ALGUNAS CARACTERISTICAS DEL CURRICULUM DE GEOMETRIA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA. SUGERENCIAS DIDACTICAS

MATIAS CAMACHO MACHIN
AGUSTIN MORALES GONZALEZ

RESUMEN

En este trabajo se constata cómo el fracaso de los cambios curriculares, realizados durante las últimas décadas en la Geometría escolar, y el desarrollo de la investigación en el campo de la Educación Matemática han llevado a elaborar un nuevo currículum de Geometría para la ESO. Se incide en una serie de características esenciales que deben estar presentes en el momento de elaborar secuencias de aprendizaje de contenidos geométricos. Asimismo, presentamos a modo de ejemplo algunas actividades adecuadas para alumnos de 15-16 años que pueden constituir una buena muestra de las características mencionadas.

ABSTRACT

In this paper we try to prove that the failure of the curriculum changes made during the last decades in school Geometry and the research in the field of Mathematical Education have led to the ellaboration of a new curriculum of Geometry for the Secondary Compulsory Education. A number of essential characteristics are stressed in this paper, the ones we consider must be present when ellaborating of geometrical content learning. In the same way, we introduce some activities for 15-16 year-old students that can illustrate the above mentioned characteristics.

PALABRAS CLAVE

Enseñanza-aprendizaje de la Geometría, Enseñanza Secundaria Obligatoria, Desarrollo curricular, Actividades geométricas, Educación matemática.

KEYWORDS

Teaching and learning Geometry, Secondary Compulsory School, Development curriculum, Geometric task, Mathematics education.

1. ANTECEDENTES

Comenzaremos haciendo una breve reseña histórica sobre la enseñanza de la Geometría con el objetivo de destacar la diferencia entre los nuevos planteamientos didácticos que aparecen en el currículum de Geometría correspondiente a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), respecto de los que aparecían en los currícula anteriores.

Como es bien sabido, la escuela tradicional relegó la Geometría a los aspectos métricos (aritmetización) y a una introducción a la Trigonometría, caracterizándose por una fuerte tendencia a la resolución automática de problemas. Los intentos de introducir alguna axiomática fracasaron al no ser comprendido el sentido de ésta por parte de los alumnos que, en el mejor de los casos, se limitaban a memorizar axiomas y propiedades. En el aspecto algebraico se puso el énfasis en la resolución de ecuaciones y sistemas, relegando a un segundo plano su interés geométrico.

Los cambios importantes de finales del siglo XIX y principios del XX que llevaron al formalismo matemático propiciaron en muchos miembros de la comunidad matemática la idea de que aquello que había clarificado los problemas de fundamentos debía introducirse en las Matemáticas escolares, con lo que se conseguiría el deseable acercamiento de la Matemática Universitaria a la Enseñanza Media.

Así, en el año 1959, se celebró el conocido Coloquio de Royaumont, convocado por la Organización Europea de Cooperación Económica (OECE) con el objeto de promover una reforma de los contenidos y de los métodos de enseñanza de las Matemáticas. Finalizado dicho coloquio, la OECE convocó a unos expertos que elaboraron el denominado *Programa Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Secundaria*, manifiesto ideológico de los defensores del movimiento de la *Matemática Moderna,* guiados por el lema atribuido a J. Dieudonné de *Abajo Euclides*, que proponía la inclusión de la Teoría de Conjuntos y el Algebra en la enseñanza elemental, en detrimento de la Geometría Axiomática (Euclídea) que hasta el momento representaba una gran parte de la Matemática Elemental.

Las estructuras algebraicas, las transformaciones isoméricas y las relaciones de equivalencia, que constituían el lenguaje y los métodos de la Matemática actual ocuparon un lugar en la Matemática de la Secundaria (Papy, 1966). Debe señalarse que el propio Dieudonné se pronunció a favor de los cursos de Geometría Intuitiva *"con tal de que no se ponga el énfasis en juguetes artificiales como triángulos, sino en nociones básicas como la Geometría de las transformaciones"*, propugnada por F. Klein en su programa de Erlangen de 1872. Para los seguidores de la *Matemática Moderna*, el lenguaje matemático, las notaciones y el formalismo debían ser introducidos lo más pronto posible.

Para Nurzia (1986), Dieudonné, de una parte, no comparte la idea de una estrecha conexión entre las teorías matemáticas y la realidad; y de otra, identifica la Geometría Euclidiana con el Algebra Lineal.

