# ANALISIS DIDACTICO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

MARTIN M. SOCAS ROBAYNA
MATIAS CAMACHO MACHIN
JOSEFA HERNANDEZ DOMINGUEZ

## RESUMEN

En este artículo se reflexiona sobre el análisis didáctico de lenguaje algebraico y su implicación en una propuesta de formación del profesorado de Secundaria. A partir de un análisis breve de las principales características que los nuevos currículos de Matemáticas poseen, se concretan los aspectos más significativos que el conocimiento didáctico debe aportar al profesor, y se analiza el lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria a partir de los siguientes organizadores: la contextualización del currículo, los contenidos de álgebra en términos de capacidades, los sistemas de representación semióticos, los materiales y recursos, las dificultades, obstáculos y errores, así como los modos y situaciones de enseñanza. Concluimos con sugerencias metodológicas, donde los organizadores del análisis didáctico juegan un papel significativo para la formación de los futuros profesores.

## ABSTRACT

In this paper we present some aspects of the didactic analysis of the algebraic language and its implications in a training proposal of the Secondary teachers. From a brief analysis of the principal characteristics that the new mathematics curriculum posseses, we establish the most meaningful aspects that the didactic knowledge must provide the teacher. We analyze the algebraic language in secondary education from the following organizers: the curriculum context, the algebra contents in capacity terms, the semiotic representation systems, the material and resources, the difficulties, obstacles and mistakes, as well as the modes and teaching situations. We conclude with methodological suggestions, where the organizers of the didactic analysis play a meaningful role for the training of the future teachers.

## PALABRAS CLAVE

Algebra, Análisis didáctico, Formación del profesorado de Secundaria, Errores, Representaciones semióticas.

## KEYWORDS

Algebra, Didactic analysis, Secondary teachers training, Mistakes, Semiotic representations.

## 1. INTRODUCCION

La formación del profesorado de Matemáticas de Secundaria se encuentra actualmente en España sometida a una profunda revisión, no exenta de debate (Rico, 1994). Esta formación en Matemáticas se caracteriza fundamentalmente por las nuevas demandas profesionales que derivan de la L.O.G.S.E.

Conviene destacar que los planteamientos de las Matemáticas en los currículos actuales chocan frontalmente con los de los programas anteriores. La LOGSE destaca la importancia de los procesos de adquisición del conocimiento, así como la relevancia de intervenir en el camino de aprendizaje y maduración personal recorrido por el alumno -aspectos estos subyacentes en una posición constructivista de la enseñanza- en contraposición con el modelo tecnológico -con fundamentos conductistas- propugnado por la anterior Ley de Educación, para la cual lo esencial era la consecución de una serie de objetivos y contenidos susceptibles de ser observados y medidos.

El conocimiento profesional del profesor de Matemáticas representa en la actualidad un importante campo de investigación (Shulman, 1986; Llinares, 1991; García, 1997), donde los procesos de aprender a enseñar Matemáticas constituyen una de las perspectivas de numerosas investigaciones. En este trabajo vamos a considerar diferentes aspectos del conocimiento didáctico y lo vamos a diferenciar del conocimiento matemático y del conocimiento de la práctica educativa, considerando éstos dos últimos como otros componentes del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

No debemos olvidar que el currículo de matemáticas que el profesor debe implementar ha sido determinado por diversos agentes del macrosistema educativo mediante un proceso que generalmente resulta desconocido al profesor. El currículo, a su vez, está organizado por una lista de contenidos que están relacionados con las capacidades que pueden desarrollar e inmerso en una concepción determinada de entender la enseñanza y el aprendizaje, así como el proceso de evaluación. Es necesario, por tanto, que el futuro profesor reflexione sobre este currículo, es decir, lo asimile en su globalidad, en su coherencia, en su finalidad, y haga del mismo una interpretación personal.

Como sabemos, nuestra Reforma Educativa en los niveles no universitarios, que se llevó a cabo a partir del curso 1989-90 (MEC, 1989) requiere un profesorado capaz de abordar los cambios curriculares subyacentes, enfrentándose a nuevas tareas, entre otras, las que suponen un currículo abierto que obliga a valorar y elegir entre diversas alternativas pedagógicas la más adecuada a su realidad, tareas más complejas que las contempladas en un currículo cerrado, basado en decisiones teóricas hechas por los diseñadores del currículo con relación a lo que los estudiantes deben aprender, en qué orden y con qué fin. En términos más concretos la propuesta curricular en matemáticas plantea grandes desafíos a los programas de matemáticas actuales.

