EL AZAR EN EL CURRICULUM

JUAN ANTONIO GARCIA CRUZ
CANDELARIA ESPINEL FEBLES

RESUMEN

Hacemos una incursión sobre el azar como fenómeno social y sobre el planteamiento determinista que ha impregnado su estudio, tal y como aparece en los libros de texto. A la luz de las nuevas tendencias curriculares ejemplificamos dos situaciones que modelizan situaciones de azar y proponemos un desarrollo didáctico para el estudio del azar en el aula.

ABSTRACT

We have made an incursion on Chance as a social fenomenon and an overview on the deterministic approach that characterized its study as is shown in text books. We have modelized two chance situations and give a didactical proposal for its development in the classroom.

PALABRAS CLAVE

El azar como fenómeno social, Modelo aleatorio-aproximado, Asignación de probabilidades, Modelización.

KEYWORDS

The chance as a social phenomen, Randon model, Probability, Modelity.

1. EL AZAR Y SUS CIRCUNSTANCIAS

Si la geometría ha sido la gran olvidada del currículum, el azar ha sido el gran ausente. Se ha identificado con un instrumento el cálculo de probabilidades y la mayor parte de las veces, a pesar de figurar oficialmente en el currículum, ha sido olvidado en las aulas. El azar como fenómeno sociológico que es, la incertidumbre que domina la actividad humana, es fuente de ideas y concepciones naturales no aprendidas en el aula. Quizás no exista otra parte de la matemática donde tengan tanto sentido las ideas previas de los alumnos.

Veamos una anecdota a modo de ilustración:

Una vez un alumno se presentó a un examen oral de Geografía. El profesor le preguntó por los ríos de España. El alumno respondió que no se los sabía. El profesor le preguntó por las montañas de España. El alumno movió la cabeza y le contestó que tampoco se las sabía. Aquello empezó a agotar la paciencia del profesor. Por último, le preguntó por los mares que rodean a España. Y obtuvo un "se me han olvidado" por respuesta. Impaciente le espetó al alumno ¿Y para qué se ha presentado usted a este examen? El alumno de forma cándida le respondió, "Para ver si tenía suerte".

En los juegos de azar cada persona sigue una lógica particular. Veamos un ejemplo:

Una persona se acercó a un vendedor de la O.N.C.E., el número que aparecía en lo alto del fajo era el 00104, sin dudarlo se lo saltó y buscó otro número menos raro. Se llevó el 25349. No supo explicar qué tenía de raro el número 00104 pero, particularmente, no le gustaba. Aún hoy le parece algo raro.

Tener buena o mala suerte es un hecho aceptado socialmente.

En 1928 el New York Times informaba de que seis personas habían sido encontradas culpables de la muerte accidental de M. Desnoyelles. Este había acudido a un hospital donde se le prescribió una medicina. El médico jefe dio a M. Desnoyelles una receta que era en realidad para otro paciente llamado Desmalles. Además, no verificó si la receta, dictada a un ayudante, había sido escrita correctamente. El interno que preparó la medicina confundió dos drogas y utilizó una de carácter venenoso. La prescripción fue escrita erróneamente en un formulario para uso interno en vez de uno para uso externo, como era la intención del médico. La jefa del laboratorio, que se suponía debería verificar todos los preparados, estaba ocupada en ese momento y dejó el trabajo para que lo realizara un asistente. Otro asistente corrigió el error en el nombre y escribió en el frasco M.Desnoyelles. El interno que administró la medicina no hizo caso de la dosis indicada y pasándole el frasco al paciente le dijo "tome un buen trago".

Los usos sociales dominan el azar, tal y como puede comprobarse en el ejemplo siguiente:

Al final del régimen de Franco, un estudiante se fue a vivir con una joven separada. Al cabo del tiempo tuvieron un hijo y acudieron al registro civil para inscribir al niño. Cuando anunció al funcionario que la madre del niño estaba casada con otro hombre el funcionario le dijo que eso era imposible y que por lo tanto no podía registrar al niño como hijo de su compañera. Desde el punto de vista legal, el hecho de que una mujer casada tuviera un hijo con un hombre que no fuera su marido, era un suceso imposible. Para salvar el escollo legal, el funcionario determinó que el niño era de padre conocido y madre desconocida, y así fue registrado en el libro de nacimientos. Las leyes que regían entonces en España los usos sociales, convirtieron un suceso imposible en otro improbable.