Para el gran educador matemático H. Freudenthal (1973), el factor determinante para que se produjera el declinar de la Geometría en la enseñanza de las Matemáticas sería el haber descuidado los lazos de la Geometría con la realidad. Y añade:

> "La estructura deductiva de la Geometría tradicional no ha constituido nunca un éxito didáctico convincente. La gente hoy piensa que la Geometría falló porque no era lo suficientemente deductiva; en mi parecer, falló porque no podía ser reinventada por el estudiante, sino sólo impuesta".

Freudenthal (1973) critica tanto la inclusión de la Geometría en el Algebra Lineal como su presentación como un rígido esquema axiomático, dado que tales formas de enseñanza sólo pueden sofocar la Geometría, mientras que una didáctica satisfactoria permitiría

> "enseñar a organizar un contenido, y lo que es organización; enseñar a conceptualizar, y lo que es un concepto; enseñar a deducir, y lo que es una deducción; enseñar a definir, y lo que es una definición; distinguir por qué algunas organizaciones, deducciones, definiciones, son mejores que otras".

En nuestro país, la Ley General de Educación de 1971, presentó unos programas de Matemáticas en los que se incluían los distintos aspectos propios de aquella *Matemática Moderna* que ya había sido eliminada en algunos paises europeos, dado el fracaso que su implantación en los mismos había provocado.

En palabras de Miguel de Guzmán (1983), la Matemática Básica de dichos programas estaba constituida por

> "unos cuantos acertijos aislados cuya relación con la Matemática tal vez consista para los niños en que se pueden expresar con unas palabras mágicas que además tienen su traducción cabalística en símbolos misteriosos".

En cuanto a la Geometría, las rectas representan conjuntos de puntos, los triángulos son intersecciones de tres semiplanos, se habla de isomorfismos entre ángulos y arcos y se definen los segmentos como clases de equivalencia, etc. Ello motivó que A.Z. Krygowska manifestara en la XXVIII reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) de 1976 que *"la desaparición de la Geometría de Euclides, en su forma clásica, ha eliminado de los programas la mayor parte de los problemas interesantes"*, indicando que *"se echa en falta la Geometría que daba la oportunidad de hacer una verdadera investigación, desarrollar estrategias y métodos diferentes"*.

De hecho, el papel fundamental que debe jugar la Geometría en la enseñanza de las Matemáticas ha sido evidenciado por un buen número de prestigiosos especialistas. Así, R. Thom (1973) considera que en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, la Geometría representa una fase esencial que no puede ser suprimida sin riesgo de comprometer el aprendizaje de la materia completa. Esto deriva principalmente de dos consideraciones:

a) El continuo geométrico representa una noción primordial que no puede derivarse de otras nociones.

b) El lenguaje geométrico desempeña una función intermedia entre la del lenguaje ordinario y la del lenguaje matemático formalizado en el ámbito de la elaboración conceptual (simulación) de los procesos del mundo externo.

En relación con la Geometría Euclidiana, el mismo autor, en (1971), indica que ésta representa una fase insustituible en el desarrollo de la racionalidad humana, puesto que constituye un paso obligado en el proceso que, del lenguaje ordinario, conduce al formalismo matemático en el que

> "cada objeto está reducido a un símbolo y el grupo de las equivalencias está reducido a la identidad del símbolo escrito con el símbolo mismo. Desde este punto de vista, el estadio del pensamiento geométrico puede ser un estadio imposible de omitir en el desarrollo de la actividad racional del hombre".

Más adelante, en nuestro país, las directrices del MEC dieron lugar a los Programas Renovados de la Educación General Básica, promulgados en 1982, que intentaban corregir tímidamente algunos de los errores que aparecían en los programas anteriores. Así, se reducían contenidos de la Teoría de Conjuntos y reaparecían contenidos geométricos, si bien no planteaban elementos realmente renovadores.

Aún con la implantación parcial de esta reforma, los contenidos de Geometría continuaron (y en muchos casos aún siguen) siendo postergados por los profesores de EGB, limitándose éstos en muchos casos a promover, de forma casi exclusiva, la memorización de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de algunas figuras, que los alumnos no tardan en olvidar. Ello contrasta con el estudio eminentemente analítico que se realiza en el BUP de elementos geométricos que los alumnos ni siquiera conocen desde un punto de vista intuitivo.

Desde principios de la década de los 80, con la creación de Sociedades de Profesores, celebración de Congresos, Simposios, etc. sobre Didáctica de las Matemáticas, muchos profesores de Matemáticas de todos los niveles empiezan a tomar en consideración la necesidad de modificar no sólo los contenidos, sino también los métodos de enseñanza de las Matemáticas y, por ende, de la Geometría a la que destacados didactas no dudan en atribuir un valor altamente formativo.

