

PSICOLOGIA PIAGETIANA Y EDUCACION MATEMATICA

ANDRES NORTES CHECA
ROSA MARTINEZ ARTERO

RESUMEN

El artículo comienza con una introducción acerca de la epistemología genética, las teorías del conocimiento, los diagramas reflejos y las operaciones, terminando en el análisis de la asimilación y la acomodación. Finalmente, se estudian los estadios evolutivos básicos tomando como referencia el constructo de las estructuras.

También se analizan las implicaciones de la teoría de Piaget en la educación matemática a partir de algunos investigadores y se concluye que en los estadios piagetianos son interesantes los límites, pero no su orden.

ABSTRACT

We do an introduction about genetic epistemology, knowledge's theory, the reflex diagrams and the operations, to stop then on the assimilation and accomodation. At the end, the building of structures takes us to the basic stages of concrete and abstract operations.

We approach Piaget's theory in Mathematical Education with some researchers, concluding that what really can be asked to Piaget's stages are the border lines of each stage, but not their order, and that not every people is able to arrive the last one.

PALABRAS CLAVE

Epistemología genética, Piaget, Enseñanza de la matemática, Psicología Evolutiva.

KEYWORDS

Genetic epistemology, Piaget, Mathematics Teaching, Evolutive Psicology.

1. COMENTARIOS ACERCA DE LA EPISTEMOLOGIA GENETICA, DEL CONOCIMIENTO, DE LOS ESQUEMAS REFLEJOS Y DE LAS ESTRUCTURAS COGNITIVAS

Piaget con su *epistemología genética* intenta explicar la relación entre el sujeto y el objeto desde una perspectiva no tratada por otras epistemologías. De la relación sujeto-objeto cabe esperar: primacía del objeto, primacía del sujeto o bien interacción sujeto-objeto, encontrando para cada una de estas posiciones, tres actitudes epistemológicas: antireduccionismo, reduccionismo y constructivismo, situándonos así ante nueve posibles epistemologías de las que la intersección constructivismo-interacción*sujeto-objeto constituye el punto de partida de Piaget para explicarnos la formación de los conocimientos, le denomina *constructivismo relacional* y que presenta dos características fundamentales. Por un lado, manifiesta una profunda preocupación por la idea de totalización y la de formación histórica, que la lleva a efectuar la síntesis entre las consideraciones de estructura (totalidad) y génesis (formación). Por otro lado, considera el conocimiento como unido a una acción

que modifica el objeto y que solo lo alcanza a través de las transformaciones introducidas por esa acción.

El problema de la construcción o creación de lo que no existía antes es el aspecto central de la epistemología constructivista y Piaget a lo largo de los años ha intentado demostrar que un nivel que siga a otro siempre es una reorganización del anterior. La ausencia de un comienzo absoluto que conlleva esta reorganización o reconstrucción o autorregulación, así como la acentuación del desarrollo de forma ilimitada hacia niveles superiores, constituyen un equilibrio temporal abierto a nuevas posibilidades en cualquier nivel de conocimiento, individual o científico. Esta sucesión constante de equilibrio es la piedra fundamental que ha mantenido Piaget a lo largo de sus descubrimientos e investigaciones.

Como hay proposiciones que se constata su verdad o falsedad por deducción (verdades normativas) y otras por inducción (verdades fácticas), nos lleva a dos conjuntos de verdades, y la *teoría del conocimiento* que sea, tendrá que responder al problema de la relación entre las verdades normativas (conocimiento lógico-matemático) y las verdades fácticas (conocimiento físico).

Piaget intenta solucionar este problema y postula una continuidad funcional entre la vida y el pensamiento, de tal forma que la asimilación biológica se prolonga en una asimilación intelectual, y esta continuidad entre lo biológico y lo psicológico queda patente en la propiedad intrínseca de toda organización vital en que la *acción*, mecanismo mediante el cual el organismo entra en contacto con el entorno, lo asimila y actúa sobre él transformándolo.

Como no existe acción sin reacción, Piaget utiliza el término *interacción* para designar las relaciones entre el individuo y lo real, que van a poner de manifiesto, en su progresiva construcción, esa solución de continuidad entre formas materiales y pensamiento.

Si hojeamos cualquier tratado de Piaget vemos que los reflejos en el recién nacido manifiestan una organización interna que intenta mantener un grado de equilibrio con el mundo que le rodea. Estos intercambios o interacciones garantizan la supervivencia del individuo con su adaptación biológica, pero al mismo tiempo constituyen un desencadenamiento histórico en que cada episodio depende de los anteriores y condiciona los siguientes, con lo que existe una reacción total que es principio de la psicología.