Desde el punto de vista de los alumnos tenemos que "todos" los alumnos estudiarán matemáticas al menos hasta los dieciséis años, y "todos" los alumnos deberán aprender a "hacer" matemáticas y comprobar que "las matemáticas tienen sentido", esto supone una modificación sustancial de los planteamientos de los profesores de matemáticas sobre los programas anteriores, es decir, lo que se propone es considerablemente distinto de la práctica habitual en matemáticas. Mientras en el modelo actual prima el conocimiento sobre las matemáticas, ahora se propone el "hacer" matemáticas, obviamente la diferencia es notable.

Desde el punto de vista de los profesores, éstos han de adecuar su "epistemología de profesor" para negociar con sus alumnos un contrato didáctico (Brousseau, 1986) donde ambos se comprometen a "hacer matemáticas" y a "darle sentido a las matemáticas", es decir, propiciando y aceptando, respectivamente, un conjunto de situaciones-problemas que deben ser trabajados fundamentalmente en grupo, a semejanza de como lo harían los matemáticos en sus investigaciones.

Desde el punto de vista de los recursos, el entorno tecnológico aparece también como un cambio significativo, se supone que es necesario realizar parte de este trabajo en grupo, en el sentido de un trabajo de laboratorio de matemáticas, recogiendo datos, utilizando calculadoras y ordenadores, etc.

Las preguntas son obviamente dos: ¿es posible desarrollar e implementar el programa de matemáticas que propone nuestra reforma educativa?, y si así fuera, ¿es posible desarrollar e implantar programas de formación de profesores que permitan cambios en la epistemología de éstos para que la implantación de un currículo de esta naturaleza se lleve a cabo?

Estos planteamientos requieren nuevas formas de organizar la *formación inicial* y permanente del profesorado en Matemáticas. En este trabajo tomaremos como referencia el lenguaje algebraico del currículo de Matemáticas de la E.S.O.

## 2. ANALISIS DIDACTICO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

El conocimiento didáctico de un contenido matemático debe aportar los elementos de análisis adecuados para planificar y realizar el trabajo profesional. El profesor necesita ampliar su perspectiva sobre los contenidos del currículo de matemáticas, de manera que su consideración no sea solamente desde la lógica interna de la disciplina, excesivamente restrictiva, formal y técnica, sino desde la dimensión curricular, perspectiva más abierta e integradora del saber matemático a enseñar.

Consideramos el Diseño Curricular Base de Matemáticas como una organización sistemática, basada en una caracterización mediante cuatro variables fuertemente relacionadas: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. Esta múltiple relación entre las cuatro variables, que se van desarrollando y concretando, primero, en los Proyectos Curriculares de Centro y, más tarde, en las Programaciones de Aula, constituye para la mayoría de los profesores un difícil problema a resolver.

El profesorado, a efectos de poder diseñar, elaborar, desarrollar y evaluar las diferentes concreciones curriculares necesita hacer un estudio en profundidad sobre cada uno de los contenidos de los diferentes bloques temáticos del currículo. Este estudio sobre los contenidos del currículo objeto de enseñanza le permite ampliar su conocimiento didáctico y está basado en diferentes fuentes disciplinares a las que Rico (1997) denomina organizadores del currículo. Las aportaciones de cada uno de estos organizadores permiten hacer un análisis didáctico en profundidad de los distintos contenidos, información que hará posible el diseño y la gestión de las unidades didácticas (Rico, 1997).