Así, Krygowska (1980) indica que la Geometría introduce al alumno en un campo muy extenso de nuevas ideas, le libera la imaginación y la intuición y le abre nuevas perspectivas. La Topología y las Transformaciones revitalizan el papel de la Geometría en la educación.

La moderna enseñanza de las Matemáticas no debe eliminar la Geometría puesto que los nuevos puntos de vista la hacen más rica que antes. Aclara, al igual que en su momento lo hiciera Dieudonné, que el grito *Abajo Euclides,* pronunciado por éste en el citado Congreso de Royaumont, perseguía no la eliminación de la Geometría Euclídea, sino la forma anticuada de enseñarla (tradicional desde Euclides), que ya no tiene vigencia.

Como matemática, dicha autora da una respuesta negativa a la pregunta sobre si tiene sentido hoy día considerar una parte independiente de la Matemática que se llama Geometría,sin embargo, a la pregunta sobre si debemos enseñar Geometría responde categóricamente que sí.

Por su parte, Lluis (1982), del Instituto de Matemáticas de la UNA de México, considera la Geometría como la disciplina más adecuada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por las Matemáticas en todos los niveles. Así, en el nivel más elemental, las simples figuras geométricas ya inspiran en él un agradable sentido de estética, de simetría, de regularidad y de belleza. En los siguientes niveles, cuando el alumno ya es capaz de realizar razonamientos lógicos, la Geometría le permite aclarar perfectamente el significado de una demostración matemática, al poder analizar paso a paso los razonamientos seguidos. Más adelante, los problemas que se plantean en Geometría proporcionan el mejor medio para que el alumno perfeccione sus facultades de investigador, es decir, que intuya resultados aún desconocidos para él y los demuestra con todo rigor.

Añade este autor que

> "estas excepcionales cualidades de la Geometría se deben esencialmente a la imagen que nos formamos de los conceptos geométricos, los cuales son una excelente guía, tanto de la forma de intuir una propiedad, como de la demostración de la misma".

Concluye con la conocida frase de Atiyah, pronunciada en el III ICME de 1976, celebrado en Karlsruhe:

"Que en todos los niveles se utilice el pensamiento geométrico tan ampliamente como sea posible".

Laura Nurzia (1986) de la Universidad de Roma, recoge las opiniones expresadas por Atiyah en el citado Congreso. Para éste, la Geometría está presente como nunca en la Matemática de este siglo, puesto que muchos de los actuales problemas matemáticos son de naturaleza esencialmente geométrica porque derivan del estudio de problemas de mayores dimensiones que tienen un origen en el estudio de la Física. La Geometría no representa sólo una rama de la Matemática, sino que es, por encima de todo un modo de pensar, presente en todos los sectores de ésta. Insiste Atiyah en la importancia de devolver a la Geometría el papel que le corresponde en la enseñanza, puesto que *"la intuición geométrica permanece como el canal más poderoso para la comprensión matemática".*

En uno de los Simposios a que hemos hecho referencia anteriormente, celebrado en Madrid en 1984 y titulado *La enseñanza de la Matemática a debate* (véase MEC (1985)), el prestigioso matemático L.A. Santaló, en una ponencia titulada *La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario (Alumnos de 12 a 16 años de edad)* señala que en lo que al ciclo 12-16 se refiere, la Geometría debe seguir resultando útil para todos los alumnos, tanto en su aspecto formativo como en el informativo, para lo que se precisa revisar periódicamente los contenidos, adaptándolos a las necesidades de la sociedad. Santaló propone una serie de postulados fundamentales que deben presidir los contenidos de Geometría en la Enseñanza Media, con los cuales nos identificamos.

1. *La Geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior.*
2. *La presentación axiomática de la Geometría no es posible en la Enseñanza Media.*
3. *Hay que educar en la solución de problemas geométricos.*
4. *El aprendizaje muchas veces no es lineal, sino que opera a saltos.*
5. *Vincular la Geometría con la Aritmética y el Algebra.*
6. *No olvidar la Geometría del Espacio.*
7. *Aprovechar todos los conocimientos de los alumnos.*

De las consideraciones expuestas, se deduce la gran importancia que la Geometría y, en especial, el pensamiento geométrico, debe jugar en los niveles de la enseñanza obligatoria. Sin embargo, el debate sobre su didáctica continúa abierto.

