto de las variables vendrían condicionados por el valor inicial de la deuda de una sola nación.

Si las autoridades fiscales de los dos países cooperan, ellas actuarán como un único jugador con un funcional objetivo $J_f = \lambda J_1 + (1-\lambda)J_2$, con $\lambda \in (0,1)$. El parámetro λ que pondera los funcionales de las dos autoridades fiscales vamos a considerarle que tiene el valor 0.5, para suponer el mismo grado de cooperación entre ellas.

Si el B.C.E. no coopera con el jugador cooperativo y los dos piensan que no hay por que perjudicarse, entre ellos jugarán un equilibrio no cooperativo de Nash. Para obtener tal equilibrio operamos de la misma forma que en el caso anterior pero, sólo con dos jugadores. El resultado de este proceso, nos conduce a obtener un sistema dinámico que coincide con el obtenido en el caso anterior si sustituimos el parámetro de ponderación Q por $Q + Q'$. Los argumentos utilizados en el caso anterior pueden ser trasladados, por tanto, a este supuesto sin más que tener en cuenta la corrección.

3.2. EQUILIBRIOS DE STACKELBERG

Si se admite el liderazgo de la política monetaria frente a la fiscal y las autoridades fiscales de los dos países no cooperan, los jugadores seguirán una estrategia de Stackelberg, siendo líder el B.C.E. y seguidores los dos países que entre ellos seguirán un equilibrio no cooperativo de Nash, suponiendo que ambos tienen la misma jerarquía.

Para encontrar una estrategia de equilibrio de Stackelberg debemos incorporar al problema del líder la respuesta de los seguidores, de ahí que, al aplicar condiciones del mínimo a su problema, otra vez eliminamos la condición de transversalidad, se determina un sistema dinámico que tiene en cuenta la reacción de los seguidores, recogida al considerar una nueva variable x respecto al sistema dinámico considerado anteriormente:

$$\dot{x}_1 = rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega} v + a, \qquad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\dot{x}_2 = rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega} v + b, \qquad x_2(0) = x_2^0,$$

$$\dot{v} = -z\omega x_1 - z(1-\omega)x_2 - (r-\delta)v - Qx,$$

$$\dot{x} = rx - v,$$

$$\dot{u}_1 = Qx_1 - (r-\delta)u_1,$$

$$\dot{u}_2 = Qx_2 - (r-\delta)u_2,$$

Realizando un razonamiento análogo al caso de Nash, nos interesa, para encontrar la estrategia de equilibrio, que este sistema dinámico admita un estado de equilibrio, lo que ahora se consigue si los parámetros satisfacen: $r(\delta - r) \neq Q$ y $(r(\delta - r) - Q)^2 \neq zr(\delta - r)$. Las componentes de la solución estacionaria, en este caso, son:

$$x_{1S}^* = \frac{(r-\delta)\left[[(r(\delta-r)-Q)^2-(\delta-r)zr(1-\theta)]a+(\delta-r)\theta rz\dfrac{1-\omega}{\omega}b\right]}{(r(\delta-r)-Q)[(r(\delta-r)-Q)^2-rz(\delta-r)]},$$

$$x_{2S}^* = \frac{(r-\delta)\left[[(r(\delta-r)-Q)^2-(\delta-r)zr\theta)]b+(\delta-r)(1-\theta)rz\dfrac{\omega}{1-\omega}a\right]}{(r(\delta-r)-Q)[(r(\delta-r)-Q)^2-rz(\delta-r)]},$$

$$v_S^* = \frac{-zr(\delta-r)[\omega a+(1-\omega)b]}{(r(\delta-r)-Q)^2-rz(\delta-r)},$$

$$(\delta-r)\,u_{iS}^* + Qx_{iS}^* = 0,\ i=1,2, \qquad x^* = \frac{v_s^*}{r}$$

La matriz de los coeficientes de este sistema dinámico admite seis valores propios distintos, no nulos y al menos siempre tres son positivos