Quiere esto decir que ninguna acción es totalmente nueva siendo de destacar que se puede transponer, que se puede generalizar, que se puede esquematizar. Pero para poder hablar de esquemas y no de simples movimientos o acciones es preciso que las acciones conserven una organización interna cada vez que aparecen. Lógicamente en los primeros intercambios con el entorno aparecen ciertos desajustes por parte de los *esquemas reflejos*, ya que encuentran resistencias para su aplicación, estableciéndose un juego ajustes-desajustes-ajustes (equilibrio-desequilibrio-reequilibrio) pero que gracias a su autoconservación podrá ser establecido mediante un reajuste de los viejos esquemas a las nuevas situaciones. Los esquemas reflejos se ven sometidos así a un proceso de diferenciación conducentes a la elaboración de otros nuevos, adaptados a ciertas clases de situaciones, a mitad de camino entre lo reflejo y lo intencional, permitiendo un proceso de coordinación de los mismos generado a partir del juego de asimilaciones recíprocas, dando origen a elaboración de esquemas. El bebé construye así a partir de los reflejos una progresión ilimitada de una serie de marcos asimilados, que le llevan a estructurar la realidad

en la que se encuentra inmerso, confiriendo significaciones a su universo. Se pasa así de acciones automáticas definidas en un contexto puramente biológico -los reflejos- a unos instrumentos de comprensión de la realidad -los esquemas de acción- que pueden ser considerados como unidades básicas del funcionamiento cognitivo.

Pero Piaget observó que estos esquemas de acción, hacia los 18 meses, pueden organizarse en totalidades, permitiendo una estructuración espacio-temporal y causal del mismo universo práctico, dando origen al grupo de los desplazamientos como primera estructura intelectual y al establecimiento de la conservación del objeto y de las situaciones en el espacio próximo, siendo el primer invariante cognitivo que abre el camino del pensamiento racional.

La función simbólica que aparece en este momento va a hacer posible representar las acciones, constituyendo esquemas de acción interiorizados que cumplen la misión de marcos asimiladores pero con un funcionamiento más móvil, abriendo nuevas y más efectivas posibilidades intelectuales. Pero al igual que los esquemas sensoriomotrices, los esquemas representativos sufrirán desajustes que al recomponerse y mediante diferenciaciones, diversificaciones y combinaciones progresivas, generarán nuevos esquemas que al coordinarse unos con otros, respetando ciertas leyes de composición interna, se constituirán en totalidades organizadas, siendo estos esquemas denominados *operaciones*.

Después de los esquemas en su naturaleza se van desligando de lo *concreto* y se van organizando nuevas estructuras, pero ahora partiendo de representaciones de representaciones, posibilitando operar con operaciones -operaciones a la segunda potencia- o con operaciones de operaciones -operaciones a la tercera potencia- y con ello el pasar a lo *formal*, marcando un final en el desarrollo de los esquemas u operaciones del sujeto.

2. LA EQUILIBRACION DE LAS ESTRUCTURAS COGNITIVAS

Pero si queremos, en esa visión general de la psicología piagetiana, hacer mención de la equilibración de las estructuras cognitivas. Posiblemente exista una inclusión de la génesis de lo psicológico en la génesis de lo vital y cualquier estructura biológica podría extenderse más allá de su propia corporalidad espacio-temporal, implicando el reconocimiento del comportamiento como verdadero motor de la evolución, pero además, dentro de esa evolución, la consideración de las estructuras cognitivas como órganos intelectuales cuya formación depende de las características del programa inicial (herencia), de las condiciones particulares de existencia (intercambio con el medio) y de un centro funcional que a modo de unidad central de procesos de un ordenador posibilite la lectura y realización del programa (funcionamiento). Para que estos tres factores actúen de forma coordinada es preciso un cierto factor, la autorregulación que mantenga la armonía del sistema.

El *equilibrio*, por tanto, es una propiedad constitutiva de la vida misma y la movilidad propia de los esquemas y de las estructuras es el resultado del proceso centrípeto de asimilación y el proceso centrífugo de acomodación que constituyen los dos procesos de la función adaptativa que evitan cualquier tipo de disfunción en la aprehensión de lo real.

Este equilibrio, solo puede ser momentáneo, e irá seguido de un estado de desequilibrio que al ser superado generará una nueva situación de equilibrio, bien por

modificación y/o mejora del mismo, constituyendo los desequilibrios los factores desencadenantes de las superaciones y el verdadero motor del desarrollo.

