EXTRACTA MATHEMATICAE 1, n.3, 118-120 (1986)

# Sobre el algoritmo de Oslo

por

López Carmona, Antonio y Barrera Rosillo, Domingo.
Dpto. de Anális Matemático. Facultad de Ciencias. Granada.
18071-Granada. (España).

Subject Classifications:A.M.S. (M.O.S.): 65D07, 65D99, 41A63.

Presentamos un resultado que complementa el obtenido por Prautzsch en [5] , y lo conseguimos haciendo uso de las relaciones de recurrencia para "B-splines" univariados, [1,2].

Partimos del "B-spline" simplicial con nodos $t_o,\dots,t_n$ en R, que notamos por $S(t|t_o,\dots,t_n)$, caracterizado por

(1) $\quad S(t|t_o,\dots,t_n) = n\,[t_o,\dots,t_n](\cdot-t)_+^{n-1}$ ,

o, equivalentemente,

(2) $\quad \int_R S(t|t_o,\dots,t_n)f(t)\,dt = n!\int_{S^n} f(t_ou_o+\dots+t_nu_n)\,du_1\dots du_n$,

para cualquier función f, continua en R, donde

$$S^n = \{(u_o,\dots,u_n)\in R^{n+1} : \sum_{i=o}^{n} u_i=1,\ u_i\geq 0,\ i=o,\dots,n\}.$$

En [1] y [2] se presenta la relación

(3) $\quad S(t|t_o,\dots,t_n) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{t-t_o}{t_n-t_o}S(t|t_o\dots t_{n-1}) + \frac{t_n-t}{t_n-t_o}S(t|t_1\dots t_n)\right)$,

cuando los puntos $\{t_i\}_{i=o}^{n}$ son distintos dos a dos.

A la vista de las relaciones (1) y (2), podemos contemplar el "B-spline" simplicial como el núcleo de Peano para el funcional lineal diferencia dividida o como una función de densidad, respectivamente, dependiendo de las necesidades e intereses. Es bien conocido, [1], que a partir del "B-spline" simplicial definido puede construírse una base para el espacio de funciones "splines" polinómicas de grado n-1 con nodos arbitrarios, y la relación de recurrencia (3) proporciona un método numéricamente estable para la evaluación de dichas funciones.

Consideremos ahora los conjuntos de nodos $\{t_o,\dots,t_{r+k}\}$ y $\{\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{l+k}\}$, verificando

(4) $\quad \{t_i\}_{i=o}^{r+k} \subset \{\bar{t}_i\}_{i=o}^{l+k}$ , $l>r$

y

(5) $\quad t_o<\dots<t_{r+k}$ , $\bar{t}_o<\dots<\bar{t}_{l+k}$ ,

y construímos las funciones

(6) $\quad S_i^k(t) = S(t|t_i,\dots,t_{i+k})$, $i=o,\dots,r$,

(7) $\bar{s}_j^k(t) = S(t|\bar{t}_j,\ldots,\bar{t}_{j+k}),\ j=o,\ldots,l,$

que generan subespacios S y $\bar{S}$, respectivamente.

Si s está en S, entonces

(8) $$s(t) = \sum_{i=o}^{r} d_i\ s_i^k(t),\ d_i \in R,\ i=o,\ldots,r.$$

Como, a su vez, $s_i^k$ está en $\bar{S}$, tendremos

(9) $$s_i^k(t) = \sum_{j=o}^{l} a_{ij}^k\ \bar{s}_j^k(t).$$

De (8) y (9) llegamos a

(10) $$s(t) = \sum_{j=o}^{l} \bar{d}_j\ \bar{s}_j^k(t),$$

con

(11) $$\bar{d}_j = \sum_{i=o}^{r} d_i\ a_{ij}^k\ ,\ j=o,\ldots,l.$$

El algoritmo de Oslo permite evaluar recurrentemente los $a_{ij}^k$, es decir, permite calcular los $\bar{d}_j$ a partir de los $d_i$.

El resultado que anunciamos es el siguiente, [3]:

(12) $$a_{io}^k = \frac{\bar{t}_k-\bar{t}_o}{t_{i+k}-\bar{t}_o}\ .\ a_{io}^{k-1}\ ,\ i=o,\ldots,r,\ k \geqslant 2,$$

(13) $$a_{ij}^k = \frac{\bar{t}_{j+k-1}-t_i}{t_{i+k}-t_i}\ .\ \frac{\bar{t}_{j+k}-\bar{t}_j}{\bar{t}_{j+k-1}-\bar{t}_j}\ a_{ij}^{k-1} + \frac{t_{i+k}-\bar{t}_{j+k-1}}{t_{i+k}-t_i}\ .\ \frac{\bar{t}_{j+k}-\bar{t}_j}{\bar{t}_{j+k-1}-\bar{t}_j}\ .a_{i+1\,j}^{k-1}$$

$i=o,\ldots,r;\ j=1,\ldots,l;\ k \geqslant 2.$

(14) $$a_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & t_i \leqslant \bar{t}_j < t_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La versión que damos aquí del algoritmo de Oslo está en la línea del resultado obtenido por Prautzsch y lo complementa. Allí se consideran "B-splines" normalizados, mientras que nosotros hemos eliminado esa condición, lo que permite utilizar la relación de recurrencia standard (3), así como afrontar el problema de la generalización al caso multivariado, [4], al disponer de relaciones en varias variables análogas a la empleada en la presente nota, [2], aunque la situación es más compleja y se llega a un sistema no lineal.

Asimismo, puede pensarse en extender (12), (13) y (14) a otras densidades "B-splines", como pudieran ser la potencia truncada $T(t|t_o\ldots t_n)$ y la exponencial a trozos $E(t|t_o\ldots t_n)$, [2]. En principio, encontraríamos las mismas relaciones debido a que se satisfacen relaciones de recurrencia análogas a (3), aunque con factor distinto, pero surge un problema al verificarse que el soporte de estos "B-splines" no es compacto, lo que es esencial.

En cuanto a la generalización, debe observarse que no hemos mencionado el "box-spline", [2]. La razón es que en este caso la relación de recurrencia que se satisface es cualitativamente distinta a (3). Sin embargo, es posible hacer un estudio del mismo tipo imponiendo condiciones a los nodos.

Por último, decir que en el caso de nodos coalescentes, es decir múltiples, se obtienen las mismas relaciones haciendo uso de un argumento de continuidad, que nos permitirá "separarlos".

Referencias

[1] DE BOOR, C.: Splines as linear combinations of B-splines, en Approximation Theory II, ed. por G. G. Lorentz, C.K. Chui y L.L. Schumaker, (Academic Press, New York, 1.976), pág. 1-47.

[2] DAHMEN, W. & MICCHELLI, C.A.: Recent progress in multivariate splines, en Approximation Theory IV, ed. por C.K. Chui, L. L. Schumaker y J.D. Ward, (Academic Press, New York, 1.983), pág. 27-121.

[3] LOPEZ CARMONA, A. & BARRERA ROSILLO, D.: Una nota sobre el algoritmo de Oslo, Real Academia de las Ciencias de Madrid, preprint.

[4] LOPEZ CARMONA, A. & BARRERA ROSILLO, D.: On a multivariate version of the Oslo algorithm. Proceedings IX CEDYA, Valladolid 1.986.

[5] PRAUTZSCH, H.: A short proof of the Oslo Algorithm. Computer Aided Geometric Design (1.984), 1, pág. 95-96.