El azar es un fenómeno. La apreciación del fenómeno del azar es muy posible que sea tan antigua como la humanidad. La suerte o la mala suerte, las coincidencias, los hechos insólitos... nos enfrentan a una fuerza que no controlamos, y la incertidumbre se apodera de nosotros. El ser humano ha creado herramientas para intentar cercar al fenómeno incierto y poder controlarlo. Esas herramientas son la Estadística y la Teoría de las Probabilidades. La realidad es dual, exacto-aproximado, cierto-incierto, determinado-aleatorio. En la enseñanza de las matemáticas se ha hecho más hincapié en uno de los dos aspectos, exacto-cierto-determinado. El otro aspecto ha tenido poca presencia, cuando no nula, en el currículum básico.

Hay muchas razones. Repasemos algunas.

La teoría de las probabilidades y la estadística son ramas de la matemáticas relativamente recientes, si las comparamos con la geometría, el álgebra o el análisis.

En los estudios de licenciatura en matemáticas es mínima la presencia de la Teoría de las Probabilidades y la Estadística salvo para aquellos que realizan esa especialidad a partir del cuarto curso.

Cuando ha aparecido de forma tímida en el currículum, caso del B.U.P., se ha ligado al análisis combinatorio lo cuál es una dificultad añadida o aparece como último capítulo en los libros de texto, y el profesor, o no llega, o hace lo posible por no llegar. Y además aparece separada, desligada, la Teoría de las Probabilidades de la Estadística. Esta situación ya fue claramente descrita por H.Freudenthal (1973):

"La Estadística sin la referencia de los conceptos matemáticos y de las interpretaciones de la teoría de la probabilidad se reduce a una colección de recetas. La probabilidad separada de sus aplicaciones reales y practicada en el marco de la teoría de conjuntos o de la teoría combinatoria se transforma en un sistema matemático formal.

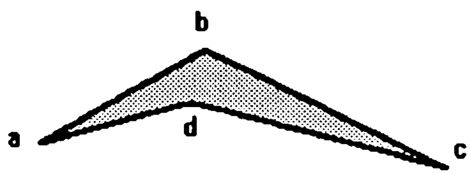
Tenemos pues dos sistemas, el uno abstracto y separado de la realidad. El otro reducido a una colección de recetas de cálculo listas para ser rellenadas con datos numéricos.

Parecen opuestos el uno del otro, pero de una forma natural son ambos complementarios".

En 1864 el matemático británico J.J.Silvester publicó en el Educational Times la siguiente cuestión (citado por Pfiefer, 1989):

Cuestión número 1491. Educational Times. Propuesta por J.J. Silvester.

"Demostrar que elegidos cuatro puntos al azar en un plano infinito, la probabilidad de que sean los vértices de un cuadrilátero reentrante es 1/4".



Cuadrilátero reentrante

De Morgan acepta el reto y envía una solución. Para él el valor de la probabilidad es 1/2. J.M. Wilson propone como solución 1/3. C.M. Ingleby no está de acuerdo con ninguna de las soluciones anteriores y sugiere una acotación " la probabilidad es menor que 1/2 ". Entre tanto profesional salta un espontáneo, un desconocido, que aventura una solución igual a 3/8. Por último, W.S.B. Woolhouse da como solución el valor:

$$\frac{35}{12\pi^2}$$

Todas estas soluciones diferentes llevan a J.J. Silvester a la siguiente conclusión, resumen de su informe presentado a la British Association en 1865:

"ESTE PROBLEMA NO TIENE SOLUCION DETERMINADA"

Asombrosa conclusión para venir de un renombrado matemático. ¿Qué pasó? ¿ Es que nadie fue capaz de ver cuál de las soluciones enviadas era la correcta?.¿O es que cada uno sugirió un número como si de un acertijo se tratara? La historia es mucho más compleja y para el que este interesado le remito a la cita bibliográfica.

La historia anterior nos viene a decir, y podemos decirlo en voz alta sin rubor, ¡Esto de la probabilidad es un asunto difícil! Si hasta los matemáticos renombrados cometen errores en público, ¡que será de mi pobre y simple profesor!.

2. EL AZAR EN LOS LIBROS DE TEXTO

Con el cálculo de probabilidades no ocurre lo que, digamos, con el álgebra o el análisis. Uno se prepara unos cuantos ejercicios tipo, se estudia tres o cuatro nociones básicas y puede sobrevivir. Los problemas de probabilidad tienen una sutileza especial. Y esta es otra razón por la que su enseñanza, a pesar de estar en el currículum, se evita calladamente. Veamos cómo se presenta el tema en dos libros de BUP muy utilizados (podríamos afirmar sin temor a equivocarnos que son los más utilizados, y recientes).