Piaget (1978) describe este *proceso de equilibración* destacando tres aspectos secuenciales distintos:

- 1) Las perturbaciones que se inician en forma de accidentes exteriores y que constituyen la fuerza motriz del proceso.
- 2) Las compensaciones que tienen como función anularlas o neutralizarlas bien por inversión (modificación en sentido inverso del esquema), bien por reciprocidad (por diferenciación del mismo a fin de acomodarlo al elemento perturbador).
- 3) Tanto unas como otras son integradas en los sistemas operatorios, las primeras a título de variaciones previsibles o deducibles y las segundas a título de operaciones inversas.

Pero, ¿cómo una perturbación puede desembocar en una compensación?. Una regulación prospera en dos sentidos: *anticipación* y *retroacción*. En el periodo sensoriomotriz las regulaciones iniciales evolucionan mediante correcciones posteriores que al coordinarse por la ley de recurrencia podrán llegar a establecer retroacciones y que a su vez se prolongarán en procesos anticipadores. Todo esto dará lugar a la formación de un nivel representacional, el llamado subperiodo preoperacional intermedio entre una simple acción de tanteo y una operación programada, llegando Piaget a la conclusión de que las regulaciones, en un momento del desarrollo, desempeñan una importante función en la elaboración de un *proceso de reflexión* que desemboca en un plano superior y, para ello, se requiere una reorganización o reconstrucción cognitiva para adaptar o ajustar a la nueva estructura lo abstraído del plano inferior. La reorganización de aquello que ha sido transferido se denomina *producto de reflexión*.

Este proceso de construcción basado en interacciones alternadas de procesos y productos de reflexión, se encuentra ligado al juego de la *abstracción reflexiva* que extrae su información de la coordinación de las acciones del sujeto (operaciones) que supone una proyección en un nivel superior de lo extraído en el nivel precedente, así como una reorganización mental.

Resumiendo, lo que nos dice Piaget es que cada nivel da lugar a nuevas equilibraciones y esto se lleva a cabo mediante regulaciones de rango superior, que prolongan las regulaciones del nivel de partida, mediante la abstracción reflexiva. Pero además, el nuevo nivel superior constituye un regulador que controla las regulaciones de los niveles inferiores. Esto lo denomina Piaget un *producto de reflexión* que "representa el prototipo de una regulación de regulaciones, pudiendo considerarse como una regulación que regula todo lo que las regulaciones anteriores han dejado insuficientemente regulado" (Piaget, 1978).

¿Qué se entiende por *sistema cognitivo*? Piaget (1978) indica que pueden ser simples descripciones, como cuando se trata de observables conceptualizados por el sujeto con ocasión de una acción o de un acontecimiento particular. También serán los instrumentos cognitivos de los que se sirve el sujeto en sus conceptualizaciones. Pero también serán las composiciones operatorias particulares elaboradas por el sujeto con ocasión del problema planteado. Tanto las composiciones locales como estas explicaciones se referirán a

estructuras más amplias (agrupamientos, grupos, etc.) que constituyen el nivel superior de estos diversos tipos de sistemas.

De todo lo anterior se deduce que las fronteras de un sistema cognitivo sean móviles cuando por su especificidad lo hacen imposible. En cualquier caso la característica fundamental de los sistemas cognitivos es que están formados de esquemas cuya extensión y comprensión pueden ser enriquecidos en un doble proceso continuo de asimilación y acomodación.

3. LA CONSTRUCCION DE LAS ESTRUCTURAS

La teoría de Piaget descansa sobre el fundamento de que toda construcción tiende a llegar a una forma de equilibrio interno en relación con el sistema construido, porque esta construcción desempeña una función de compensación en relación con ciertas perturbaciones. El proceso general se inicia con el ejercicio de un esquema de asimilación, cuya activación se encontraría dificultada por perturbaciones; las compensaciones que resultarían se traducirían en una construcción en la que las regulaciones que caracterizan a sus fases serían al mismo tiempo compensadoras con respecto a la perturbación, pero a su vez formadoras en relación con la construcción, hasta la constitución de una nueva estructura de equilibrio y así sucesivamente. El esquema inicial podría ser adquirido, proveniente de un desarrollo similar anterior o bien innato, constituyendo el producto de regulaciones o compensaciones de naturaleza orgánica. Los conceptos de desequilibrio y reequilibración aseguran la posibilidad de una soldadura entre los puntos de vista funcionalistas y el propio del estructuralismo genético.

Piaget distingue dos grandes planos en el desarrollo: El plano de la acción y el plano de la representación. El de la acción, denominado periodo sensoriomotor, y el de la representación, subdividido en dos grandes bloques, el periodo de preparación y organización de las operaciones concretas y el periodo de las operaciones formales.