De manera más concreta el Conocimiento Didáctico debe aportar información que permita al futuro profesor, entre otras cosas: la contextualización del currículo de Matemáticas, en términos de poder analizar, situar y secuenciar cada uno de los bloques de contenido del currículo y conocer la estructura de los contenidos de cada uno de ellos en forma de capacidades cognitivas que pueden desarrollar cada uno de los conocimientos matemáticos del currículo; las representaciones y modelización de los diferentes objetos matemáticos del currículo, en términos de conocer y utilizar los diferentes sistemas de representación semióticos del conocimiento matemático y sus usos en diferentes procesos de modelización, y conocer y utilizar diferentes materiales y recursos, en los que se incluye las referencias bibliográficas; los aspectos cognitivos implicados en el aprendizaje, en términos de conocer y analizar dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas;

los aspectos de enseñanza, con objeto de analizar y diseñar modos y situaciones (actividades) de enseñanza de los contenidos matemáticos y prever sus consecuencias; y la evaluación del aprendizaje, a efectos de analizar y diseñar situaciones (actividades) para conocer y valorar el dominio de los aprendizajes realizados.

Para el caso concreto del Algebra vamos a analizar los siguientes organizadores:

- Contextualización del currículo de Algebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
- Los contenidos de Algebra en términos de capacidades.
- Sistemas de representación semióticos en Algebra.
- Materiales y Recursos para la enseñanza-aprendizaje del Algebra.
- Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Algebra.
- Modos y situaciones de enseñanza del Algebra.

### 2.1. Contextualización del currículo de Algebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Los contenidos correspondientes a este tema, forman parte del Bloque I: *Números, y operaciones: significados estrategias y simbolización.* Estos quedan determinados en conceptos: Significado y uso de las letras para representar números (desconocido, cualquiera o en relación con otros números), fórmulas, ecuaciones, y reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas; en procedimientos: interpretación y utilización del lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso, interpretación y elaboración de códigos, tablas alfanuméricas para simbolizar, gestionar o presentar informaciones, formulación de problemas algebraicos, determinando los términos en que se plantean, el proceso y los cálculos utilizados para resolverlos, utilizar las propiedades de las operaciones y las reglas de uso de los paréntesis en cálculos escritos y en la simplificación de expresiones algebraicas sencillas, utilización de algoritmos, formales, numéricos y gráficos, para resolver ecuaciones, y búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjunto de números; y en actitudes: valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para representar, comunicar o resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

En cuanto al Bachillerato en el documento Estructura y Contenidos para el Bachillerato del MEC, se recoge explícitamente, en las Especialidades de Humanidades y Ciencias Sociales la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (en primer curso, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, y en el segundo utilizando las matrices), mediante métodos gráficos, así como una profundización de lo aprendido en la etapa anterior. Con respecto al Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y Tecnología, en el primer curso se trata la resolución de ecuaciones algebraicas, y en el segundo curso se estudian las matrices y determinantes, y como aplicación, resolver sistemas de ecuaciones lineales. En el segundo curso del Bachillerato de Ciencias Humanas y Sociales aparece como contenido específico la programación lineal.

Los profesores deben analizar, situar y secuenciar estos elementos de contenidos del Algebra en la ESO y en el Bachillerato, poniendo en juego los diferentes organizadores del análisis didáctico, así como sus conocimientos sobre la epistemología y fenomenología del lenguaje algebraico.

## 2.2. Los contenidos de Algebra en términos de capacidades

Es importante que el profesorado tome en consideración que los contenidos del currículo no son una simple lista de contenidos a enseñar, sino que son los instrumentos que permiten desarrollar las capacidades generales planteadas en los objetivos generales de la Etapa y del Area, por ello es de interés que el profesorado relacione estos contenidos con las capacidades a desarrollar en términos de competencia matemática del alumno. Esta competencia para el caso del Algebra puede agruparse en torno a:

- Habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas.
- Habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas.
- Habilidad para razonar y analizar información dada en lenguaje algebraico.
- Conocimiento y entendimiento de los conceptos y procedimientos algebraicos.
- Disposición positiva hacia el Algebra.

El profesorado debe reflexionar sobre estas competencias y formular indicadores de estas habilidades en término de capacidades a desarrollar con sus alumnos.

Como indicadores de la habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas, podemos señalar: formular problemas algebraicos, aplicar diferentes estrategias en la resolución de problemas algebraicos, verificar e interpretar resultados y generalizar soluciones.

Como indicadores de la habilidad para usar el lenguaje algebraico en la comunicación de ideas, podemos señalar: expresar ideas matemáticas utilizando el lenguaje algebraico verbalmente y por escrito, comprender e interpretar las ideas matemáticas que se presentan en lenguaje algebraico y usar la notación algebraica para estructurar y representar ideas, describir situaciones y modelos.

