EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.1, 20-22 (1987)

# UNA PROPIEDAD DE LOS PLANOS ISOCLINOS DE $\mathbb{R}^4$

**W. Reyes**

Instituto Profesional de Chillán **(Chile)**

En el presente trabajo establecemos una isometría entre los planos isóclinos con un plano fijo y la esfera $S^2$.

**1.** Considérese $\mathbb{R}^4$ referido a su base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y dotado de la orientación $e_{1234} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$.

Al plano $P = [u,v]$ engendrado por $u = \sum_{i=1}^{4} u_i e_i$ y $v = \sum_{i=1}^{4} v_i e_i$ asociamos el bivector

$$\omega_P = u \wedge v = \sum_{i<j} a_{ij} e_{ij} \quad , \quad e_{ij} = e_i \wedge e_j \quad , \quad a_{ij} = u_i v_j - u_j v_i \quad ,$$

mientras al complemento ortogonal $P^\perp$ de $P$ asociamos

$$*\omega_P = \omega_{P^\perp} = \sum_{i<j} a_{ij} * e_{ij} \quad , \quad e_{ij} \wedge * e_{ij} = e_{1234} \quad .$$

La identidad

$$\omega_P = \frac{1}{2} (\omega_P - *\omega_P) + \frac{1}{2} (\omega_P + *\omega_P)$$

permite identificar la grassmanniana $G_2^4$ de los 2-planos de $\mathbb{R}^4$ con un producto de esferas $S_-^2 \times S_+^2$.

**2.** Dos planos $P$ , $Q$ de $G_2^4$ determinan dos ángulos $\alpha_1$ , $\alpha_2$ por medio de las fórmulas

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\langle \omega_P, \omega_Q \rangle + \langle \omega_P, *\omega_Q \rangle}{\|\omega_P\| \, \|\omega_Q\|} \quad ,$$

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\langle \omega_P, \omega_Q \rangle - \langle \omega_P, *\omega_Q \rangle}{\|\omega_P\| \, \|\omega_Q\|} \quad .$$

$P$ y $Q$ se dicen **isóclinos** si $\alpha_1 = \alpha_2$ ó si $\alpha_1 = -\alpha_2$ . Es decir, si

AMS Subject Classification (1980): 53B20 , 51N20.

$$\|\omega_P\|\,\|\omega_Q\| = \langle\omega_P, \omega_Q + {*\omega_Q}\rangle \quad , \text{ o si } \quad \|\omega_P\|\,\|\omega_Q\| = \langle\omega_P, \omega_Q - {*\omega_Q}\rangle \ .$$

Por ejemplo, son isóclinos $O = [e_1, e_2]$ y $O^\perp = [e_3, e_4]$ con con $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ (véase [G.W]).

**3.** Gracias al anterior criterio se demuestra que:

**(i)** Los planos de ecuación

$$(x_3, x_4) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

conjuntamente con el plano $O$ son isóclinos entre sí y constituyen una subvariedad $F_+$ de $G_2^4$ .

**(ii)** Los planos de ecuación

$$(x_3, x_4) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

conjuntamente con el plano $O$ son isóclinos entre sí y constituyen una subvariedad $F_-$ de $G_2^4$ .

**(iii)** $F_+ \cap F_- = \{O, O^\perp\}$ .

(Ver $[W_1]$).

**4.** Razonamos sobre $F_+$ ya que para $F_-$ valen resultados análogos que se obtienen con sólo hacer las modificaciones obvias.

Sean $P$ y $P'$ dos puntos de $F_+$ de matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ y sea $\alpha$ el ángulo común. La fórmula 2 permite calcular:

**(i)** $$\sin^2\alpha = \frac{(a-a')^2 + (b-b')^2}{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)} \ ;$$

para $P$ y $P'$ infinitamente próximos esta fórmula da la distancia riemanniana:

**(ii)** $$ds^2 = \frac{da^2+db^2}{(1+a^2+b^2)^2} = \frac{dr^2+r^2d\vartheta^2}{(1+r^2)^2}, \begin{pmatrix} a = r\cos\vartheta \\ b = r\sin\vartheta \end{pmatrix} \ .$$

La cual no es otra que la métrica de Wong, $[W_2]$, de $G_2^4$ :

**(iii)** $$ds^2 = \mathrm{Tr}(I+X{}^tX)^{-1}dX(I+{}^tXX)^{-1}d{}^tX \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ .$$

Al plano P de $F_+$ corresponde según 1.

**(iv)** $$\omega_P = (1,b,a,-a,b,a^2+b^2) \ .$$

Pero este bivector se proyecta en el punto

**(v)** $$((1-a^2-b^2,2b,2a),(1+a^2+b^2,0,0)) \in S^2_- \times S^2_+$$

Al normalizar se tiene el punto

**(vi)** $$\tilde{\omega}_P = \left(\frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{2a}{1+a^2+b^2}\right) = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}, \frac{2r \sin\vartheta}{1+r^2}, \frac{2r \cos\vartheta}{1+r^2}\right) =$$

$$= (\cos\varphi, \sin\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \cos\vartheta) \in S^2$$

($a = r\cos\vartheta$, $b = r\sin\vartheta$, $\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} r$).

Tenemos pues la aplicación:

**(vii)** $$F_+ \longrightarrow S^2 \quad , \quad P \longrightarrow \tilde{\omega}_P$$

Esta es una isometría, puesto que la métrica de $S^2$, $ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi \, d\vartheta^2$, se escribe por medio de transformaciones $\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} r$, en la forma

$$ds^2 = 4 \frac{dr^2+r^2 d\vartheta^2}{(1+r^2)^2}$$

que no es otra, salvo el factor 4, que (ii). Resumiendo tenemos el siguiente:

**Teorema:** $F_+$ *está immersa isométricamente en* $S^2$.

**Referencias**


[G-W] H. Gluck, F. Warner - Great circle fibrations of the threesphere. Duke Math. Jornal, Vol. 50, nº 1, 1983.

[$W_1$] Wong, Y.C. - *Linear Geometry in Euclidean 4-space*. S.E.A.M.S., 1977.

[$W_2$] Wong, Y.C. - Differential Geometry of Grassmann manifolds. N.A.S. Proceedings 57, 589-594 (1967).