Vizmanos y Anzola (1990), en Algoritmo 1, después de haber contado en el apartado 2 del capítulo 26, como al lanzar doscientas veces una moneda, las frecuencias relativas del *suceso cara* tienden a aproximarse a un valor que allí se denomina probabilidad del suceso, se abre el apartado 3 con la definición clásica de probabilidad, no sin antes restar, cierta importancia al enfoque frecuencial.

".... Además por este procedimiento nunca se obtiene un valor exacto, sino una aproximación".

Con el fin de evitar estos inconvenientes, Pierre Simon Laplace (1749-1827) enunció la primera definición de probabilidad, que dice así:

"La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles. La probabilidad del suceso A se representa por p(A)".

Para continuar con una definición de qué se entiende o se debe entender por casos favorables y casos posibles.

Lo primero que nos llamó la atención fue el que no se valore en su justa medida una aproximación. Pero si uno sigue leyendo echará de menos algo que no se cita ni antes ni después de formular la ley de Laplace. La condición para la cuál es válida esa ley: ¡*los sucesos del espacio muestral han de ser equiprobables!*. Y no se cita por un hecho evidente. ¡En todos los experimentos, ensayos, o problemas que se utilizan en ese apartado los sucesos elementales son equiprobables!.

Con una introducción como la descrita a la ley de Laplace no nos debe extrañar que los alumnos la apliquen en todos los casos que se les presenten y que hagan de ella un instrumento tan milagroso y de tan amplio uso como hacen de la Regla de Tres.

En otro libro de texto (Guzmán y Cólera, 1987) para el primer año de B.U.P., se intercala entre los temas de combinatoria y los de probabilidad el estudio de la estadística.

En el capítulo de introducción al azar y la probabilidad se dedica un buen número de páginas al estudio de la estabilidad de las frecuencias relativas. Aquí sí se conectan la estadística y la probabilidad para abordar el estudio del azar. Sin embargo, no se sale de los clásicos experimentos con dados, monedas y barajas. Cuando se aborda la ley de Laplace sí se cita expresamente la condición de equiprobabilidad requerida por tal ley:

"Si tenemos garantías para suponer que los distintos sucesos elementales tienen la misma probabilidad (son equiprobables), la probabilidad de cada suceso elemental es:

$$p = 1/(\text{número de sucesos elementales})$$

Así, en un dado, p(3)=1/6; en una moneda p(cara)=1/2; en una baraja...".

Sin embargo, cada vez que juego al parchís y no dispongo de ninguna ficha en juego ,y no por que haya ganado sino todo lo contrario, pienso que la probabilidad de que salga un cinco en mi dado no se diferencia mucho de la del suceso imposible.

Además, ¿Quién garantiza la equiprobabilidad?

Por cierto, ¿Cuándo me puedo fiar de un dado?.

En los ejercicios que se proponen después de la introducción teórica y los ejemplos ilustrativos, encontramos entre otros, los siguientes:

"3. Si lanzas una peseta y un duro, los suceso elementales son (sigue una fotografía de los cuatro sucesos posibles) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras? ¿Cuál la de obtener una cara y una cruz? Sol.: 1/4 y 1/2 respectivamente.

4. Al tirar dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 5? Sírvete de esta tabla para hacer tús cálculos. Sol.: 4/36=1/9".

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Si el profesor pregunta a los alumnos qué resultados posibles se obtienen del lanzamiento de dos monedas, obtendrá por respuesta TRES, con un porcentaje muy alto. Pero además cada suceso tendrá a los ojos de los alumnos la misma probabilidad. La tendencia que tienen los alumnos, a considerar los resultados de un experimento aleatorio como equiprobables ha sido constatada por un reciente estudio (Lecoutre, 1992). La razón aducida por los alumnos para considerar equiprobables los resultados de un experimento aleatorio es "*que se debe al azar*". La naturaleza misma del experimento, ser aleatorio, es la clave. En otras palabras, se establece la relación sucesos de un experimento aleatorio equivale a sucesos equiprobables. Los experimentos aleatorios con los que se introduce el azar usualmente: dados, monedas, barajas..., tienen esa particularidad. ¿Cómo romper entonces esa concepción en los alumnos? Lo que sí parece claro es que esa concepción se refuerza con el tipo de situación usual.

Por otro lado, si el profesor, en el caso de los dos dados, suministra una representación de los sucesos elementales y además señala cuales se han de tener en cuenta, esta privando a los alumnos de todo un proceso fundamental en el cálculo de probabilidades.

