

GROUPOÏDE D'HOMOTOPIE D'UN FEUILLETAGE RIEMANNIEN ET RÉALISATION
SYMPLECTIQUE DE CERTAINES VARIÉTÉS DE POISSON

Fernando Alcalde-Cuesta

Departamento de Xeometría e Topoloxía. Universidade de Santiago
de Compostela. 15705 Santiago de Compostela (ESPAGNE)

Si (Γ, σ) est un groupoïde symplectique ([CDW]), l'espace des unités Γ_0 est muni d'une structure de Poisson canonique Λ_0 qui fait de l'application source α (resp. but β) un morphisme (resp. un antimorphisme) de Poisson ([CDW]). Alors $T^*(\Gamma_0)$ muni de la structure d'algèbroïde de Lie associée à Λ_0 est isomorphe à l'algèbroïde du groupoïde Γ ([CDW]).

Le dual \mathfrak{G}^* d'une algèbre de Lie \mathfrak{G} est une variété de Poisson, dont le crochet est induit par celui de \mathfrak{G} . Si G est un groupe d'algèbre de Lie \mathfrak{G} , l'action à droite (resp. à gauche) de G sur $T^*(G) = G \times \mathfrak{G}^*$ est hamiltonienne de moment $\alpha: (g, \xi) \rightarrow \xi$ (resp. $\beta: (g, \xi) \rightarrow \text{ad}_g^* \xi$). Alors $T^*(G) \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathfrak{G}^*$ devient un groupoïde symplectique d'unités \mathfrak{G}^* . Le 3ème théorème de Lie exprime donc le fait que dans le cas linéaire une variété de Poisson est toujours l'espace des unités d'un groupoïde symplectique.

L'extension du 3ème théorème de Lie au cas non linéaire se réduit donc au problème de la réalisation symplectique ([W]): étant donnée une variété de Poisson (M, Λ) , on cherche à construire un groupoïde symplectique (Γ, σ) d'unités (M, Λ) . La réalisation d'une variété de Poisson par un groupoïde symplectique local a été démontrée dans [CDW]. Par contre, il existe des obstructions à la réalisation symplectique globale ([D]). Enfin dans [DHL] on a construit une réalisation symplectique globale de certaines variétés de Poisson régulières de dimension 3.

Une variété de Poisson (M, Λ) régulière ([L]) est dite *riemannienne* si le feuilletage caractéristique \mathcal{F}_Λ est riemannien (dont la dimension sera appelée la *dimension symplectique* de (M, Λ)). Dans [A] on démontre un 3ème théorème de Lie pour une large classe de variétés de Poisson riemanniennes de dimension symplectique 2. Remarquons enfin que tous les groupoïdes considérés dans la suite seront supposés à α -fibres connexes et toutes les structures seront de classe C^∞ .

1. Le groupoïde d'homotopie d'un feuilletage riemannien.-

Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée. Un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0 = M$ est une réalisation de \mathcal{F} si l'image de $(\beta, \alpha): \Gamma \rightarrow M \times M$ est la relation d'équivalence R définie par \mathcal{F} . Il est bien connu que \mathcal{F} est réalisé par

AMS 1980 Subject Classification: 53C12, 53C15, 57R30.

le **groupoïde d'holonomie** $\text{Hol}(\mathcal{F})$. En procédant comme dans la construction de $\text{Hol}(\mathcal{F})$, le quotient $\Pi_1(\mathcal{F})$ de l'espace des chemins tangents à \mathcal{F} (muni de la topologie compacte-ouverte) par la relation d'homotopie tangente à \mathcal{F} est muni d'une structure de groupoïde. Alors on définit ([P]) une structure de variété sur le **groupoïde d'homotopie** $\Pi_1(\mathcal{F})$ qui en fait une réalisation de \mathcal{F} de dimension $n+m$ à α -fibres simplement connexes immergée dans $M \times M$, où $n = \dim \mathcal{F}$ et $m = \dim M$ (cf. [A]). De plus les α -fibres étant simplement connexes, cette réalisation devient **universelle** (cf. [A]).

Un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow[\beta]{\alpha} \Gamma_0$ est **localement trivial** (LT) de fibre F si α (et donc β) est un fibré localement trivial de fibre F .

Exemples ([A]).- (1) Le groupoïde d'homotopie $\Pi_1(M)$ d'une variété M est LT de fibre \tilde{M} le revêtement universel de M .

(2) L'action d'un groupe G opérant sur (M, \mathcal{F}) comme groupe d'automorphismes induit naturellement une action de G sur $\Pi_1(\mathcal{F})$. Si l'action sur M est libre et proprement discontinue, il en est de même pour l'action induite sur $\Pi_1(\mathcal{F})$ et l'espace d'orbites $\Pi_1(\mathcal{F})/G$ est muni d'une structure de groupoïde de Lie d'unités M/G . Alors si $\Pi_1(\mathcal{F})$ est LT, $\Pi_1(\mathcal{F})/G$ est LT de même fibre.