$$\mu_1 = \frac{\delta+\sqrt{(\delta-2r)^2+4r_2}}{2}, \qquad \mu_3 = \frac{\delta+\sqrt{(\delta-2r)^2+4Q}}{2}, \qquad \mu_5 = \frac{\delta+\sqrt{(\delta-2r)^2+4r_1}}{2},$$

y otra vez, el signo de los otros tres valores propios

$$\mu_2 = \frac{\delta-\sqrt{(\delta-2r)^2+4r_2}}{2}, \quad \mu_4 = \frac{\delta-\sqrt{(\delta-2r)^2+4Q}}{2} = \lambda_3, \quad \mu_6 = \frac{\delta-\sqrt{(\delta-2r)^2+4r_1}}{2},$$

donde r_1 y r_2, con $r_2 < r_1$, son las soluciones de la ecuación $\mu^2 - (2Q+z)\mu + Q = 0$, depende de la posición que ocupe el factor $r(\delta - r)$ en la recta real.

Si $r(\delta - r) < r_2$, tenemos tres valores propios negativos y una base de la variedad estable estará formada por tres vectores propios $\{b_2^S, b_4^S, b_6^S\}$ asociados a ellos:

$$b_2^S = \left(-(\delta - r - \mu_2), \frac{-(1-\theta)\,\omega}{\theta(1-\omega)}(\delta - r - \mu_2), \frac{\omega}{\theta}[Q - (r-\mu_2)(\delta - r - \mu_2)], \right.$$

$$\left. \frac{\omega}{\theta(r-\mu_2)}[Q - (r-\mu_2)(\delta - r - \mu_2)], Q, \frac{(1-\theta)\,\omega}{\theta(1-\omega)} Q \right)$$

$$b_4^S = \left(-(\delta - r - \mu_4), \frac{\omega}{1-\omega}(\delta - r - \mu_4), 0, 0, Q, -\frac{Q\omega}{1-\omega} \right)$$

y el vector b_6^S es el mismo que b_2^S pero sustituyendo μ_2 por μ_6. En este caso, si $\psi_S^0 = (x_1^0, x_2^0, v^0, x^0, u_1^0, u_2^0)$ es un vector de condiciones iniciales, una solución del sistema de seis ecuaciones diferenciales partiendo de él, constituirá un equilibrio de Stackelberg si $\psi_S^0 \in \langle b_2^S, b_4^S, b_6^S \rangle$.

Si $r_2 < r(\delta - r) < Q$ encontramos dos valores propios negativos y una trayectoria iniciándose en $\psi_S^0 \in \langle b_4^S, b_6^S \rangle$ será la estrategia de Stackelberg. Por último, si los parámetros satisfacen $Q < r(\delta - r) < r_1$ la estrategia de Stackelberg tiene que iniciarse en $\psi_S^0 \in \langle b_6^S \rangle$. En ambos casos, se pueden realizar los mismos comentarios que en Nash respecto a las condiciones iniciales de las variables. Si $r_1 < r(\delta - r)$ el análisis cualitativo de las soluciones del sistema dinámico no induce a pensar que alguna de ellas pudiera ser un equilibrio de Stackelberg.

La última posibilidad que consideramos en esta sección es suponer que las autoridades fiscales nacionales forman un jugador cooperativo y actúan de seguidoras frente al B.C.E. Los razonamientos a seguir, en este caso, ya han sido expuestos y el resultado de aplicar las condiciones necesarias del principio del mínimo nos determinaría un sistema dinámico idéntico al encontrado en esta subsección pero, sustituyendo el parámetro Q por $Q + Q'$. Un análisis similar al realizado, nos permitiría encontrar el equilibrio de Stackelberg buscado.