Escribir un libro de texto es una tarea ardua y difícil. Uno tiene que contentar al editor, lidiar con el otro autor, dirigirse al alumno y al profesor al mismo tiempo, y luchar contra sus propias convicciones. A veces, los fantasmas del pasado pesan mucho.

Calcula la probabilidad de obtener cuatro cruces al lanzar cuatro monedas. (Para el número de casos posibles recuerda, de combinatoria, la fórmula de VR^n_m).

¿No parece más instructivo que el alumno enumere sistemáticamente todos los resultados posibles y distinga de estos cuáles son los favorables al suceso? ¿Por cuánto tiempo recordarán los alumnos esa fórmula de combinatoria? ¿A cuántas situaciones de probabilidad la asocian? Por último, ¿Por qué utilizar una fórmula, tan importante y necesaria, cuando el colectivo es muy amplio y no queda más remedio que hacer un recuento indirecto, si en la situación que se propone el colectivo es pequeño?

Ejemplos como los anteriores, y hay muchos a pesar de los grandes esfuerzos que se hace en algunos libros de texto[1], y el último citado es un buen ejemplo: hacen que los alumnos adquieran una nula intuición de la probabilidad al reducir su cálculo a valores exactos. Al ligar el cálculo de probabilidades a la combinatoria y, en definitiva, al reducir el estudio del azar a unas cuantas situaciones simples y muy estructuradas.

El determinismo viene en ayuda del azar para correr un tupido velo sobre él y ocultarnos sus principales características: la estimación, la aproximación en definitiva la incertidumbre.

¿Qué se propone en el nuevo currículum dentro de la Reforma L.O.G.S.E.?

En la educación secundaria obligatoria (E.S.O.) aparece un bloque dedicado al Azar. La Estadística está en el bloque IV que comparte con el estudio de fenómenos causales (funciones). Si atendemos a la redacción original, la aparecida en el D.C.B. (1989), vemos que cada bloque tiene una introducción que de alguna forma avanza el escenario y las intenciones de los diseñadores.

Veamos la introducción al bloque V: El Azar.

"Este bloque está orientado a desarrollar la intuición sobre lo aleatorio a través de la reflexión sobre situaciones de azar y sobre el concepto de probabilidad...se debe trabajar a lo

---

1 Aunque ultimamente se ha restado importancia a los libros de texto, no debemos olvidar que son la fuente y el medio que utilizan muchos profesores para desarrollar su enseñanza y la mayor parte de las veces es el único medio impreso del que disponen los alumnos para aprender.

largo de toda la etapa, aunque su peso crecerá a medida que ésta avanza coincidiendo con el desarrollo evolutivo de los alumnos. Es conveniente comenzar con la observación de juegos y fenómenos de azar y con apreciaciones cualitativas sobre la ocurrencia de sucesos. El enfoque frecuencial que permite realizar estimaciones de la probabilidad, permitirá ir afinando progresivamente el concepto e interpretación de la misma, y desarrollar otros métodos para calcularla en los últimos años. La actividad en torno al azar contribuye notablemente al aprendizaje de procedimientos de tipo general, como son el diseño de experimentos, y la observación, registro y búsqueda de regularidades en los resultados".

He aquí todo un escenario. Lo primero es reflexionar sobre situaciones de azar y sobre el concepto de probabilidad, con la visión puesta en el desarrollo de la intuición sobre lo aleatorio. Si las situaciones iniciales son las vistas con dados y monedas, se invita poco a la reflexión, más bien se fomenta en los alumnos el uso generalizado de respuestas rápidas. ¿Cómo favorece esa reflexión? observando juegos y fenómenos de azar y con apreciaciones cualitativas sobre los sucesos. Se hace una llamada expresa al enfoque frecuencial, al modelo empírico de la probabilidad, y al valor que tienen las estimaciones en este modelo de cara al desarrollo del concepto de probabilidad.

Las palabras suelen evocarnos determinados significados, sobre todo en matemáticas. Si decimos cálculo de probabilidades, asociamos la palabra con la determinación de la probabilidad a priori. De esta forma, la frecuencia relativa de un suceso no tiene la connotación de probabilidad, además de que no es la probabilidad. Así, un método empírico, el asociado a la frecuencia relativa, pierde cierto valor como método para calcular probabilidades.