(3) Si $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration localement trivial, $\Pi_1(\pi)$ est LT de fibre \tilde{F} le revêtement universel de F .

Les considérations précédentes sont appliquées pour démontrer le théorème ci-dessous par le biais des résultats de P. Molino ([M]) sur les feuilletages riemanniens:

Théorème 1.- *Si \mathcal{F} est un feuilletage riemannien sur une variété compacte M , $\Pi_1(\mathcal{F})$ est LT de fibre \tilde{L} le revêtement universel des feuilles de \mathcal{F} . \square*

2. Réalisation symplectique de variétés de Poisson riemanniennes.-

Remarquons que pour tout feuilletage orientable \mathcal{F} de dimension 2 sur une variété M , il existe une structure de Poisson Λ telle que $\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{F}$. En effet, soit σ la forme de volume des feuilles relative à une métrique riemannienne sur M . Alors σ est une forme symplectique en restriction à chaque feuille de \mathcal{F} , ce qui permet de définir une structure de Poisson Λ telle que $\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{F}$. Inversement, si (M, Λ) est une variété de Poisson régulière de dimension symplectique 2, \mathcal{F}_Λ est un feuilletage orientable de dimension 2. Une fois choisi un supplémentaire de $T(\mathcal{F}_\Lambda)$, on peut définir une 2-forme σ de type (0,2) dont la restriction à chaque feuille de \mathcal{F}_Λ est la forme symplectique canonique. On dira que la 2-forme σ représente

la structure de Poisson Λ .

Soit Λ une structure de Poisson riemannienne de dimension symplectique 2 sur une variété compacte M . Si on note $-M=(M,-\Lambda)$, l'image de $(\beta, \alpha): \Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda) \rightarrow (-M) \times M$ est saturée par le feuilletage caractéristique de $(-M) \times M$, ce qui permet de munir $\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda)$ d'une structure de Poisson $\tilde{\Lambda}$ qui en fait un **groupoïde de Poisson** au sens de [DHL], le feuilletage caractéristique $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\tilde{\Lambda}$ étant le feuilletage image réciproque $\alpha^* \mathcal{F}_\Lambda = \beta^* \mathcal{F}_\Lambda$. D'après le théorème de stabilité de Reeb, \mathcal{F}_Λ est soit **asphérique** (i.e., toutes les feuilles de \mathcal{F}_Λ sont asphériques), soit un fibré en sphères.

D'après le théorème 1, on a donc deux cas possibles:

- (i) $\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda)$ est LT de fibre \mathbb{R}^2 ,
- (ii) \mathcal{F}_Λ est un fibré en sphères.

Dans le cas (i), $(\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda), \tilde{\Lambda})$ est exact ([DHL]), i.e., $\tilde{\Lambda}$ est définie par une forme exacte $d\lambda$. Alors le fibré conormal

$$(N^*(\tilde{\mathcal{F}}), \tilde{\sigma}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda), \tilde{\Lambda}) \xrightarrow[\beta]{\alpha} (M, \Lambda)$$

est une réalisation symplectique de (M, Λ) , où $\tilde{\sigma}$ est la forme $\tilde{\pi}^* d\lambda + i^* dL$, L est la forme de Liouville sur $T^*(\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda))$ et $i: N^*(\tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow T^*(\Pi_1(\mathcal{F}_\Lambda))$.

En résumé on a le théorème suivant dont la partie (ii) caractérise l'obstruction de [D] lorsque \mathcal{F}_Λ est un fibré en sphères:

Théorème 2.- Soit Λ une structure de Poisson riemannienne de dimension symplectique 2 sur une variété compacte M . Alors,

- i) Si \mathcal{F}_Λ est asphérique, il existe une réalisation symplectique de (M, Λ) .
- ii) Si \mathcal{F}_Λ est un fibré en sphères, il existe une réalisation symplectique de (M, Λ) si et seulement si l'intégrale le long des fibres $\int_{S^2} \sigma$ d'une 2-forme σ représentant Λ est constante. \square

REFERENCES

- [A] Alcalde-Cuesta F., Preprint "Juin feuilleté" Lyon, 1988.
- [CDW] Coste A.-Dazord P.-Weinstein, *Public. Dept. Math. Lyon 1*, 2/A (1987), 1-62.
- [D] Dazord P., *C. R. Acad. Sc. Paris*, 306 (1988), 273-278.
- [DHL] Dazord P.-Hector G.-Lasso de la Vega C., Preprint "Juin feuilleté" Lyon, 1988.
- [L] Lichnérowicz A., *J. Diff. Geom.*, 12 (1977), 253-300.
- [M] Molino P., *Proc. Kon. Nederl. Akad.*, 85 (1) (1982) 45-76.
- [P] Phillips J., *Rocky Mountain J. Math.*, 17 (1987) 151-165.
- [W] Weinstein A., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 16 (1987) 101-103.