EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 8, Núm. 2, 142 – 147 (1993)

Sur un Problème de Perturbation Singulière (I): Elasticité

TAOUFIQ BEN KIRAN

Dép. de Mathém., Fac. des Sc. Semlalia, Bd Moulay Abdellah, B.P.S. 15, *Marrakech, Maroc*

AMS *Subject Class.* (1980): 35B25, 42A10 *Received May* 11, 1993

Je dédie ce papier à B. Ismail

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude d'un problème de perturbation singulière:

$$(\mathrm{P}_1)(f) \qquad \begin{cases} \epsilon^2(u_\epsilon{}^{(4)} - u_\epsilon{}^{(2)}) - u_\epsilon{}^{(2)} + u_\epsilon = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ B_1(x')u_\epsilon(x') = B_2(x')u_\epsilon(x') = 0 & x' = 0\,, \pi. \end{cases}$$

qui apparait dans la théorie de l'élasticité [5].
B_1 et B_2 étants deux opérateurs frontières:

$$(1) \qquad \begin{aligned} B_1(x') &:= x' \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (\pi - x') \\ B_2(x') &:= x' \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + (\pi - x')\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{aligned}$$

avec x' un élèment de $\{0,\pi\}$.
Les questions qui s'opposent: dans quels cas u_ϵ converge et quelle est sa limite? Lorsque f est dans l'espace de Sobolev $H^\beta(]0,\pi[)$ $\beta > 1/2$, nous montrons que la solution u_ϵ du problème $(\mathrm{P}_1)(f)$ converge vers la solution v du problème:

$$(\mathrm{L}_1) \qquad \begin{cases} -v'' + v = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

Avant d'aborder l'étude, on se propose de commencer par un lemme.

LEMME 1. *Soient, pour $\epsilon > 0$ et $1 \leqslant r < 2$, les fonctions:*

$$(2) \qquad f_\epsilon(x) := x^r / P_\epsilon(x) \qquad où \qquad P_\epsilon(x) := (x^2+1)(\epsilon^2 x^2 + 1).$$

On a alors:

$$(3)\qquad \left|\sum_{n\geqslant 1} f_\epsilon(2n) - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant a\epsilon^{2-r} + b.$$

et

$$(4)\qquad \left|\sum_{n\geqslant 1} f_\epsilon(2n+1) - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant a\epsilon^{2-r} + b.$$

Avec a et b constantes positives indépendantes de ϵ.

Démonstration. On fait appel à la formule d'Euler (cf. [6, page 278]). Pour g dans $C^1([0,+\infty[)$ et n un entier fixé, on a:

$$(5)\qquad \int_0^n Q(x)g'(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^n g(x)\mathrm{d}x - (g(n)+g(0))/2$$

Avec $Q(x) = (x - E(x) - 1/2)$ qui est périodique de période 1 et $|Q(x)| \leqslant 1/2$. ($E(x)$ désigne la partie entière de x). On obtient alors:

$$(6)\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^n g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_0^n |g'(x)|\mathrm{d}x + g(0) + g(n)\right]/2.$$

Appliquons ce résultat pour $g(x) := f_\epsilon(2x)$:

$$(7)\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} f_\epsilon(2k) - (1/2)\int_0^{2n} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_0^n |f_\epsilon'(x)|\mathrm{d}x + f_\epsilon(2n)\right]/2.$$

Or, pour $\epsilon > 0$ et $1 \leqslant r < 2$, f_ϵ est dans l'espace $C^1([0,+\infty[) \cap W_1{}^1([0,+\infty[)$, nous sommes dans les mesures d'appliquer le théorème de Lebesgue, on aboutit alors à:

$$(8)\qquad \left|\sum_{n\geqslant 1} f_\epsilon(2n) - (1/2)\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_0^{+\infty} |f_\epsilon'(x)|\mathrm{d}x\right]/2.$$