Mientras que en el periodo sensoriomotor (0 a 2 años) el sujeto pasa del nivel reflejo a una organización relativamente coherente de las acciones sensoriomotoras ante su ambiente inmediato, en el periodo de preparación y organización de las operaciones concretas se inician las primeras simbolizaciones y concluye con los comienzos del pensamiento formal durante los primeros años de la adolescencia. Se realiza un gran proceso desde las acciones elementales iniciales hasta las coordinaciones con diferenciaciones, situando los instrumentos de interacción cognoscitiva en el plano de la acción efectiva, actuando su reflexión dentro de un sistema conceptualizado. Lo que se adquiere en el nivel de la inteligencia o de la acción sensoriomotora no da lugar a una representación adecuada en el plano del pensamiento; el paso de la acción al pensamiento o del esquema sensoriomotor al concepto se realiza mediante una diferenciación lenta y laboriosa que depende de las transformaciones de la asimilación.

Sobre los 5-6 años comienza la descentración que permite el descubrimiento de algunas conexiones objetivas gracias a las funciones constituyentes, que participan de la lógica y de la causalidad porque establecen diferencias entre el individuo y la clase; la falta de reversibilidad hace que no se pueda conservar la materia. El niño del subperiodo preoperacional (2-7 años) es sumamente concreto, lento y estático; relativamente no socializado, no se preocupa de la prueba o justificación lógica y no tiene conciencia del

efecto que tienen sus comunicaciones con los demás, siendo los rasgos que caracterizan el pensamiento preoperatorio y que lo diferencian tanto de la inteligencia sensoriomotora como del pensamiento operatorio: ausencia de equilibrio, experiencia mental, concentración, irreversibilidad, estatismo y egocentrismo.

Han de transcurrir aproximadamente cinco años para que las acciones se interioricen y se organicen a nivel representativo en un sistema. La inteligencia preoperatoria, que muestra que el niño es capaz de razonar de manera totalmente lógica en relación con situaciones concretas, difiere cualitativamente de la sensoriomotora, y aunque los preconceptos no son aun conceptos lógicos, sí llegan a evocar gran cantidad de objetos, yendo de lo particular a lo particular, procediéndose por analogías inmediatas.

El paso del nivel preoperacional (2-7 años) al nivel de las operaciones concretas se produce por una abstracción refleja, que extrae de las estructuras inferiores los materiales para construir las superiores; pero además, por una coordinación que abarque todo el sistema, produciendo su cierre y por una autorregulación del proceso, tendente a equilibrar las conexiones en sentido directo e inverso.

"Cuando un concepto comienza por ser preoperatorio se establece un primer equilibrio que no permite la reversibilidad llamándolo funcional, mientras que cuando se integran las distintas funciones en un todo, se constituye una operación, se hace reversible y el equilibrio es operacional. Se distinguen pues dos formas de equilibrio, el funcional o irreversible que se alcanza mediante la intuición y el operacional que es reversible y supone una operación" (Nortes y Serrano, 1991).

La aceptación de la conservación no es una característica del pensamiento del niño antes de la etapa de las operaciones concretas (Orton, 1990). Al comienzo del pensamiento operacional concreto cierto número de destrezas reflexivas emergen y se desarrollan permitiendo el paso de un enfoque intuitivo e informal, realizado de forma manipulativa con objetos y materiales, a un enfoque como actividad utilizando lápiz y papel. El término operación posee un significado preciso para Piaget considerado como una acción efectuada en la mente y organizada en un sistema y la concreción de las operaciones depende de las acciones efectuadas en la mente basadas en un conocimiento previo y de las manifestaciones concretas subyacentes.

Las críticas que diferentes autores han hecho de la descripción piagetiana del periodo preoperatorio recogen principalmente la idea de que el niño de edad preescolar es mucho más capaz de lo que creía Piaget, que puede razonar lógicamente en muchas situaciones y que, en el fondo, no es tan grande la distancia que lo separa de niños de mayor edad. Además enfatizan una distinción desestimada por Piaget: la distinción entre el nivel de competencia y el nivel de ejecución o de actuación, ya que Piaget se interesó principalmente en el nivel de competencia, en clara relación con las estructuras cognitivas del sujeto y desestimó el segundo.

Y ¿cuál es la significación psicológica de las operaciones concretas?. Si lo propio del pensamiento intuitivo era el egocentrismo y una concentración perceptiva, lo propio del pensamiento operatorio es poder seguir las transformaciones sucesivas de la realidad a través de todos los caminos y llegar a coordinar los distintos puntos de vista. Las acciones quedan marcadas por la reversibilidad, bien por inversión, bien por reciprocidad y la conservación es uno de los indicios más claros del paso de la intuición a la operación.