Pues bien, ¿ por qué en vez de calcular probabilidades no asignamos probabilidades a sucesos? Se trataría entonces de disponer de diferentes métodos o procedimientos para asignar probabilidades a un suceso. Tendríamos que ser cuidadosos y cumplir determinadas restricciones. Y además tendríamos que hacerlo con un objetivo determinado para que ese proceso cobre significado. En los juegos de azar las apuestas tienen importancia capital y además, el hecho de que el juego sea legal o no, las relaciona con las probabilidades de los resultados posibles del juego. Los repartos equitativos están relacionados con el concepto de equiprobabilidad, idea básica que sustenta la aplicación de la regla de Laplace.

En un estudio realizado con alumnos de diferentes edades, se les planteó la siguiente situación (García Cruz, 1989):

Marcos y tú jugáis con un dado.
Marcos gana 100 pts si sale 2,3,4,5 ó 6.
Si sale un 1, ganas tú.
¿Cuánto deberías ganar tú cuando obtienes un 1 para que el juego sea justo?

Dieron como respuesta 500 pts: el 45% de los alumnos de EGB (cursos 7° y 8°), 56% de los alumnos de BUP-COU, y 51% los alumnos de FP.

Con total seguridad, ningún alumno de EGB había sido instruido por sus profesores en probabilidades y menos en disquisiciones sobre la legalidad de un juego. Los alumnos de BUP habían sido instruidos, en el primer curso, en la probabilidad siguiendo básicamente el modelo tradicional de asociar el cálculo de probabilidades con el análisis combinatorio. Los resultados para 1° y 2° de BUP son respectivamente 41% y 59%. Para 7° y 8° de EGB, obtuvimos el 39% y 51% respectivamente.

Si existe un tópico sobre el que las personas tenemos nociones previas ese tópico es el azar.

¿Aplicaron la regla de Laplace los alumnos para responder 500 pts en la cuestión planteada anteriormente?

Puede que si, pero puede que no. Cabe otra interpretación más plausible: de los seis puntos posibles hay CINCO para Marcos y UNO para mí. Luego la relación 5:1 me lleva a que yo perderé 100 pts cinco veces en un juego de seis secuencias y por lo tanto en la única en que ganaré, Marcos me debe pagar 500 para compensar mis pérdidas. La estrategia es ligeramente diferente a la regla de Laplace. Lo que interesa es la relación *puntos a favor:puntos en contra*, que es justo la estrategia que se utiliza para establecer los pagos y las apuestas en los juegos de azar.

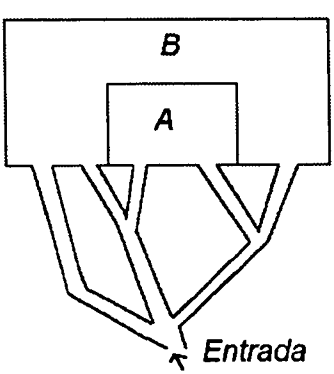
3. MODELIZAR EL AZAR. ASIGNAR PROBABILIDADES

La fundamentación lógica del azar, del cálculo de probabilidades, está en la teoría de conjuntos. Pero, ¿dónde está la raíz cognitiva? ¿Sobre qué construir las nociones básicas, intuitivas, preconceptuales? ¿En los juegos? ¿En todos los juegos? ¿En qué clase de juegos? No tenemos respuestas para tantas preguntas.

Los juegos tienen una ventaja. Los niños desde muy pequeños desarrollan habilidades e intereses particulares por los juegos. La equidad en los juegos es una noción básica y produce demasiadas peleas entre los más jóvenes hasta aceptar determinadas normas.

Las trampas en los juegos son artimañas introducidas para variar la equidad. Los valores y normas sociales que se desarrollan en los juegos son incuestionables.

Una situación que se presenta como un juego y que permite introducir varios modelos para signar probabilidades a los sucesos es la siguiente:



Inicialmente se puede plantear como sigue:

Cada dos alumnos reciben un ejemplar del dibujo.

Se juega con una ficha, que se coloca en la entrada.

Se les dice que en cada bifurcación, incluida la entrada, se debe sortear el camino que tomará la ficha en el siguiente movimiento. El cómo y con qué se realiza el sorteo lo tienen que decidir ellos.

Se les pide que jueguen un rato. Y que anoten las veces que la ficha llega a A o a B.

Luego cada grupo expone al resto de la clase el cómo y con qué ha realizado el sorteo y los resultados obtenidos. Aquí surge bastante material como para dilucidar asuntos claves tales como si el sorteo se ha realizado correctamente, ¿qué se entiende por correctamente?, y sobre las posibilidades de llegar a A o a B.