De même pour $g(x) := f_\epsilon(2x+1)$:

$$(9)\qquad \left|\sum_{n\geqslant 1} f_\epsilon(2n+1) - (1/2)\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left[\int_0^{+\infty} |f_\epsilon'(x)|\mathrm{d}x\right]/2.$$

Donc pour obtenir (3) et (4), il suffit de majorer l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_\epsilon'(x)|\mathrm{d}x$.

$$(10)\qquad f_\epsilon'(x) = r\left[x^{r-1}/P_\epsilon(x)\right] - 2\left[x^{r+1}/(1+x^2)P_\epsilon(x)\right] - 2\epsilon^2\left[x^{r+1}/(1+\epsilon^2x^2)P_\epsilon(x)\right].$$

On a, en faisant le changement de variables $x = 1/\sqrt{y}$:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^{r-1}/P_\epsilon(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x^{r-1}/(1+x^2)\mathrm{d}x = (1/2)\int_0^{+\infty} y^{(r-2)/2}/(1+y)\mathrm{d}y.$$

Donc:

$$I_1 \leqslant \beta(r/2,(2-r)/2)/2. \tag{11}$$

Où $\beta(p,q)$ désigne la fonction d'Euler Béta.

$$I_2 = \int_0^{+\infty} x^{r+1}/(1+x^2)P_\epsilon(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x^{r+1}/(1+x^2)\mathrm{d}x = (1/2)\int_0^{+\infty} y^{r/2}/(1+y)^2\mathrm{d}y.$$

Donc:

$$I_2 \leqslant \beta((2+r)/2,(2-r)/2)/2. \tag{12}$$

Puis par le changement $x = 1/(\epsilon\sqrt{y})$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+\infty} x^{r+1}/(1+\epsilon^2x^2)P_\epsilon(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x^{r+1}/(1+\epsilon^2x^2)^{2)}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x^{r-1}/(1+\epsilon^2x^2)^2\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

$$I_3 \leqslant (\epsilon^{-r}/2)\int_0^{+\infty} y^{((2-r)/2)}/(1+y)^2\mathrm{d}y.$$

Par conséquent:

$$I_3 \leqslant (\epsilon^{-r}/2)\beta(r/2,(4-r)/2).$$

D'après (10) et ces majorations on a donc:

$$(1/2)\int_0^{+\infty} |f_\epsilon'(x)|\mathrm{d}x \leqslant rI_1 + 2I_2 + 2\epsilon^2 I_3 \leqslant a\epsilon^{2-r} + b. \tag{14}$$

Avec a et b sont deux constantes indépendantes de ϵ. ∎

Pour $\epsilon > 0$, on écrit le problème $(\mathrm{P}_1)(f)$ sous la forme:

$$(\mathrm{P}_1)(f) \qquad \begin{cases} \epsilon^2(u_\epsilon^{(4)} - u_\epsilon^{(2)}) - u_\epsilon^{(2)} + u_\epsilon = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ u_\epsilon(0) = u_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0 \\ u_\epsilon^{(2)}(0) = u_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0. \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{L}_1) \qquad \begin{cases} -v'' + v = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME 2. *Pour f une fonction de $H^\beta(]0,\pi[)$ $\beta > 1/2$, donnée par:*

(15) $$f(x) := \sum_{n \geqslant 1} \mathrm{Sin}(nx)/n^{\alpha} \qquad \textit{avec} \quad 1 < \alpha \leqslant 2.$$

Alors la solution u_ϵ *du problème* $(\mathrm{P}_1)(f)$ *converge vers la solution* v *du problème* (L_1) *dans l'espace de Sobolev* $H^2(]0,\pi[)$.

Démonstration. f donnée par (15) avec $\alpha > 1$, implique qu'elle est dans l'espace de Sobolev $H^{\beta}(]0,\pi[)$ $\beta > 1/2$, [3, page 391].