Notemos que si suponemos que el parámetro δ es inferior a r, los cuatro sistemas dinámicos que hemos considerado admiten solución estacionaria, punto de silla, con variedad estable asociada de dimensión tres. Observemos que en Nash trabajamos en un espacio de dimensión cinco y en Stackelberg de dimensión seis. Como los jugadores sólo conocen las condiciones iniciales de deuda, para generar un vector de condiciones iniciales sobre el correspondiente subespacio, uno de los jugadores debería especificar sus condiciones iniciales, al menos en Nash, pues en Stackelberg podría considerarse condiciones iniciales sobre la variable instrumental x, pero ello condicionaría las condiciones iniciales del resto de los jugadores y por tanto, la evolución subsiguiente de las variables. Además, si a un jugador se le permite la selección obligaría al resto de los jugadores a tomar condiciones iniciales distintas dependiendo de que se juegue Nash o Stackelberg. Para eliminar el problema, si $\delta < r$, y sólo en este caso, puede encontrarse un valor inicial de variación monetaria, dependiente de los valores iniciales de las deudas:

$$v^0 = \frac{(z+Q)\big(Q+(\delta - r - \mu_2)(\delta - r - \mu_6)\big) - Q(\delta - (\mu_2 + \mu_6))(\delta - r - \lambda_5)}{(\delta - r - \lambda_5)(\delta - r - \mu_2)(\delta - r - \mu_6)}[\omega x_1^0 + (1 - \omega) x_2^0]$$

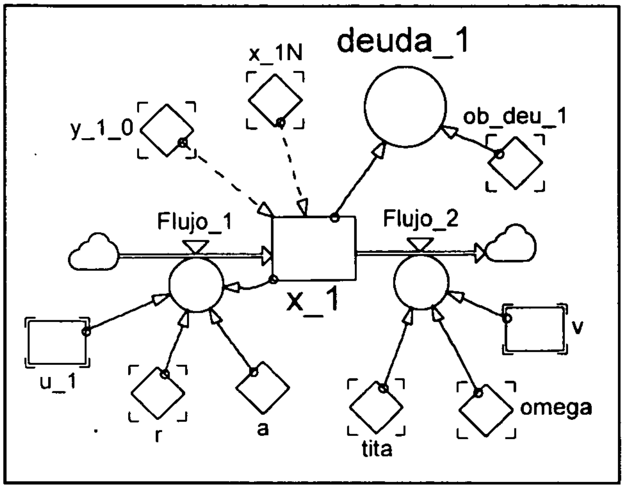
que permite tomar valores iniciales de déficit fiscal, para las dos naciones, que se pueden utilizar tanto en Nash como en Stackelberg, función únicamente de los valores iniciales de las dos deudas. Este resultado está probado en Soto y Fernández (1998, b) y la condición $\delta < r$ es la que vamos a considerar para la simulación.

4. DESARROLLO Y APLICACION DEL SOFTWARE

Desde los resultados obtenidos en la sección precedente, nos ocupamos en ésta de ofrecer, desde el ordenador, un taller de trabajo en forma de tablero de simulación donde un analista pueda ensayar pautas de comportamiento y políticas sobre el juego diferencial planteado en los supuestos que hemos establecido. Así podrá prever modos de comportamiento no deseados y valorar y comparar estrategias en pos de poder determinar la más favorable para sus intereses.

Para la construcción del taller hemos seguido distintas etapas. Inicialmente adecuamos el planteamiento del problema que nos ocupa a la metodología de la Dinámica de Sistemas, que permite integrar cualquier sistema dinámico. Las variables del sistema dinámico serán los niveles del modelo, que varían en el tiempo según el impulso de unos flujos calculados desde los propios niveles y desde las variables auxiliares y las constantes. Estas últimas, que poseen un carácter exógeno, recogen información e inciden en la evolución de las trayectorias, se corresponden con los parámetros de los sistemas dinámicos y tendrá que ser el analista el que las deberá declarar previamente a la simulación.