2. LA INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LA GEOMETRIA

Podemos considerar que la tendencia actual de los investigadores y didactas de las Matemáticas a nivel mundial es la de coordinar los esfuerzos hacia la elaboración de los currícula de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria. Así, se han fomentado y realizado encuentros entre profesores e investigadores de distintos paises, fruto de los cuales han surgido diferentes documentos útiles para el desarrollo de las Matemáticas de los 90: Debate de Kuwait (Howson-Wilson, 1987); Simposio de Valencia (Alonso y otros, 1987); Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1991c) y en todos ellos la Geometría ocupa un papel esencial:

"El estudio de la geometría ayuda a que el estudiante represente y le dé sentido al mundo. Los modelos geométricos proporcionan un punto de vista a partir del cual pueden los estudiantes analizar y resolver problemas, y las interpretaciones geométricas pueden contribuir a que se entienda mejor una representación abstracta (simbólica)" (NCTM, 1991c).

En el campo de investigación de Didáctica de la Geometría, el modelo de razonamiento geométrico de van Hiele ha representado durante los últimos quince años -y puede seguir haciéndolo- una teoría útil para, por un lado, interpretar las dificultades que poseen los alumnos cuando aprenden los conceptos geométricos y por otro, utilizarse como guía para la elaboración de diseños instruccionales de Geometría en la Secundaria Obligatoria. Como es sabido, dicha teoría plantea un modelo educativo para interpretar los diferentes tipos de pensamiento que van alcanzando los alumnos a medida que se desarrolla el proceso de aprendizaje, de modo que el niño se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico, donde el espacio es simplemente observado y las propiedades de las figuras no se reconocen explícitamente, hasta el último nivel relativo a la deducción de aspectos formales y abstractos de la Geometría. Los niveles se denominan "visualización", "análisis", "deducción informal", "deducción formal" y "rigor".

Una de las características más importantes de la teoría de los van Hiele es su aspecto instructivo, en el sentido de que para aquellos alumnos alcancen los diferentes niveles propuestos, se requiere que éstos superen una serie de fases de aprendizaje (pregunta-información, orientación dirigida, explicación o explicitación, orientación libre e integración) lo que supone una diferencia importante con otras teorías del desarrollo y que sugiere a su vez una guía útil para la construcción de unidades didácticas de Geometría. En (Jaime y Gutiérrez, 1990) aparece una descripción detallada del modelo así como algunos ejemplos.

Las investigaciones sobre la teoría de los van Hiele son relativamente recientes; pese a que el primer esbozo del modelo data de 1957, no es hasta los años 70 que comienza su difusión en el mundo occidental (véase Wirzsup, 1976), aunque ya en la Unión Soviética hubiese sido tomado como base para el diseño del nuevo currículum de Matemáticas implantado en la década de los 60. En USA, durante los primeros años de la década de los 80, se desarrollaron tres proyectos de investigación que han difundido el modelo a nivel internacional (véase Usiskin, 1982; Fuys y otros, 1988; Burger y otros, 1990).

La importancia de estas investigaciones queda implícitamente reflejada en (NCTM, 1991c):

"Hay evidencia de que el desarrollo de ideas geométricas crece en progresión a través de toda una jerarquía de niveles. Los estudiantes aprenden primero a reconocer formas enteras y después a analizar las propiedades más características de una figura. Más tarde llegan a ver las relaciones entre figuras y elaborar deducciones simples. El proceso de enseñanza-aprendizaje ha de considerar dicha jerarquía ya que, aunque pueda darse un aprendizaje en varios niveles de forma simultánea, el aprendizaje de conceptos y estrategias más complejas requiere que las destrezas básicas estén firmemente aceptadas",

sugiriéndose en las consideraciones sobre el estándar 12 para 5-8 (alumnos de 11-14 años aproximadamente) que

"Los estudiantes descubren relaciones y adquieren un sentido espacial al construir, dibujar, medir, visualizar, comparar, transformar y clasificar figuras geométricas. La discusión de ideas, formulación de conjeturas y comprobación de hipótesis son previas a la adquisición de enunciados precisos más formales. Durante este proceso, adquieren sentido las definiciones, se entienden las relaciones entre figuras y los alumnos se preparan a utilizar estas ideas para desarrollar argumentos informales. La exploración informal de la Geometría puede resultar apasionante y matemáticamente productiva para los estudiantes de ciclo medio. A este nivel, la Geometría debe centrarse en la investigación y utilización de ideas y relaciones geométricas en lugar de en la memorización de definiciones y fórmulas" (NCTM, 1991c),

lo que supone un trabajo, por parte de los alumnos dentro de los tres primeros niveles del pensamiento geométrico, que a lo sumo supondría un trabajo en el cuarto nivel para alumnos de 15-18 años como se desprende de los siguientes párrafos:

"la geometría sintética en la enseñanza secundaria no debe centrarse exclusivamente en el razonamiento y en la demostración deductiva. La misma importancia tienen el desarrollo continuado de las habilidades de percepción espacial de los estudiantes, la representación pictórica y la aplicación de ideas geométricas para describir y responder a cuestiones sobre fenómenos naturales, físicos y sociales"...