Como indicadores de la habilidad para razonar con el lenguaje algebraico, podemos señalar: analizar situaciones expresadas en lenguaje algebraico para determinar propiedades y estructuras comunes, usar el razonamiento deductivo para verificar conclusiones y construir argumentos válidos expresados en lenguaje algebraico, usar el razonamiento inductivo y el lenguaje algebraico para hacer, reconocer y refutar conjeturas.

Como indicadores del conocimiento y entendimiento de los objetos del Algebra, podemos señalar los siguientes: clasificar y definir conceptos expresados en lenguaje algebraico, identificar y generar ejemplos y contraejemplos, usar diferentes representaciones semióticas para representar los objetos del Algebra, reconocer los distintos significados y representaciones de los objetos del Algebra, identificar propiedades de los objetos algebraicos y reconocer condiciones que determina un objeto particular, comparar y contrastar objetos del Algebra.

Como indicadores de la habilidad para el conocimiento y entendimiento de procedimientos algebraicos, podemos señalar: reconocer cuando un procedimiento algebraico es el apropiado, razonar los pasos de un procedimiento, ejecutar procedimientos de forma segura y eficiente, verificar los pasos de un procedimiento de forma empírica y analítica, reconocer si un procedimiento es correcto o incorrecto, crear o generar nuevos procedimientos y ampliar o modificar otros ya conocidos.

Como indicadores de la actitud de los alumnos en el trabajo individual y cooperativo y en su apreciación al Algebra, podemos señalar: confianza en el Algebra para resolver problemas, comunicar ideas y razonar, flexibilidad y tolerancia en la exploración de objetos algebraicos, predisposición a perseverar en la búsqueda de soluciones o conclusiones cuando trabaja con objetos algebraicos, interés, curiosidad y creatividad en los trabajos con Algebra, apreciaciones de las aplicaciones del Algebra a otras áreas y a experiencias de la vida cotidiana.

## 2.3. Sistemas de representación semióticos en Algebra

Los objetos de álgebra, al igual que el resto de los objetos de las matemáticas, se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferente: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Pero mientras el estatus conceptual del objeto matemático se presenta organizado en diferentes redes conceptuales y es plenamente aceptado, los sistemas de representación semióticos (SRS) que caracterizan el estatus operacional (representaciones numéricas, códigos algebraicos, gráficas, diagramas, etc.) en los que los objetos son expresados y comunicados, han recibido menor atención tanto por los matemáticos como en el sistema educativo.

Sin embargo, las matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación y en muchas ocasiones, los estudiantes y profesores trabajan con sistemas de representación intermedios (diagramas, geométricos, balanza, etc.) de manera inconsciente, con la intención de que ayude al estudiante a ser competente en el sistema de representación convencional apropiado.

Kaput (1987) señala que cualquier SRS se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado:

1. Las traslaciones entre SRS formales, por ejemplo, las traslaciones entre los sistemas de representación formal aritmético y formal algebraico.

2. Las traslaciones entre SRS formales y no formales, por ejemplo, las traslaciones entre representaciones mediante el lenguaje natural, las representaciones físicas, las representaciones geométricas, los diagramas, etc. y la representación formal algebraica.

3. Las transformaciones y operaciones dentro de un mismo SRS, sin referencia a ningún otro SRS, por ejemplo, las transformaciones y operaciones dentro del sistema de representación formal algebraico, sin otro significado referencial que sí mismo.

4. La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los SRS intermedios, creados durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza. Estos SRS intermedios se integran en SRS más abstractros y sirven de base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de generalización mayor (a veces denominado: "abstracción reflexiva", "encapsulación", "reificación", "generalización", etc.).

Los objetos matemáticos se comunican mediante los SRS y existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, sin embargo, existe la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemáticas para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido tradicionalmente los SRS más formales frente a los SRS más visuales o también caracterizados como representaciones más intuitivas.

Las investigaciones sobre la visualización en matemáticas y el papel de las imágenes mentales, han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos.

Diversos investigadores, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Es Duval (1993, 1995) el que realiza un trabajo teórico, más coherente y unificador (Semiosis- aprehensión o producción de una representación semiótica-, y, Noesis -articulación de varias representaciones semióticas-) de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones.

Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente:

"un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable...
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...
3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...".

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que:

"toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa"

y por tanto:

"la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

Parece razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin reunir a diversas representaciones del mismo. La manipulación por parte de los estudiantes de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático y la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado.

## 2.4. Materiales y recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje del Algebra

Consideraremos la noción de "recursos didácticos", en el sentido descrito en Coriat (1997), como todos aquellos materiales que el profesor utiliza en clase (pizarra, cuadernos, libros, calculadoras, juegos, ordenadores, etc.), dejando la denominación de "materiales didácticos" para aquéllos que se construyen con fines educativos específicos. Dentro de los materiales didácticos estructurados consideraremos aquellos que forman un sistema de representación semiótico para un objeto matemático dado. Constituye este material didáctico estructurado un sistema de representación "autosuficiente" (Palarea y Socas, 1994), que permite tanto las elaboraciones sintácticas como semánticas del objeto.

El uso de todos ellos facilita en gran medida la actividad matemática, estimulando y favoreciendo el desarrollo del conocimiento algebraico, máxime teniendo en cuenta que la mayor parte de este alumnado (12-16 años) se encuentra en términos de Piaget (Flavell, 1981) en el paso de un estadio de pensamiento concreto a un estadio formal, o no ha superado el nivel 3, de deducción informal, correspondiente al modelo de aprendizaje de la geometría de Van Hiele, por lo que aún no son capaces de seguir demostraciones rigurosas y formales, y ayuda también a *superar muchas de las dificultades relacionadas con los métodos* de enseñanza.

Tanto los materiales como los diferentes recursos didácticos,

> "están vinculados con la metodología, ya que ayudan a establecer las secuencias metodológicas y las determina: proporcionan los soportes con los que se presentan y refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como nuevas formas de evaluación, más abiertas y creativas, que permiten superar las pruebas convencionales de papel y lápiz" (Rico, 1997).

La utilización de materiales didácticos como representaciones semióticas será más importante en la E.S.O. que en el Bachillerato, donde es esencial que los alumnos exploren conceptos algebraicos de manera informal para adquirir una base sobre la que fundar el estudio futuro del Algebra. Dichas exploraciones deben centrarse tanto en los sistemas de representación semióticos analógicos como en los sistemas de representación digital (formal).

Es de gran utilidad el uso de diferentes materiales didácticos como la balanza matemática, tablero de ecuaciones, dominós algebraicos, puzzles geométrico-algebraico, etc. (Socas y otros, 1989).

Mención especial merecen los recursos de las calculadoras y los ordenadores. En las puertas del siglo XXI no podemos obviar que la presencia de las nuevas tecnologías deben jugar un papel significativo dentro de la enseñanza de las matemáticas. Las calculadoras y los ordenadores representan un recurso didáctico que bien utilizado, puede ayudar en el desarrollo del aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos.

Existen programas de ordenador creados fundamentalmente con objetivos de hacer matemáticas -manipuladores simbólicos tales como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA-, que utilizados convenientemente pueden ser válidos para enseñar los conceptos del Algebra. Algunos cuyos fines no son exclusivamente educativos, como por ejemplo algunas hojas de cálculo (EXCEL, WORKS) han sido utilizadas en el desarrollo de algunas experiencias educativas con algún éxito (Rojano, 1996).

También en algunos casos se ha elaborado software específico para la enseñanza del Algebra, tal es el caso del programa CARAPACE, empleado en el desarrollo de un proyecto de investigación realizado durante 7 años con alumnos de 12-15 años. La consideración que se hace del Algebra en dicho proyecto es exclusivamente funcional (véase Kieran, C. et al, 1996).

Cedillo (1996) considera que dentro de la metáfora del Algebra como lenguaje, los símbolos, las gráficas y las tablas pueden considerarse como dialectos, y desarrolla una investigación en el aula en la que explota el modo de programación de una calculadora gráfica (como la TI92) para conseguir que los estudiantes produzcan reglas que gobiernen patrones numéricos. Las actividades se presentan como un juego que consiste en dar una tabla que simula la pantalla de la calculadora y se pide a los alumnos que encuentren las operaciones que efectúa la calculadora sobre un número de entrada para producir el número de salida, que programen la calculadora de manera que produzca una tabla igual a la de la hoja, etc.

