EXTRACTA MATHEMATICAE 4, n.3, 145-147 (1989)

CARACTERISATIONS DE CERTAINES ALGEBRES DE BANACH PAR LE CALCUL FONCTIONNEL.

M. AKKAR, A. ELKINANI, M. OUDADESS
Ecole Normale Supérieure de Takaddoum BP.5118
Rabat, MAROC.

1980 A.M.S. Subject classification : 46J35, 46K05, 46L05.

We show that the Banach algebras with continuous involution are the Banach algebras which admit an harmonic functional calculus, while we prove that the hermitian commutative Banach algebras are exactly the involutive commutative Banach algebras that admit a real analytic functional calculus.

I. Définitions. Soit A une algèbre de Banach unitaire, U un ouvert de C et h(U)(resp.H(U)) l'ensemble des fonctions harmoniques sur U (resp. l'ensemble des fonctions holomorphes sur U). Nous désignerons par A_U l'ensemble de tous les élèments de A dont le spectre est contenu dans un disque ouvert quelconque contenu dans U et par B_U l'ensemble de toutes les fonctions à valeurs dans A définies sur A_U.

On dit qu'une algèbre de Banach unitaire A posséde un calcul fonctionnel harmonique si, pour tout ouvert non vide U de C, il existe un morphisme ϕ de h(U) dans B_U vérifiant les propriétés suivantes:

1. Sa restriction à H(U) est un morphisme d'algèbres unitaires et $f \to \phi(f)(x)$ est continue pour tout x dans A_U.
2. $\phi(\bar{z})(x+y)=\phi(\bar{z})(x)+\phi(\bar{z})(y)$ et $\phi(\bar{z})(xy)=\phi(\bar{z})(y)\phi(\bar{z})(x)$ pour tout x et tout y tels que x,y,x+y et xy sont dans A_U, en notant $\bar{z}$ la fonction $\lambda \to \bar{\lambda}$.

3. $\phi(\bar{z})(\phi(g)(x))=\phi(g)(x)$ pour tout x dans A_U et g dans $h(U)$ tel que $\phi(g)(x)$ est un élèment de A_U.
4. Il existe k positif tel que : $\|\phi(\bar{z})(x)\| \leq k\|x\|$ pour tout x dans A_U.

Soit A une algèbre de Banach unitaire commutative involutive. On dit que A possède un calcul fonctionnel analytique réel si, pour tout élèment a de A et pour tout ouvert U de R^2 contenant $Sp_A a$, il existe un morphisme unitaire ϕ_a de A(U), l'algèbre des fonctions, à valeurs complexes, analytiques sur U au sens réel, dans A vérifiant les propriétés suivantes.

1. Si $a = a_1+ia_2$, avec a_1 et a_2 hermitiens et si x_1 et x_2 désignent les fonctions coordonnées sur R^2, on a : $\phi_a(x_1)=a_1$ et $\phi_a(x_2)=a_2$.
2. $f(Sp_A a)=Sp_A \phi_a(f)$ pour tout f dans A(U).

II. Caractérisations des algèbres de Banach involutives.

Nous avons montré dans [1] que toute algèbre de Banach unitaire munie d'une involution continue possède un calcul fonctionnel harmonique au sens de la définition précédente. De plus on a la :

<u>Proposition 1.</u> Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe. Si A possède un calcul fonctionnel harmonique, alors A admet une involution continue.

<u>Remarque 1.</u> Soit A une algèbre de Banach unitaire qui possède un calcul fonctionnel harmonique. Alors, les application ϕ sont injectives.

<u>Remarque 2.</u> Si dans la définition du calcul fonctionnel harmonique on supprime la condition 4, la proposition 1 reste vraie sauf la continuité de l'involution.

III. Caractérisation des algèbres de Banach unitaires commutatives hermitiennes.

Dans [1] , on a construit un calcul fonctionnel analytique réel dans les algèbres de Banach unitaires commutatives hermitiennes. Ces algèbres sont exactement celles qui admettent un tel calcul fonctionnel.

Proposition 2. Soit A une algèbre de Banach unitaire commutative involutive. Si A possède un calcul fonctionnel analytique réel, alors A est hermitienne.

Dans [1], nous avons travaillé en munissant A(U) d'une topologie limite inductive. Une autre topologie naturelle sur A(U) est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U. Nous munissons A(U) de cette topologie, et nous obtenons la :

Proposition 3. Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire commutative et semi-simple. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A possède un calcul fonctionnel analytique réel et les applications $\phi_a, a \in A$, de A(U) dans $(A, \|\cdot\|)$ sont continues.
2. A est une $\mathbb{C}^*$-algèbre pour une norme équivalente à $\|.\|$.

Référence :

[1] M. AKKAR, A. ELKINANI, M. OUDADESS : "Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel" Ann.Sc.Math.Quebec,1988,vol 12, n°2.p.151-169.