Se puede continuar de la siguiente forma:

Supongamos que todos juegan, cada uno en su tablero, contra el profesor. El profesor siempre elige la meta B. Cada alumno apuesta 100 pts, que perderá si la ficha llega a B.

¿Cuánto ha de pagar el profesor a cada alumno cuando la ficha acabe en A y por lo tanto gane?

Esta pregunta se les hace no para que la contesten rápidamente sino para que reflexionen sobre la misma, con lo que ya conocen del juego, y para que den un valor argumentado.

Algunas anotaciones. Hay alumnos que se centran en las cinco formas de llegar conjuntas que hay a A y B. Como hay tres para B y dos para A. Pues tenemos 3/5 (tres sobre cinco) para B y 2/5(dos sobre cinco) para A. Otros utilizaran los datos empíricos que han obtenido en cada grupo. En este momento, el profesor, y dada la disparidad de soluciones aportadas, debe proponer un ensayo general coordinado.

Cada grupo utilizará el mismo procedimiento para el sorteo en las bifurcaciones (garantizar condiciones equivalentes).

Realizará el mismo número de veces el juego (muestras parciales).

Se hará, conjuntamente, un estudio acumulativo de los resultados. (búsqueda de regularidades)

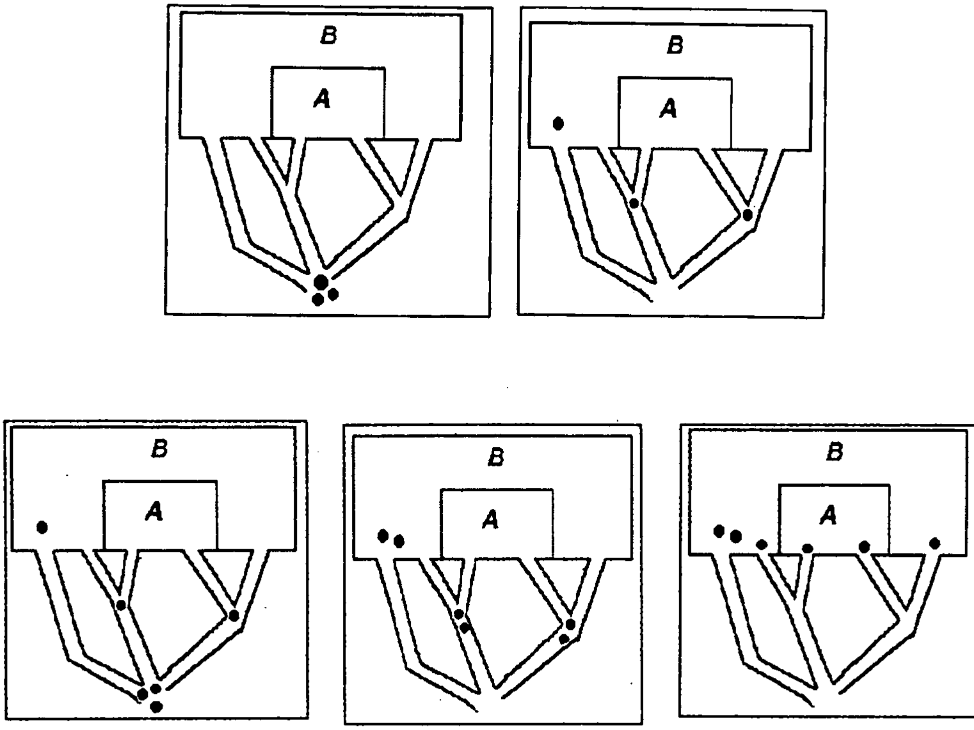
Con la evidencia, que la habrá, de los datos empíricos se tomarán decisiones sobre el pago que tendrá que realizar el profesor cuando un alumno gane.

Esta situación se puede aprovechar, a continuación o en otro momento, para presentar varias estrategias de cálculo de posibilidades.

3.1. Estrategia: Abaco probabilístico (Engel, 1975)

Reglas del juego: En cada bifurcación se han de repartir las fichas de forma proporcional a la probabilidad de que se tome cada bifurcación. No habrá movimiento siempre que no se disponga del número de fichas necesario.

Observar las siguiente imágenes:



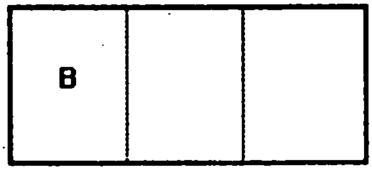
El hecho de que, en este ejemplo, en cada bifurcación se ha de tener un número de fichas igual al número de caminos que de ella parten para poder mover las fichas es lo que caracteriza la equiprobabilidad.