Otros investigadores centran sus trabajos con ordenadores en desarrollar situaciones problemáticas con entornos interactivos con ordenador (por ejemplo, con LOGO y hojas de cálculo), mediante los cuales se incita a los alumnos a construir y hacer uso de ideas algebraicas para resolver problemas propuestos.

Observamos, finalmente, en cuanto a la enseñanza del Algebra, que los recursos tecnológicos amplían la consideración habitual del Algebra como un lenguaje. La facilidad de obtener diferentes formas de representación para expresar relaciones cuantitativas influirá tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del Algebra.

## 2.5. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Algebra

El álgebra escolar es considerada como una de las partes de la matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo, por la potencia y simplicidad de sus registros formales y por sus métodos, pero su aprendizaje genera muchas dificultades a los alumnos y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

Veamos a título de ejemplo como al quedar implícito un modelo, éste constituye un conflicto para otros. Así, por ejemplo, a los modelos "$a\,x + b$", "$x^2$", "$\sqrt{x}$" ó "$1/x$", se les suele aplicar las propiedades de linealidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \ 1/(x + y) = 1/x + 1/y,$$

donde este primer error adquiere más fuerza a causa de la analogía con

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2.$$

A otras funciones también se les aplica las propiedades de linealidad *sen 3a = 3 sen a* ó $2^{n+m} = 2^n + 2^m$.

Otro elemento que tiene que ver con la organización de los errores es la noción de obstáculo. El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. Brousseau (1983), traslada el concepto de obstáculo epistemológico al campo de la Didáctica de las Matemáticas[1].

Como señala Matz (1980) los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación. Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben.

Podemos caracterizar a nuestro juicio, en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra. Errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra (Socas, 1997).

Estos tres ejes estarían determinados por: I) Errores que tienen su origen en un obstáculo; II) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido; y, III) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

*I. Errores que tienen su origen en un obstáculo*

Como ejemplo podemos citar el que indica Collis (1974) relacionando las dificultades que los niños tienen en el álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados. El apuntó la idea que los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Por ejemplo, si se les requiere que dos números conectados por una operación sean reemplazados por el resultado de la operación, y posteriormente se les introduce al álgebra con expresiones tales como x + 7 y 3x para ser reemplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden "cerrarse", son expresiones "incompletas", los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que "no hay aceptación de la falta de clausura".

*II. Errores que tienen su origen en ausencia del sentido*

Al originarse estos errores en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo), podemos diferenciar errores en tres etapas distintas.

a) Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como:

$$1/2 + 1/3 = 1/(2+3) \quad \Rightarrow \quad 1/x + 1/y = 1/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 2/(2+3) \quad \Rightarrow \quad 1/x + 1/y = 2/(x+y)$$
$$1/2 + 1/3 = 1/(2 \,.\, 3) \quad \Rightarrow \quad 1/x + 1/y = 1/(x \,.\, y)$$

b) Errores de procedimientos

Son consecuencia del uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimiento". Estos errores se pueden agrupar en:

1) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 .$$

2) Errores relativos al uso de recíprocos, por ejemplo:

$$1/x + 1/y = 1/(x + y) \qquad 1/x + 1/y = 2/(x + y) \qquad 1/x + 1/y = 1/(x \,.\, y)$$

3) Errores de cancelación, por ejemplo: $(x + y) / (x + z) = y + z$

Estos tipos de errores parecen indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones.

c) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética; cabe destacar el sentido del signo "=" en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal.

*III. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales*

Son errores de naturaleza diversa: faltas de concentración (excesiva confianza), distracciones debidas a la presencia de palabras clave o de rasgos perceptuales, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

## 2.6. Modos y situaciones de enseñanza del Algebra

La enseñanza del Algebra que proponemos parte, de un lado, de la aceptación de la tesis de Duval (1993) en el sentido de que un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones del mismo, y de otro, de dotar a estos sistemas de representación de diferentes fuentes de significado, en el sentido de Kaput (1987).