"Al considerarlos como conjunto, los dos estándares sobre Geometría (estándar 7: La Geometría desde una perspectiva sintética y el estándar 8. La Geometría desde una perspectiva algebraica) *abogan por un enfoque más ecléctico de la materia, un enfoque basado en exploraciones informales y en secuencias axiomáticas cortas. El estudio de la Geometría debe equipar a los estudiantes con la capacidad para reconocer y aplicar de manera eficaz los conceptos geométricos y los métodos (sintético, analítico, de transformación, vectorial) más adecuados a una situación de problemas en particular"* (NCTM, 1991c).

Con todas estas consideraciones, algunos de los trabajos posteriores elaborados como complemento para los estándares curriculares, se han realizado teniendo como soporte teórico diferentes investigaciones sobre los niveles de van Hiele (véase NCTM, 1991a, 1991b).

De la misma manera, en nuestro país, la teoría de los van Hiele, debería representar en estos momentos una guía útil para la implantación del curriculum de Geometría en la Secundaria Obligatoria. En (Gutiérrez, 1991; Jaime, 1994), se hacen serios esfuerzos para que el modelo sea tenido en cuenta a la hora de establecer diseños instruccionales de conceptos geométricos para la Secundaria Obligatoria.

3. CONSIDERACIONES DIDACTICAS

Los nuevos planteamientos que se proponen con la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) intentan recoger en gran parte las aportaciones y experiencias de otros paises a las que nos referíamos anteriormente, lo que supone un paso adelante en la recuperación no sólo de la enseñanza de la Geometría Elemental, sino una metodología de trabajo activo como parte importante del currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. No en vano, dos de los cinco bloques que contempla el Diseño Curricular Base para esta etapa educativa están dedicados a la Geometría:

- Bloque II: Medida, estimación y cálculo de magnitudes.

- Bloque III: Representación y organización del espacio.

El análisis de los contenidos de ambos bloques (MEC, 1992), apoyado en las sugerencias propuestas por el modelo de van Hiele como marco teórico que interpreta la evolución del razonamiento geométrico de los alumnos, nos ha llevado a destacar -entre otras- las siguientes características del currículum de Geometría en la ESO, que serán de utilidad en el momento de desarrollar unidades didácticas para los alumnos de 12-16 años.

- Tratamiento más intuitivo que analítico de los conceptos geométricos.
- Integración de los conceptos geométricos planos y espaciales.
- Reconocimiento de los aspectos lúdicos de la Geometría.
- Uso de la historia en la enseñanza de las Matemáticas.
- La memorización de fórmulas no constituye un objetivo a cubrir.
- Conexión de la Geometría con la naturaleza, arte y técnica.

En los últimos años han surgido en nuestro país numerosas publicaciones útiles para el desarrollo del currículum de Geometría. Conviene indicar que en (MEC, 1992) aparecen un gran número de referencias que pueden ser útiles a la hora de trabajar con los alumnos en el aula. Pensamos que para la elaboración de las actividades, sería interesante que el profesorado de Secundaria tuviera en cuenta las consideraciones anteriormente citadas.

Presentamos seguidamente una secuencia de actividades que hemos adaptado con el objetivo de ejemplificar algunas de las características didácticas expuestas.

A) ACTIVIDAD 1: Las teselaciones en el plano

Introducción

La actividad propuesta pone de manifiesto la indiscutible relación entre Geometría y Arte. Recuérdese la famosa frase: *"Con sólo Geometría no sería posible el Arte, pero sin ella tampoco"*.

Se toma como elemento motivador los diseños formados por combinaciones de figuras que permiten teselar el plano. Estos diseños han sido utilizados a lo largo de la historia por muchas civilizaciones: egipcia, islámica, griega y china, entre otras.

La secuencia de actividades se plantea en términos de investigación a realizar por los alumnos y pretende que éstos adquieran un conocimiento más amplio de las propiedades de los polígonos descubriendo cuáles de ellos permiten generar mosaicos y cuáles no y el porqué de este hecho. Asimismo, se trabajan los aspectos más intuitivos de las transformaciones geométricas planas.

1. Se presentan a los alumnos varios ejemplos de decorados a base de mosaicos, realizados por civilizaciones antiguas, prestando especial atención a los que aparecen en la Alhambra de Granada (véase Pérez, 1993), y se les pide que los observen cuidadosamente, comentando en grupo lo que haya llamado su atención.

Posteriormente se introduce el término mosaico, embaldosado o teselación y se les pide que realicen bocetos de mosaicos que descubran en edificios, cerámicas, libros de arte, etc.