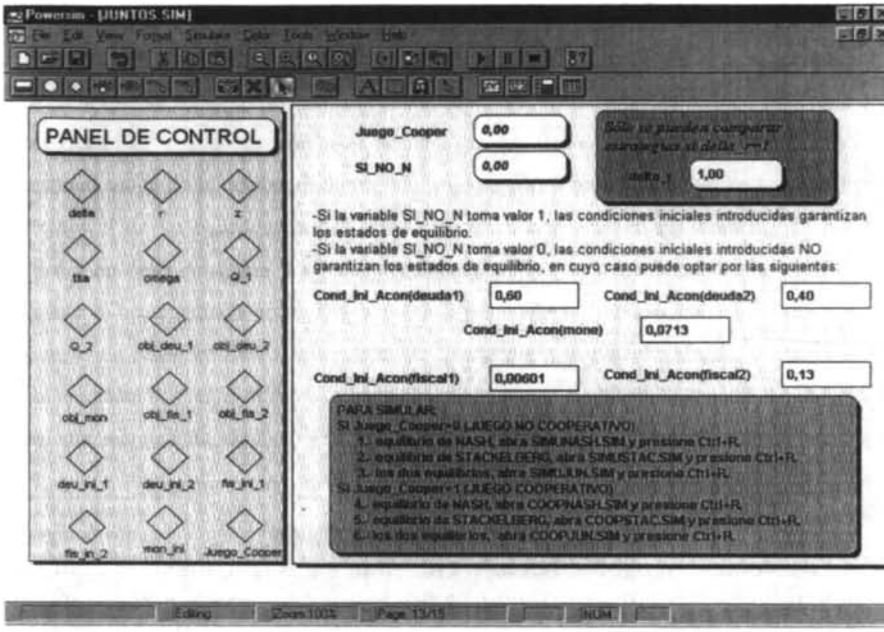
El diagrama de flujos siguiente recoge el comportamiento de la variable deuda del país denotado por uno, para el supuesto de Nash. Se consideran una variable de nivel y dos flujos afectados por elementos declarados en otros diagramas de flujos o en el actual.



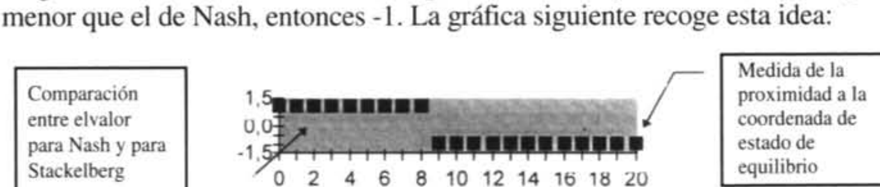
Integrando todos los diagramas de flujos para todas las variables de un mismo sistema dinámico estaremos en condiciones de simular el comportamiento de ese sistema dinámico. La unidad de tiempo elegida es un año, se utiliza el método de integración Runge y Kutta de orden cuatro y un paso para la simulación de 0.0625 años.

El programa se inicia desde Powersim y para comenzar su ejecución dispone de un panel de control donde pueden especificarse los valores de todos los parámetros y las condiciones iniciales de todas las variables, excepto el valor de la variable para Stackelberg que siempre se considera determinado por los valores iniciales de deuda. Para utilizar el panel de control, basta pinchar con el ratón en el correspondiente icono. La primera pantalla además contiene la especificación Juego_Cooper para determinar si se pretende simular con cooperación en política fiscal, en cuyo caso debería asignarse el valor uno o con no cooperación en política fiscal cuyo indicativo será un cero.

Si las condiciones iniciales introducidas por el usuario no corresponden a las que se necesita para seguir el equilibrio deseado, el programa proporciona unas condiciones iniciales de las variables que sí lo permiten. A partir de ese momento es posible simular el comportamiento de las variables en el equilibrio de Nash con no cooperación para lo que es necesario abrir el fichero SIMUNASH.SIM; en el equilibrio no cooperativo de Stackelberg sin más que abrir SIMUSTAC.SIM y comparar las trayectorias de las variables en ambos equilibrios para lo que es necesario abrir el fichero SIMUJUM.SIM. Análogo procedimiento puede realizarse cuando se considera que las autoridades fiscales nacionales cooperan. Entonces, para las mismas opciones se abrirán los ficheros COOPNASH.SIM, COOPSTAC.SIM y COOPJUN.SIM respectivamente. Cuando se abre y ejecuta el correspondiente fichero, se visualiza la evolución de las variables en diferentes gráficas.