Proponemos, pues, la enseñanza del álgebra en términos de traducción entre los cuatro sistemas de representación: habitual, aritmético, algebraico y geométrico. Entendemos por habitual a la expresión en el lenguaje natural de situaciones reales (físicas o gráficas) que involucran cantidades o relaciones. Fundamentalmente se utilizarán en la presentación de los objetos algebraicos como herramienta de comunicación de ideas abstractas, ideas que los alumnos irán adquiriendo más fácil y adecuadamente, cuando son expresadas en los distintos sistemas de representación.

El uso de estos diferentes sistemas de representación también se puede justificar en base a que en Matemáticas, al estar los conceptos fuertemente jerarquizados, las conexiones entre los diferentes sistemas de representación generan "esquemas" mentales que facilitan la comprensión de estas abstracciones y permiten progresar en la adquisición de nuevos objetos. Además al relacionar los sistemas de representación entre sí se construye un mejor entendimiento entre ellos, y al mismo tiempo el estudiante podrá adquirir confianza en su propia capacidad para utilizar ideas algebraicas.

De los estudios experimentales sobre lenguaje algebraico se constata la necesidad de ampliar las fuentes de significado para el lenguaje algebraico. Además de la perspectiva numérica reflejada en los currículos de matemáticas para Secundaria, aparece la necesidad de considerar las letras con sentido algebraico, como cantidad de una magnitud geométrica (Socas y Palarea , 1997)

En este sentido, en Socas y otros (1989, capítulos 4, 5 y 6) proponemos actividades conducentes a expresar la misma situación en distintos sistemas de representación, según el cuadro siguiente:

| | |
|---|---|
| Registros formales<br>(SRS formal algebraico) | Números y operaciones<br>(SRS formal aritmético) |
| Registros geométricos<br>(SRS visual geométricos) | Situaciones reales que<br>involucran cantidades y relaciones |

las cuales se articulan en estrategias de enseñanza que parten de situaciones reales que utilizan el sistema de representación habitual para alcanzar la comprensión cualitativa del problema, de modo que el desarrollo de situaciones numéricas o geométricas determinan un primer nivel de generalización, para en un segundo nivel de generalización (aritmética generalizada) alcanzar la comprensión conceptual del problema. En el siguiente esquema se recogen (por columnas) los tres niveles que permiten interpretar las actividades que desarrollamos en Socas y otros (1989).

GENERALIZACION ↓ PARTICULARIZACION ↑

| PROCEDIMIENTO | SISTEMAS DE REPRESENTACION SEMIOTICOS | NIVELES DE COMPRENSION |
|---|---|---|
| Introducción | S.R. habitual<br>Enunciado<br>Situación de partida<br>(Situaciones reales) | Comprensión cualitativa del problema |
| Operaciones o situaciones numéricas | S.R. aritmético<br>Situación de partida<br>S.R. geométrico | Comprensión cuantitativa del problema |
| Primer nivel de generalización | | |
| Notación<br>Segundo nivel de generalización | S.R. algebraico<br>Aritmética generalizada | Comprensión conceptual del problema |

## 3. IMPLICACIONES DIDACTICAS

El conocimiento profesional que debe poseer un profesor para desarrollar con garantías las demandas del currículo actual, supone adquirir unas habilidades específicas que pueden concretarse en:

- Formación científica y didáctica adaptada a este nuevo cambio curricular.
- Capacitación para trabajar con alumnos que presenten un alto grado de heterogeneidad en destrezas básicas, intereses y necesidades.
- Cambio de actitudes en el profesorado para que desarrollen los aspectos formativos de la docencia, adopten planteamientos flexibles y profundicen en una visión más interdisciplinar de la cultura.
- Concepción del currículo como un instrumento de investigación que permita el desarrollo de métodos y estrategias de concreción y adaptación.
- Valoración y ejercitación del trabajo en equipo, así como el desarrollo de una sólida autonomía profesional (Camacho, Hernández y Socas, 1993).

En una propuesta de formación de profesores como la que se pretende hacer desde nuestro análisis didáctico, debemos facilitar a nuestros alumnos la posibilidad de diseñar, desarrollar y evaluar un "proyecto educativo", que puede ser, un Proyecto Curricular de Centro, una Unidad Didáctica, un material didáctico, etc., para la ESO o el Bachillerato. Deberán estar capacitados para localizar la documentación y las referencias necesarias para poder desarrollar tal "proyecto educativo", y tratarán de seleccionar, estructurar y organizar la información suministrada, así como completarla.