2. Los alumnos deben descubrir por vía inductiva la fórmula que da la amplitud del ángulo interior de un polígono regular. Una vez obtenida la expresión general $\alpha(n) = (1\text{-}2/n)$ $180°$, pensamos que tiene gran interés realizar su representación gráfica, promoviendo una

discusión sobre si tiene o no sentido unir mediante un trazo continuo los puntos de la gráfica, así como cuál será la evolución de $\alpha(n)$ a medida que n aumenta.

3. Utilizando plantillas de diversos polígonos regulares con el mismo lado, se propone encontrar todos los mosaicos regulares posibles. ¿Por qué hay sólo tres? Indicar para cada uno de ellos el símbolo de Schläfi. ¿Cuál es la definición de mosaico regular? ¿Por qué las abejas realizan sus celdas en forma de hexágono regular?

4. Con el mismo material, encontrar los ocho mosaicos semirregulares. Escribir el símbolo de Schläfi para cada uno de ellos. Definir mosaico semirregular.

5. Encontrar otros polígonos (no regulares) que teselen el plano. ¿Qué cabe decir de los cuadriláteros convexos? ¿Y de los cóncavos? Construir mosaicos de cuadriláteros en papel punteado de malla cuadrada. ¿Qué ocurre con los triángulos? ¿Existen pentágonos que permitan hacer embaldosados? ¿Qué ocurre con los poliminos?

6. Se presentan a los alumnos diversos mosaicos "tipo Escher" para que comenten sus características. Una vez que se les muestra la forma de generarlos (sistema modular) mediante las transformaciones de traslación paralela, giro a partir de un lado y giro a partir de un vértice (véase Salguero, 1994) se les pide que realicen mosaicos de este tipo. Puede usarse o no papel punteado.

7. Generar mosaicos mediante la superposición de dos transparencias en las que aparecen dos tramas iguales de hexágonos, cuadriláteros, líneas quebradas, etc. Prestar atención al efecto visual (transformación por continuidad) que se consigue al mover una de ellas, permaneciendo fija la otra.

B) ACTIVIDAD 2: La sección áurea

Introducción

El alemán Zeysing, alrededor de 1895, enunció su *Ley de las Proporciones* (Proportional Gesetz), según la cual *"para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que la existente entre la mayor y el todo"*. Declara que se cumple en las proporciones del cuerpo humano, en las especies animales que se distinguen por la elegancia de sus formas, en ciertos templos griegos, en arquitectura, en Botánica y hasta en Música. (Véase Ghyka, 1983).

Dada la importancia que se concede a la proporcionalidad en la ESO, pensamos que la Sección Aurea proporciona un sugerente centro de interés desde el que abordar la presencia de las Matemáticas en la naturaleza.

1. Una vez que los alumnos han visto el video titulado *Donald en el País de las Matemáticas,* de 25 minutos de duración, podemos utilizar éste como punto de partida para promover una investigación por equipos, utilizando la bibliografía disponible.

Algunas preguntas que suelen surgir de los alumnos (véase Río, 1988) que pueden servir para dicha investigación, son:

¿Cómo surgió el rectángulo áureo? ¿Qué significó el pentagrama y el rectángulo áureo para los antiguos? ¿Cómo surge la espiral a partir de los rectángulos áureos? ¿Cómo se pueden construir rectángulos áureos a partir del pentagrama?, etc.

2. Buscar el rectángulo áureo en objetos comunes, tales como cubiertas de libros, tarjetas de crédito, marcos de cuadros, etc.

3. Observar el Canon de Leonardo da Vinci y, a partir de él, comprobar las proporciones en los cuerpos de los compañeros. Buscar otras razones áureas en el cuerpo humano (manos, rostro, etc.).

4. Encontrar la sucesión que resulta del *"problema de la reproducción de los conejos"* (Fibonacci). ¿Qué relación guarda esta sucesión con el número de oro? Idem con la reproducción de las abejas. (Véase Ruiz, 1984 y 1986).

C) ACTIVIDAD 3: Independencia de los conceptos de área y perímetro de las figuras planas

Introducción

Como es sabido, los alumnos de Secundaria confunden muy a menudo los conceptos de área y perímetro (NCTM, 1981; Camacho, M. 1985) lo que se debe principalmente, como señala Castelnuovo (1975), al hecho de que la atención del alumno ante una figura se fija en el contorno y no sobre el interior.

La secuencia de actividades que sigue pretende lograr que los alumnos relacionen y disocien ambos conceptos mediante un trabajo de investigación en clase que requiere la utilización de material (pentaminos, geoplano, papel punteado, dispositivos móviles, y otros), y que desde el punto de vista didáctico permite tratar conjuntamente ambos conceptos (véase Camacho y otros, 1986).