Piaget encontró que las acciones que llevan a cabo los niños presentan formas de organización posibles de ser descritas en términos de estructuras, que denominó estructuras operatorias correspondientes a las operaciones reales de la inteligencia, encontrando unas semejanzas y diferencias entre las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias ya que las primeras representan un papel de herramienta teórica útil para la descripción de las segundas.

Brown y Desforges (1984) se refieren al modelo logicomatemático de Piaget como un modelo de composición del conocimiento en términos estructurales, especificando los elementos fundamentales de los actos de conocimiento, permitiendo representar y comprender la capacidad cognoscitiva de las etapas operacional concreta y formal, siendo el *agrupamiento* la estructura psicológica operatoria cuya misión es formalizar las operaciones elementales que realizan los niños en el subperiodo operacional concreto.

La conservación es para Piaget uno de los indicios más claros de la agrupación de las acciones en sistemas organizados, es decir, uno de los indicios más claros del paso de la intuición a la operación. Las diferentes nociones tienen diferentes velocidades de adquisición o dicho en términos más teóricos sus velocidades de estructuración son distintas, pero además estas velocidades de estructuración dependen de la familiaridad de la tarea.

En la etapa de las operaciones concretas se alcanza la reversibilidad al coordinar las anticipaciones y las retroacciones, aunque a operaciones referidas a objetos y transformaciones reales que permanecen ligadas a acciones y manipulaciones sucesivas. Es en la etapa de las *operaciones formales* cuando el conocimiento sobrepasa lo real, insertándose en lo posible y posteriormente en lo necesario, sin pasar por lo concreto.

El adolescente (de 11/12 a 15/16 años) en este periodo se caracteriza por construir teorías y sistemas; se centra en los problemas inactuales que no tienen relación con los problemas de cada día, elaborando teorías abstractas con gran facilidad. El niño pasa de cosas concretas realizadas con objetos tangibles y manipulables, sometidos a experiencias efectivas, a objetos ausentes reemplazados por entes. La primera característica de las operaciones formales es la de poder realizarse sobre hipótesis y no sobre objetos. Mientras que el pensamiento concreto es la representación de una acción posible, el pensamiento formal es la representación de una representación de acciones posibles, como si de un pensamiento de segundo orden se tratara.

En todas las etapas descritas por Piaget, se tiende hacia el equilibrio que es el punto a donde concluye la actividad humana. De la inteligencia sensoriomotriz del lactante hasta la inteligencia hipotético-deductiva del adolescente, se construye el universo desde un punto egocéntrico o inmediato para pasar posteriormente a relacionar las cosas agrupándolas y adaptándolas a una realidad cada vez más amplia.

Piaget, a través de sus experimentos, confirma que la forma general del grupo INRC es el modelo del pensamiento del adolescente, al igual que el agrupamiento lo es para el niño.

El grupo INRC es una estructura algebraica fundamental, que surge durante la preadolescencia, que explica la mayoría de las operaciones conseguidas o por conseguir, y que puede ser detectada tanto en sus patrones de acción, razonando o solucionando problemas, actuando con proposiciones o con objetos materiales.

Se dice que el pensamiento formal es un pensamiento universal, uniforme y homogéneo, que atiende a la estructura de las relaciones entre los objetos antes que a su contenido y es similar en todos sus rasgos al pensamiento adulto. Sin embargo, (Carretero y León, 1990) existe un desacuerdo centrado en tres aspectos:

- Las distintas tareas formadas no presentan la misma dificultad
- El contenido de la tarea se muestra como una variable que influye en gran medida en su resolución
- El porcentaje de alumnos que muestran poseer un pensamiento claramente formal se sitúa en algunas investigaciones sobre el 50%.

Los datos actualmente disponibles sugieren que el pensamiento formal no solo no es universal sino que tampoco es un pensamiento que posea una estructura de conjunto. Mas bien está constituido por un conjunto de estrategias o esquemas que no se adquieren unitariamente y que dependen decisivamente del contenido de la tarea a la hora de resolver los problemas planteados. Todo ello hace pensar que también dependen fuertemente del grado de instrucción recibida (Carretero y León, 1990).