Un simple recuento no indica que para llegar a B tenemos 4/6 (4 de 6) y para llegar a A 2/6 (2 de 6).

3.2. Estrategia: Modelo geométrico

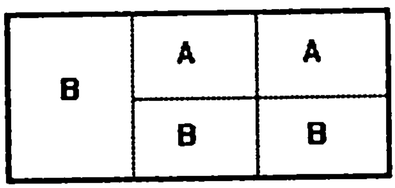
Esto es lo que hay que repartir entre A y B.

Después del primer sorteo, primera bifurcación, dividimos en tres partes iguales el rectángulo anterior.



Y una de las partes es para B, pues en B hay ya una ficha.

Una vez realizado cada sorteo de las bifurcaciones que quedan, asignamos a A y B la mitad de cada tercio.

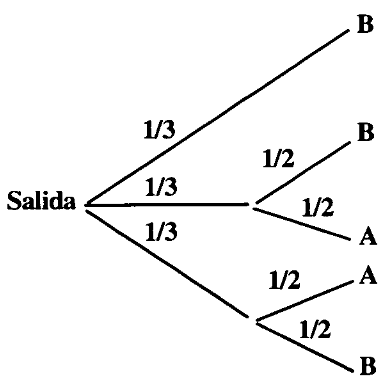


¿Qué parte del rectángulo se lleva B?

Fácilmente se concluye que B se lleva los 4/6 y quedan para A los 2/6.

3.3. Estrategia: Diagrama de árbol

El esquema del diagrama de árbol surge como una simplificación natural del tablero.



Y podemos asignar a cada rama sus respectivas probabilidades, derivadas de los sorteos parciales.

Aquí pueden surgir algunas cuestiones.

¿Cómo calculamos la probabilidad de B?

Habrá que sumar los resultados correspondientes a cada rama que acaba en B. Para la rama superior no hay duda, pero para la rama siguiente ¿es 1/3 por 1/2? o es ¿1/3 más 1/2?

En otras palabras, las probabilidades parciales ¿se suman? o ¿se multiplican?

Los cálculos realizados con los dos modelos anteriores vienen en nuestra ayuda.

Por el modelo geométrico o por el ábaco, sabemos que a la segunda rama le corresponde 1/6 del total del rectángulo o 1 ficha de las seis jugadas, respectivamente.

Pues bien, 1/6 es igual a 1/2 por 1/3 y no 1/2+1/3.

Una vez introducidos estos modelos se puede retomar el modelo frecuencial, a partir de los datos empíricos obtenidos, y comparar los resultados de las acumulaciones parciales (muestras parciales) con estos valores teóricos. Y, muy importante, resaltar el valor de estimación y la aproximación que representan aquellos respecto del valor teórico.

4. UN JUEGO A MODO DE EJEMPLO

Ilustraremos mediante una situación práctica un juego, una propuesta didáctica para el desarrollo del azar en el aula. La misma consta de cinco fases: Exploración, Discusión, Diseño/Ejecución, Reflexión y Generalización.

La situación:

LA CARRERA DE FICHAS

META	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SALIDA												

Material. Por cada grupo de cuatro alumnos: Un tablero. Doce fichas. Dos dados.

Reglas del juego: Se sitúa una ficha en la casilla de salida correspondiente a cada columna numerada. Cada alumno apuesta por un número. Se lanzan los dos dados y según la suma de puntos que se obtenga, la ficha correspondiente avanza una casilla en su columna respectiva. La partida termina cuando una ficha alcanza la casilla de meta correspondiente. Gana el jugador cuya ficha alcanza en primer lugar la meta.

FASES

Exploración

Dejar a los alumnos jugar a discreción durante cinco minutos, o el tiempo necesario para que cada grupo concluya una partida al menos.

Pedir a cada grupo una descripción, por escrito, del resultado de cada partida (No indicar, de entrada, como debe ser esa descripción). Intentar, en segundo lugar, que dicha descripción sea lo más pormenorizada posible sobre el número de movimientos que ha realizado cada ficha.

Pregunta (a cada grupo): Si volvieras a jugar otra vez, *¿Qué columna elegirías?* Explica por qué.

Discusión

Los grupos han de poner en común la respuesta dada a la pregunta de la primera fase.

El papel del profesor en esta fase al igual que en la anterior deberá ser de mero observador y moderador de la actividad y de la discusión. Sin embargo deberá prestar especial cuidado a que los alumnos precisen sus argumentaciones. Ayudará a establecer clasificaciones entre las distintas columnas o grupos de columnas, siendo el criterio de clasificación *" mayor posibilidad de ganar "*.