1. Tomar los doce pentaminos e indicar para cada uno de ellos su área y su perímetro. ¿Son todos los pentaminos figuras equivalentes? ¿E isoperimétricas?.

2. Tomar solamente cuatro pentaminos y, sobre una cuadrícula representar todos los rectángulos posibles. ¿Cuántos hay? Calcular el área y el perímetro de cada uno. Hacer lo mismo con dos, tres y cinco pentaminos.

3. Construir en el geoplano polígonos que tengan 10 u^2 de área. ¿Son isoperimétricos?

4. Calcular el área de diferentes polígonos (convexos y cóncavos) construidos en el papel punteado, indicando cuáles son equivalentes y cuáles isoperimétricos.

5. ¿Cómo podría calcularse el área de una serie de rectángulos construidos en el papel punteado sin tener que contar todos los cuadrados que los componen? Escribir una fórmula general que permita calcular el área de cualquier rectángulo.

6. Tomar una cuerda de 32 cm. de longitud con sus extremos unidos y formar un rectángulo sosteniéndola entre el pulgar y el índice de las dos manos. Al separar o unir los

dedos a la vez que se formarán diferentes rectángulos. ¿Son isoperimétricos? ¿Son equivalentes? ¿Por qué?

7. Construir en cartulina diferentes rectángulos de perímetro 36 cm. y recortarlos disponiéndolos como las hojas de una libreta, sobre un folio. Si se unen los vértices libres de los rectángulos, ¿qué línea se obtiene? Construir una tabla con los valores del largo (x), el ancho (y) y el semiperímetro (p). de los rectángulos recortados. ¿Qué relación existe entre x, y, p?. Escribirla. Representar la relación sobre unos ejes coordenados. ¿Qué se observa?

8. Construir con cartulina diferentes rectángulos que tengan de área 36 cm^2. ¿Son isoperimétricos? ¿Son equivalentes? ¿Cuál es el que tiene menor perímetro? ¿Por qué? Disponiendo los rectángulos sobre un folio, como las hojas de una libreta, y uniendo los vértices libres con un lápiz, ¿qué línea se obtiene? Construir una tabla con los valores del largo (x), y el ancho (y) y el área (A). de los rectángulos recortados ¿Qué relación existe entre x, y, A?. Escribirla. Representar la relación sobre unos ejes coordenados. ¿Hay una fórmula general que corresponda a una hipérbola cualquiera?

9. Construir en el geoplano diversos triángulos acutángulos y rectángulos con un lado (base) horizontal. Comparar el área de cada uno con la del rectángulo de igual base y altura. Repetir lo mismo con triángulos obtusángulos. Escribir una fórmula general para cualquier triángulo.

10. Se presenta al alumno el dispositivo móvil sugerido en Castelnuovo (1975, 195) y se pregunta:

¿Qué tienen en común todos los triángulos que pueden formarse al deslizar la anilla a lo largo de la varilla horizontal? ¿Son equivalentes? ¿Por qué? ¿Son isoperimétricos? ¿Por qué? ¿Cuál es el que tiene menor perímetro? Escribir las conclusiones obtenidas.

11. ¿Cómo habría que modificar el dispositivo anterior para visualizar paralelogramos equivalentes? ¿Y para visualizar trapecios equivalentes?

12. Construir la elipse por el método del jardinero. Si ralentizamos la construcción de la figura, van apareciendo muchos triángulos. ¿Qué le ocurre a sus áreas? ¿Qué triángulo es el de área máxima? ¿Cuál es el de área mínima? ¿Qué le ocurre a sus perímetros?

4. CONSIDERACIONES FINALES

Tal como hemos procurado reflejar a lo largo de este artículo, la evolución del currículum de Matemáticas para la Educación Secundaria ha llevado consigo una revalorización de la Geometría como parte esencial del mismo.

Ahora bien, la enseñanza de la Geometría en este nivel educativo no debe basarse en la utilización exclusiva de la axiomática euclidiana ni en planteamientos que pongan de relieve los aspectos puramente algebraicos, sino que debe estar guiada por un conjunto de características que hemos considerado en el apartado anterior y que se fundamenta, tanto en los trabajos de investigación en este campo de la Educación Matemática, como en las recomendaciones hechas por los distintos grupos y organizaciones de profesionales de la enseñanza de Las Matemáticas.