4. LA TEORIA DE PIAGET EN LA EDUCACION MATEMATICA

El nombre y el trabajo desarrollado por Piaget siempre han ido unidos a la Didáctica de las Matemáticas, no concibiéndose ésta sin aquél. De siempre Piaget y la Escuela de Ginebra han sido tratados en las enseñanzas impartidas dentro de las Escuelas de Magisterio. Por otra parte, los alumnos hasta ahora de EGB han seguido en sus programaciones la estructuración que Piaget hizo del desarrollo de la inteligencia en el niño. Basta con revisar las características generales de los Programas Renovados (Escuela Española, 1985) que como razones que aconsejan la concepción de los programas destacan las psicológicas, sociológicas y organizativas. Cuando se refieren a las razones psicológicas, dice: "*(...) el pensamiento lógico-formal se instala en la mente humana en torno a los once o doce años*" (p. III). Cuando se refiere a razones pedagógicas y didácticas, dice: "*(...) a partir de los once años, la inteligencia sufre profundas transformaciones (...)*" (p. IV) y añade: "*El profesorado (...) iniciará (...) a los alumnos en tareas, ejercicios y problemas que pongan en juego la capacidad lógico-abstracta (...)*".

Pero no solo los Programas Renovados de EGB parecen estar fundamentados en el desarrollo lógico del niño y en las teorías piagetianas, sino que la actual LOGSE, cuya implantación paso a paso reemplazará a la LGE, establece que la Enseñanza Primaria termine a la edad de 11/12 años, en el paso de las operaciones concretas a las formales, en donde el sujeto pasa de una inteligencia lógico-concreta a una inteligencia lógico-formal con la aparición del pensamiento hipotético-deductivo.

Un artículo muy interesante de Collis (1980) y aparecido en *Infancia y Aprendizaje* en 1982 nos relaciona la matemática escolar y los estadios de desarrollo, estableciéndose los siguientes niveles de funcionamiento cognitivo:

- 1) Preoperatorio (4-6 años).
- 2) Temprano de operaciones concretas (7-9 años).

- 3) Medio de operaciones concretas (10-12 años).
- 4) Ultimo de operaciones concretas (formal temprano o de generalización concreta) (13-15 años).
- 5) De operaciones formales (16 años en adelante) avisando Collis que *"las edades cronológicas correspondientes a los estadios varían mucho de una a otra cultura, de una a otra persona y, de hecho, de una a otra tarea en la misma persona: es el orden de sucesión de los estadios lo que permanece invariante"* (p.42).

Un problema de la teoría de Piaget es el de precisar las edades en que los niños pasan de una etapa a otra, ya que está claro que tiene que existir un periodo de transición, pudiendo ocurrir que los niños se encuentren en periodos de transición durante una parte de su niñez mucho mayor que el tiempo en que actúan claramente dentro de una etapa.

Piaget estableció en su teoría las edades en que se produce el cambio de etapa pero experimentos posteriores han indicado que muchos alumnos no comenzaban a emerger hasta los 14 ó 15 años mientras que Piaget lo establecía a los 11 años. A este respecto Cockcroft (1985) aludió a que *"parece que hay una diferencia de 7 años en cuanto al momento en que se logra la comprensión del valor de posición necesaria para saber qué número es una unidad mayor que 6.399"* (p. 124), queriendo decir que un alumno medio está capacitado para ello a los 11 años, pero no a los 10, que hay alumnos que a los 14 años no pueden hacerlo y otros de 7 años si lo hacen.

Collis (1982) efectúa el desarrollo cognitivo en relación con algunos conceptos matemáticos. Así en *Números y operaciones* el niño del estadio de las primeras operaciones concretas *"puede manejar con sentido ítems aritméticos que suponen la realización de una clausura, aun cuando esto exija llevar a cabo una comparación con un resultado dado"*. En el estado medio de las operaciones concretas *"puede manejar dos clausuras en secuencia"* y *"puede manejar números grandes si se trata de una operación única"*. En el estadio de la generalización concreta *"puede utilizar ya elementos generalizados y hacerlo con sentido además de haber generalizado lo bastante la idea de operación"*. En el estado de las operaciones formales *"la clausura es considerada, en el sentido matemático, como un fenómeno que hace posible determinadas cosas, pudiendo resolverse los problemas en que las letras representan números o variables que empleen una operación bien definida"*.

Un estudio que realizamos (Nortes y Serrano, 1991) del bloque numérico de los contenidos de Matemáticas de 6º de EGB, para ver si se trataban de operaciones concretas o formales, al analizar el primer punto: *"Que el alumno sepa distinguir los números naturales, enteros, racionales y decimales no racionales"*, llegamos a la conclusión de que este objetivo completo, tal como se especifica, solo se logrará en el periodo de las operaciones formales ya que distinguir si un número es natural, entero, racional o decimal no racional, requiere una comparación entre formas y no entre contenidos.