Los diferentes temas de un posible programa de didáctica específica de Matemáticas deberán ser organizados entre el profesor y los alumnos, de forma que un número determinado de ellos sea impartido por el profesor, realizando éste el análisis didáctico con el desarrollo de sus organizadores y ejemplificando algunos de los "proyectos educativos" correspondientes para cada uno de los temas elegidos.

A lo largo del presente trabajo se ha pretendido desarrollar brevemente un ejemplo del análisis didáctico del lenguaje algebraico.

En términos generales, podemos decir que una propuesta metodológica de formación de profesores debe conceder prioridad a las actividades prácticas con participación activa de los alumnos, proporcionándoles en todo momento una información lo más clara posible de los medios a utilizar, y esto pasa inevitablemente por los organizadores del currículo, para estar en disposición de desarrollar un proyecto educativo, posibilitando con ello una estrecha relación entre los alumnos y el profesor.

### NOTAS

1 Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento. Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas; el dominio resulta falso. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber y aún así después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose esporádicamente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS


BACHELARD, G. (1938). *La formation de lesprit Scientifique*. Paris: De Vrin [Traducción al castellano (1985). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo Veintiuno).

BROUSSEAU G. (1983). "Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2),* 165-198.

BROUSSEAU, G. (1986). *La théorization des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse, Bordeaux V.

CAMACHO, M.; HERNANDEZ, J. y SOCAS, M.M. (1993). "Curricular and teaching experiences with students of Mathematics". *Proceedings of the first Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education,* 51-58.

CEDILLO, T. (1996). *Exploring algebra as a language-in-use: A study with 11-12 year old using graphics calculators*. Tesis no publicada. Universidad de Londres.

COLLIS, K.F. (1974). *Cognitive Development and Mathematics Learning*. Paper presented at the Psycology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College. London.

CORIAT, M. (1997). "Materiales, recursos y actividades: un panorama". En L. Rico y otros. *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori.

DUVAL, R. (1993). "Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg [Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997].

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

FLAVELL, J.H. (1981). *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Barcelona: Paidós.

GARCIA, M.M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: GIEM.

HIEBERT, J. (1988). "A theory of developing competence with written mathematical symbols". *Educational Studies in Mathematics*, vol 19, 3, 333-335.

JANVIER, C. (1987). "Representations and Understanding: The notion of Function as an example". En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. (1987). "Representation Systems and Mathematics". En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. (1991). "Notations and representations as mediators of Constructive Processes". En E. Von Glasersfeld (Ed), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher.

KIERAN, C.; BORBAU, A. y GARANÇON, M. (1996). "Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach". En N. Bernarz et al (Eds), *Approaches to Algebra* (pp. 257-293). Kluwer Academic Pub. Netherlands.

LLINARES, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

M.E.C. 1989. *Libro Blanco de la Reforma Educativa*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

MATZ, M. (1980) "Towards a computational theory of algebraic competence". *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3,1,* 93-166.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1994). "Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement- apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans)". *Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM*. Toulouse (France).

RICO, L. (1994) "Componentes básicas para la formación del profesor de Matemáticas de Secundaria". *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 21,* 33-44.

RICO, L. (1997). "Los organizadores del currículo de Matemáticas", cap. 2, pp. 39-59. En L. Rico y otros, *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/ Horsori.

ROJANO, T. (1996). "Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet enviroment". En N. Bernarz et al (Eds), *Approaches to Algebra* (pp. 137-145). Kluwer Academic Pub. Netherlands.

SHULMAN, L. (1986). "Paradigms and Research Programs in the Study of Teaching: A contemporary perspectives". En M. Wittrock (Ed), *Handbook of Resarch on Teaching*. Macmillan, New York.

SOCAS, M.M. (1997). "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria", cap. 5, pp. 125-154. En: L. Rico y otros, *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE/ Horsori.

SOCAS, M.M. y PALAREA, M.M. (1997). "Las fuentes de significados, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar". *Uno. Lenguajes Algebraicos*, vol. 14, 7-24.

SOCAS, M.M. y otros (1989). *Iniciación al Algebra*. Madrid: Ed. Síntesis.