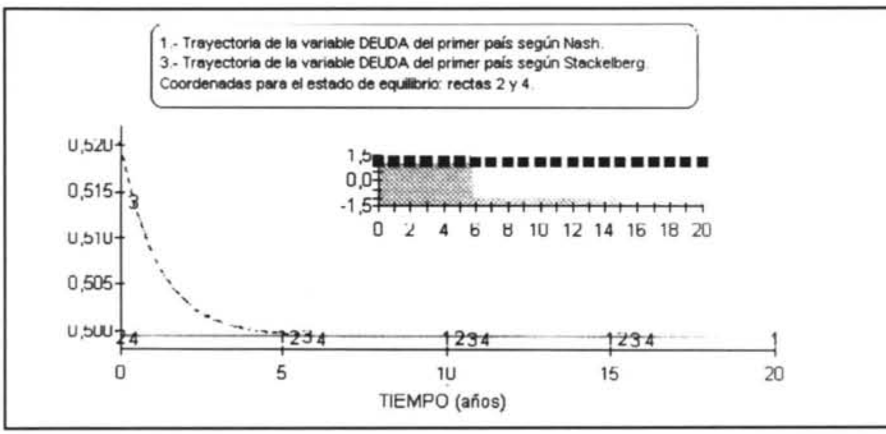
En el caso de que realicemos las comparaciones y en ambos casos, existe la posibilidad de analizar cómo evolucionan los valores de las variables en su convergencia hacia el correspondiente equilibrio. La cuestión es conocer, desde el mismo programa, que grado de convergencia existe hacia la correspondiente solución estacionaria. A tal fin, tanto en el fichero SIMUJUM.SIM como en el COOPJUN.SIM, se acompaña a la gráfica de las trayectorias de cada variable para los dos supuestos, con otra en la que se recogen dos estimaciones, una representada por una línea generada con el marcador ■ y otra por una zona sombreada. La línea toma valores -1 o 1. Vale -1 cuando el valor de la correspondiente variable para el supuesto de Stackelberg está más próximo al de su coordenada del estado de equilibrio que en el supuesto de Nash y valdrá 1 en caso contrario. La zona sombreada indica en cada instante qué valor de la variable es más grande entre los que toma para los dos supuestos. Si el valor en el supuesto de Nash es menor que en el de Stackelberg, toma el valor 1; si los dos son iguales valdrá 0; y si el de Stackelberg es menor que el de Nash, entonces -1. La gráfica siguiente recoge esta idea:

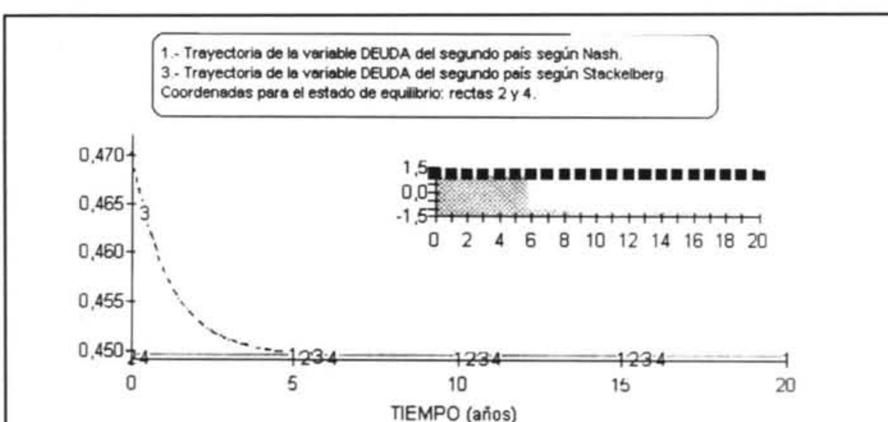


Además de las cinco gráficas de las trayectorias de cada una de las variables, se incluye una sexta donde se recogen las distancias euclídeas del vector con componentes los valores de las variables, al correspondiente estado de equilibrio, lo que da medida de cuál es la mejor convergencia global de los dos supuestos.