El objetivo de adquisición del concepto de adición en Q^+ a través de fracciones equivalentes, consiste en la elaboración del concepto y su extensión suponiendo una conducta de carácter concreto, mientras que si se utiliza el concepto de m.c.m. reduciendo los denominadores, se tratará de una operación formal. Si se trata de adquirir el concepto de operación producto en Q^+ , el sujeto tiene necesidad de coordinar los esquemas partitivos y multiplicativos en una estructura de conjunto y después aplicar un esquema partitivo sobre un esquema partitivo, lo que supone una operación a la segunda potencia y por tanto la

conceptualización del producto de los números racionales positivos, es una operación formal.

Bermejo (1990) al referirse a la adquisición y aprendizaje de los conceptos matemáticos para que un aprendiz pase del estado cognitivo X1 a su inmediato superior X2 es necesario que se describa el estado cognitivo inicial del aprendiz (X1) y el estado cognitivo final (X2), así como saber cómo suele comportarse el niño para efectuar este paso y arbitrar las actividades pertinentes para que adquiera la comprensión pretendida, siendo la descripción de X1 a X2, así como la transición del uno al otro, cometido principalmente de la psicología evolutiva y del aprendizaje.

Orton (1990) estableció un gráfico ilustrativo sobre la relación entre las etapas piagetianas y las edades a través de los ojos de un profesor de matemáticas (p.88), deduciendo las siguientes consideraciones: 1) La discrepancia entre el más y el menos capacitado se incrementa con la edad; 2) La diferencia en capacidad intelectual entre el más y el menos capacitado en un determinado grupo de edad resulta considerable; 3) En los extremos de la gama de capacidades resulta difícil saber qué hacer con las líneas oblicuas que dividen las etapas; 4) Una considerable proporción de alumnos que dejan la escuela a los 16 años no ha alcanzado la etapa de las operaciones formales, ignorando si lo consigue alguna vez.

5. CONCLUSION

Por muy sistemático que sea un profesor a la hora de incrementar los conocimientos y las capacidades del alumno, es imposible introducir conceptos dependientes del pensamiento formal si no ha alcanzado esta etapa. Si el individuo no ha alcanzado el periodo de las operaciones formales puede captar los comienzos de una idea abstracta de un modo intuitivo o concreto, pero no de llegar a la idea final que expone el profesor con lo cual sus explicaciones no tendrán impacto alguno, a no ser que utilice destrezas ya existentes en los alumnos en la etapa de las operaciones concretas.

Resulta relevante para todo aprendizaje la equilibración bajo la forma de asimilación y acomodación. Cuando se introducen las ecuaciones lineales se dan y se practican técnicas para la resolución, pero la introducción posterior de las ecuaciones cuadráticas puede suscitar problemas de acomodación porque no sirven los procedimientos adecuados para las ecuaciones lineales. Una vez que se llega a una concepción más general de ecuación que incorpore las anteriores y otras y se domine esa visión general, deberá conducir al logro de unas mentalidades lo suficientemente amplias para acomodar las ecuaciones lineales, cuadráticas, etc. (Orton, 1990).

Por otra parte se acusa a Piaget de no haber utilizado muestras representativas, pero en su defensa numerosos experimentos realizados, en diversos países del mundo (estudios transculturales) repitiendo la teoría de Piaget, han corroborado los logros alcanzados (Labinowicz, 1987).

Críticas a la teoría de Piaget desde la lógica dicen que la noción de agrupamiento es pobre y confusa (Castorina y Palau, 1982). Pero quizás nos ayude a entender la poca claridad de la teoría piagetiana en alguno de sus puntos, el dato aportado por un miembro del equipo de Piaget, de como se desarrollan las investigaciones, que nos dice:

"si ponemos un trozo de papel transparente encima de una fotografía y la calcamos con un lápiz, tenemos la impresión de haberlo hecho muy bien. Sin embargo al levantar el papel comprobamos que faltan partes fundamentales. Lo que Piaget proporciona a otros, incluso a sus colaboradores, es el calcado y no la fotografía. Otra razón para dar una imagen incompleta es que Piaget piensa en unidades muy amplias" (Vuyk, 1984 p. 27).

Collis (1982) considera a las matemáticas escolares como un sistema lógico, como una estructura jerárquica de relaciones, para que a la hora de planear método y programas se tenga en cuenta, al igual que el estadio del desarrollo cognitivo del niño. Estos dos aspectos, tomados juntos, apuntan a la necesidad de que el sistema lógico que constituyen las matemáticas, tenga un fundamento concreto en el sentido piagetiano del término y a todos los niveles dentro del estadio concreto.