Pensamos que es importante que el profesorado de Secundaria tome conciencia de la necesidad de plantear la enseñanza de la Geometría en términos de investigación por parte de los alumnos de las cuestiones planteadas; sólo así se conseguirá que el aprendizaje resulte verdaderamente significativo. Las actividades mostradas en este artículo pueden ser un ejemplo del tipo de trabajo que proponemos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALONSO, V. y otros (1987): *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90.* Mestral, Valencia.

BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M. (1990) *Assessing children's intellectual growth in geometry* (final report). Oregon State University, Corvallis, USA.

CAMACHO, M. (1985): "Los conceptos de área y perímetro en la segunda etapa de E.G.B.". *Números, 12*, pp. 25-46.

CAMACHO, M. y otros (1986): *El método constructivo para la enseñanza de la geometría: área y perímetro* (Memoria final del Proyecto de Investigación). CEGC, S/C de Tenerife.

CASTELNUOVO, E. (1975): *Didáctica de la Matemática Moderna.* Trillas, México.

FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988): *The van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph num. 3). NCTM, Reston, USA.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task.* Reidel, Dordrecht.

GHYKA, M.C. (1983): *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Poseidón, Barcelona.

GUTIERREZ, A. y otros (1991): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Van Hiele* (Memoria final del Proyecto de Investigación). CIDE, Madrid.

GUZMAN, M. de (1983): "Sobre la educación matemática". *Revista de Occidente, 26*, pp. 37-48.

GUZMAN (1988): "Experimentos de Geometría". *Números, 17*, pp. 55-66.

HISTEIN, J.J. (1981): "The Second National Assessment in Mathematics. Area and Volume". *Mathematics Teacher, 74 (9)*, pp. 704-708.

HOWSON, G. y WILSON, B. (1987): *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90.* Mestral, Valencia.

JAIME, A. y GUTIERREZ, A. (1990): "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de van Hiele". En LLINARES, S. y SANCHEZ, M.V. (1990) *Teoría y Práctica de educación matemática.* Alfar, Sevilla, pp. 295-384.

JAIME, A. (1994): "La enseñanza de las isometrías en el plano desde la perspectiva del modelo de van Hiele". *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1*, pp. 85-94.

KRYGOWSKA, A.Z. (1980): "Geometría". *Conceptos de Matemáticas, 54*, pp. 20-28.

LLUIS, E. (1982): "La Geometría en la enseñanza. Notas de una conferencia", *Números, 3*, pp. 7-20.

MEC (1985): *La enseñanza de la Matemática a debate.* MEC, Madrid.

MEC (1992): *Materiales Curriculares. Secundaria Obligatoria. Matemáticas.* MEC, Madrid.

MORA, J.A. y RODRIGO, J. (1993): *Mosaicos I (Colección 2 Puntos).* Proyecto Sur, Granada.

NCTM (1987): *Learning and Teaching Geometry K-12* (1987 Yearbook). NCTM, Reston, USA.

NCTM (1991a): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Addenda series, grades 5-8. Geometry in the middle grades.* NCTM, Reston, USA.

NCTM (1991b): *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics. Addenda series, trades 9-12. Geometry from multiple perspectives.* NCTM, Reston, USA.

NCTM (1991c): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* SAEM THALES, Granada.

NURZIA, L. (1986): "Propuesta axiomática y propuesta intuitiva frente a la enseñanza de la Geometría". *Actas IV JAEM*, pp. 117-134.

PAPY, G. (1966): *Mathématique moderne.* Marcel Didier, Bruxelles, Paris.

PEREZ, R. (1993): *Alicatados (Vivo la Alhambra).* Proyecto Sur, Granada.

RIO, J. del (1988): "Donald en el País de las Matemáticas o el aprovechamiento didáctico de una película". *Suma, 1*, pp. 35-40.

RUIZ, F. (1984): La serie de Fibonacci: Una fuente de recursos didácticos. *Números, 1*, pp. 7-18.

RUIZ, F. (1986): "Matemáticas y naturaleza en la enseñanza". *Actas IV JAEM,* Puertos de la Cruz, pp. 407-430.

SALGUERO, F.J. (1994): "Teselaciones periódicas, aperiódicas y especiales", *Suma, 14-15*, pp. 27-34.

THOM, R. (1971): *¿Son las Matemáticas Modernas un error pedagógico y filosófico?.* En PIAGET y otros (1978), pp. 115-129.

THOM, R. (1973): *Matemáticas Modernas y Matemáticas de siempre.* En PIAGET y otros (1978), pp. 140-156.

USISKIN, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* ERIC, Columbus, USA.

WIRSZUP, I. (1976): "Breakthroughs in the psychology of leargning and teaching geometry". En MARTIN, J.L. y BRADBARD, D.A. (1976): *Space and geometry.* ERIC, Columbus, USA, pp. 75-97.