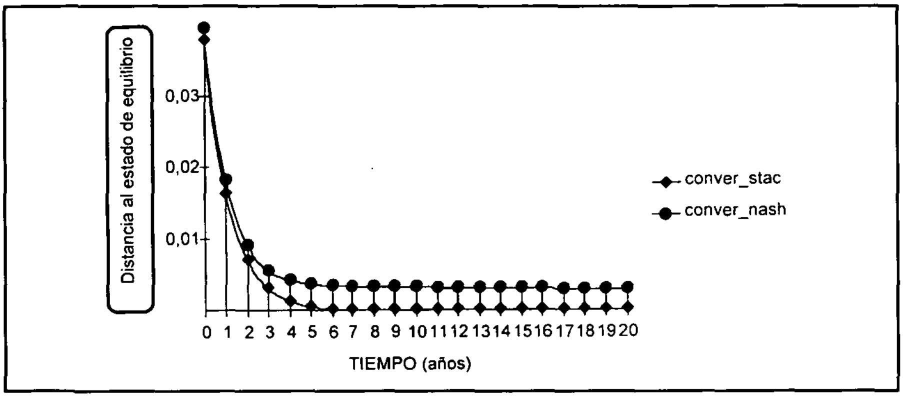
A modo de ejemplo de la capacidad de simulación del software, las siguientes gráficas recogen el comportamiento de las variables de deuda en un escenario en el que suponemos que no existe cooperación entre los jugadores, siendo los valores de los parámetros los siguientes:

$\delta = 0.02$, $r = 0.03$, $z = 0.04$,
$\theta = 0.6$, $\omega = 0.6$, $Q = 0.7$, $Q' = 0.4$,
$\bar{d}_1 = 0.5$, $\bar{d}_2 = 0.45$, $\bar{m} = 0.01$,
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 0.03$,
$d_1^0 = 0.52$, $d_2^0 = 0.47$





Las trayectorias de las variables de deuda apenas difieren para los dos supuestos, pero la gráfica siguiente indica cómo existe una convergencia global más rápida hacia el estado de equilibrio del sistema, cuando se parte de la estrategia de Stackelberg.



Nuestro propósito en este trabajo ha sido proporcionar al experto una herramienta para el análisis de las distintas estrategias a seguir en el juego diferencial planteado, correspondiéndole al mismo la interpretación de los resultados dependiendo de los parámetros que él estime, por lo que nosotros obviamos la cuestión.

Los autores estarían complacidos en proporcionar, a quien esté interesado en el tema, una copia del software implementado para este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Aarle, B. V.; Bovenberg, A. L. y Raith, M. G. (1997): «Is there a Tragedy of Common Central Bank? A Dynamic Analysis». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, pp. 417-447.

Aracil, J. y Gordillo, F. (1997): *Dinámica de sistemas.* Alianza Universidad Textos. Madrid.

Basar, T. y Olsder, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory.* Academic Press. London.

Beesma, R. M. y Bovenberg, A. L. (1997): «Central Bank Independence and Public Debt Policy». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, pp. 873-894.

Currie, D. (1992): «European Monetary Union: Institucional Structure and Economic Perfomance». *The Economic Journal*, vol. 102, pp. 248-264.

Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Field.* Springer Verlag. U.S.A.

Levine, P. y Brochiner, A. (1994): «Fiscal Policy coordination and EMU: A Dynamic Game Approch». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 18, pp. 699-729.

ModellData AS, editores (1993): *Powersim. User's Guide and Reference.* ModellData AS. Norway

Petit, M. L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis.* Cambrigde University Press. New York.

Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1993): *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North-Holland. Amsterdam.

Soto, D. y Fernández, R. (1998, a): «Estrategias en Política Monetaria y Fiscal ante la Unificación Monetaria. Un juego diferencial». (pendiente de publicación).

Soto, D. y Fernández, R. (1998, b): «Estrategias no cooperativas de deuda y déficit en la unión Monetaria». XII Reunión Asepelt España. C.D. Rom de las Actas del Congreso.

Tabellini, G: (1986): «Money, Debt and Deficits in a Dynamic Game». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 10, pp. 427-442.