Si se analizan las respuestas de un sujeto a un problema y se alinean con un nivel específico o de funcionamiento, éste tiene por arriba un límite inferior y una persona clasificada como un razonador formal puede dar en una situación determinada una respuesta típica de un nivel mucho más bajo, y puede ser debido al humor de la persona en ese momento e incluso a la falta de familiaridad con las limitaciones de la tarea.

Cuando un teórico o investigador intenta aplicar la teoría piagetiana se encuentra con lagunas inexplicables y con inconsistencias en el trabajo original. Cuando un profesor intenta aplicar la teoría de Piaget a su curriculum de Matemáticas se encuentra con enormes dificultades.

En Nortes (1990) hicimos un intento de aproximación analizando los contenidos de Matemáticas de 6º de EGB para ver si se encontraban en el periodo de operaciones concretas o formales y el alumno podía acceder a esos objetivos programados por el MEC, pero otra cosa bien distinta es encontrar en cada bloque de contenidos una secuenciación lógica adaptada al desarrollo cognitivo del individuo, en donde ítem tras ítem, secuenciados, nos posibilitase ese paso de lo concreto a lo formal. Su estudio está abierto y ello nos permitirá poder determinar el momento en que cada individuo alcanza ese paso y así poder contrastar con las edades del desarrollo cognitivo.

De este estudio y de otros estudios efectuados se podrá variar las edades en que se alcanza un periodo y se pasa a otro, pero lo que no se modificará es que primero se encuentra el niño en periodo sensoriomotor, después pasa al periodo preoperacional, después al operacional concreto y por último al operacional formal. También estamos seguros que muchos sujetos no logran en la vida pasar al periodo formal y que otros lo alcanzan a edades tempranas, pero ahí influyen otros factores y como bien dice Piaget (1978):

"De forma general toda la evolución biológica y, al mismo tiempo, la de las funciones cognitivas que de ella procede, primero dominada por las necesidades permanentes de un equilibrio entre el organismo y el entorno exterior, se caracterizan por una autonomía creciente del organismo o del sujeto en su autoorganización y, por lo tanto, por una equilibración cada vez más interiorizada y, a este respecto, el reemplazo de los procesos exógenos por mecanismos endógenos, del que son testigos tanto las fenocopias como todo el desarrollo cognitivo desempeñan una función fundamental" (p. 201).

La psicología piagetiana y la educación matemática tienen un largo camino todavía por recorrer y los profesores del Area de Didáctica de las Matemáticas debemos participar, con nuestras investigaciones, a esclarecer aquellos puntos que los psicólogos evolutivos, estudiosos del desarrollo del individuo han dejado en manos de los especialistas de las didácticas especiales.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BERMEJO, V. (1990): *El niño y la aritmética*. Paidós, Barcelona.
- BROWN, G. y DESFORGES, CH. (1984): *La teoría de Piaget: Un estudio crítico*. Anaya, Madrid.
- CARRETERO, M. y LEON, J. (1990): "Desarrollo cognitivo y aprendizaje en la adolescencia" en Palacios, Marchesi y Coll (Comp.) Vol. 1, pp. 311-326.
- CASTORINA, J.A. y PALAU, G.D. (1982): *Introducción a la lógica operatoria de Piaget*. Paidós, Barcelona.
- COCKCROFT, W. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*. MEC, Madrid.
- COLLIS, K.F. (1982): "La matemática escolar y los estadios del desarrollo" en *Infancia y Aprendizaje*, pp. 39-74.
- FLAVELL, J. (1979): *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Paidós, Buenos Aires.
- INHEDLER, B. y PIAGET, J. (1985): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós, Barcelona.
- LABINOWICZ, E. (1987): *Introducción a Piaget: Pensamiento, aprendizaje, enseñanza*. Addison-Wesley Iberoamericana. México.
- MEC (1985): *Programas Renovados de la EGB (Ciclo Superior)*. Escuela Española. Madrid.
- NORTES, A. (1990): *El paso de las operaciones concretas a las formales: Un análisis en el dominio de las matemáticas*. Universidad de Murcia, Murcia.
- NORTES, A. y SERRANO, J.M. (1991): *Operaciones concretas y formales*. Universidad de Murcia, Murcia.
- NORTES, A. (1993): *Un modelo de evaluación diagnóstica en Matemáticas*. Universidad de Murcia, Murcia.
- PIAGET, J. (1978): *La equilibración de las estructuras cognitivas*. Siglo XXI, Madrid.
- VUYK, R. (1984): *Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1965-1980* (2 vol.). Alianza, Madrid.