Al final de esta fase puede que se llegue a la conclusión de que no se ha jugado el suficiente número de partidas.

Si así fuera se podrá pasar a la tercera fase.

Diseño/Ejecución

Lo primero a decidir es ¿Cuántas partidas hay que jugar?.

Una vez llegado a un acuerdo, entre todos los grupos, hay que diseñar con mucho cuidado la realización y recogida de los datos. En esta parte es importante la intervención del profesor. Si se dispone en clase de 6 ó 7 grupos se les puede pedir que cada grupo juegue CINCO partidas.

De cada partida se hará una copia del resultado final en una hoja idéntica al tablero (primer recuento).

Una vez que el grupo tenga los cinco recuentos, se les explicará cómo tabular los resultados obtenidos (acumulados) para cada casilla (número).

Reflexión/Interpretación

Esta fase exige una mayor intervención por parte del profesor. Sin embargo, no se trata de que inicie de ninguna manera la interpretación de los datos tabulados.

Se puede comenzar con algunas preguntas del tipo:

• *¿Qué significado tiene ese CERO que aparece en la tabla correspondiente a la casilla numerada con el UNO?*

• *¿Cambia nuestra clasificación anterior (fase segunda) a la vista de los nuevos resultados obtenidos?*

• *¿Qué significa ese número que aparece, por ejemplo, bajo la casilla numerada con el SEIS? ¿Cómo podemos utilizar ese dato?*

A continuación se procederá a una tabulación de frecuencias absolutas acumuladas. Se trata de ver cómo influye el tamaño de la muestra en nuestras conclusiones?

El profesor elegirá una muestra inicial, el resultado de un grupo en particular, y acumulará los de otro grupo. Habremos obtenido una muestra doble de la que hasta este momento ha tratado cada grupo.

• Esta nueva muestra, *¿Cambia o reafirma nuestras conclusiones con respecto a la clasificación realizada en la fase segunda?*

De esta forma, y sucesivamente, se ampliará el tamaño de la muestra hasta haber utilizado todas las muestras parciales.

Para cada muestra (acumulación) se puede introducir el cálculo de la frecuencia relativa (en tantos por ciento). Puede ser como respuesta a la pregunta: *¿En que medida ocurre cada suceso respecto del total de movimientos?*

Es muy posible que con las frecuencias absolutas baste para realizar una apuesta, pero la visión de una tabla de frecuencias relativas y la tendencia a la estabilización de las mismas puede ser determinante en cuanto a la precisión deseada respecto de la estimación de la ocurrencia de suceso.

Generalización

Esta fase tiene por objeto el que el profesor explicite, haga un resumen, de lo trabajado hasta ese momento. Interesa, en esta actividad, hacer constar los elementos introducidos para obtener las conclusiones a que se ha llegado. Los elementos más importantes son: frecuencia absoluta y acumulada, frecuencia relativa de un suceso. Suceso imposible. Apreciación cualitativa de la ocurrencia de sucesos. Valoración cuantitativa de la ocurrencia de sucesos mediante el estudio de la frecuencia absoluta acumulada y de la frecuencia relativa. Estabilidad de las frecuencias relativas acumuladas. Estimación de la ocurrencia de un suceso. En definitiva todo aquello que es deseable organizar, conocimientos y procedimientos, de cara a utilizarlos en otras situaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ENGEL, A. (1975): "The Probabilistic Abacus". *Educational Studies in Mathematics, 6.*

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* Reidel, Dordrecht.

GARCIA, J.A. (1989): *Estudio sobre nociones y conceptos de azar entre alumnos de 12 a 18 años de edad.* Proyecto de innovación (sin publicar). Consejería de Educación del Gobierno de Canarias.

GUZMAN y COLERA (1987): *Matemáticas. Bachillerato 1.* Anaya, Madrid.

LECOUTRE, M.P. (1992): "Cognitive models and problem spaces in 'purely ramdom' situations". *Educational Studies in Mathematics, 23.*

M.E.C. (1989): *Diseño curricular base.* Educación secundaria obligatoria II, Madrid.

PFIEFER, R.E. (1989): "The historical development of J.J. Sylvester's four point problem". *Mathematics Magazine*, Vol. 62, Nº 5.

VIZMANOS Y ANZOLA (1990): *Algoritmo 1. 1º de B.U.P.* Editorial SM, Madrid.

WEAVER, W. (1963): *Lady Luck. The theory of probability.* Dover Publications Inc. New York.