On considère le problème de Sturm–Liouville:

(SL)(h) $$\begin{cases} \epsilon^2(v_\epsilon{}^{(4)} - v_\epsilon{}^{(2)}) - v_\epsilon{}^{(2)} + v_\epsilon = h & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v_\epsilon(0) = v_\epsilon{}^{(2)}(\pi) = 0 \\ v_\epsilon{}^{(2)}(0) = v_\epsilon{}^{(2)}(\pi) = 0. \end{cases}$$

En faisant appel à la théorie spectrale [1] et [2]:

Pour h dans $L^2(]0,\pi[)$ donnée par:

(16) $$h(x) = \sum_{n \geqslant 1} h_n \mathrm{Sin}(nx); \qquad \sum_{n \geqslant 1} |h_n|^2 < +\infty$$

alors la solution v_ϵ du problème (SL)(h) est donnée par:

(17) $$v_\epsilon(x) = \sum_{n \geqslant 1} (h_n/\mu_{n,\epsilon}) \mathrm{Sin}(nx)$$

avec:

(18) $$\mu_{n,\epsilon} = (1+n^2)(1+n^2\epsilon^2).$$

On sait que [4]:

(19) $$v_\epsilon \longrightarrow v \qquad \text{dans } H^2(]0,\pi[).$$

D'autre part l'ensemble E des solutions du problème:

(P2) $$\begin{cases} \epsilon^2(w_\epsilon{}^{(4)} - w_\epsilon{}^{(2)}) - w_\epsilon{}^{(2)} + w_\epsilon = 0 & \text{dans } 0 < x < \pi \\ w_\epsilon{}^{(2)}(0) = w_\epsilon{}^{(2)}(\pi) = 0. \end{cases}$$

est un sous espace vectoriel de $H^2(]0,\pi[)$ de dimension deux dont $(\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon)$ est une base:

(20) $$\begin{aligned} \varphi_\epsilon(x) &= (x/2) + \Sigma((-1)^n/n\mu_{n,\epsilon}) \mathrm{Sin}(nx). \\ \psi_\epsilon(x) &= ((\pi - x)/2)\Sigma(1/n\mu_{n,\epsilon}) \mathrm{Sin}(nx). \end{aligned}$$

Soient v_ϵ, u_ϵ les solutions des problèmes (SL)(f) et (P1)(f) respectivement, avec f la fonction donnée par (15), la fonction: $w_\epsilon = u_\epsilon - v_\epsilon$ est une solution du problème (P2) donc:

$$(u_\epsilon - v_\epsilon)(x) = a_\epsilon \varphi_\epsilon(x) + b_\epsilon \psi_\epsilon(x). \tag{21}$$

Où a_ϵ et b_ϵ sont des constantes qu'on détermine par $u_\epsilon(0) = u_\epsilon{}^{(3)}(\pi) = 0$:

$$u_\epsilon(0) = \pi b_\epsilon/2 = 0 \quad \text{donc} \quad b_\epsilon = 0. \tag{22}$$

Et alors:

$$u_\epsilon{}^{(3)}(\pi) = v_\epsilon{}^{(3)}(\pi) + a_\epsilon \varphi_\epsilon{}^{(3)}(\pi) = 0. \tag{23}$$

Par conséquent:

$$a_\epsilon\Big(\sum_{n\geqslant 1} n^2/\mu_{n,\epsilon}\Big) = \sum_{n\geqslant 1}((-1)^{n+1} n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}. \tag{24}$$

On a alors ([6, page 288]):

$$\sum_{n\geqslant 1} n^2/\mu_{n,\epsilon} = (\pi/(2\epsilon(1-\epsilon^2))(\coth(\pi/\epsilon) - \epsilon\coth(\pi)). \tag{25}$$

D'autre part comme, pour $\epsilon > 0$, $\Sigma_{n\geqslant 1}((-1)^{n+1} n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}$ est absolument convergente:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\geqslant 1}((-1)^{n+1} n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}\Big| &\leqslant \Big|\sum_{n\geqslant 1}(2n)^{3-\alpha}/\mu_{2n,\epsilon} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\Big| + \\ &+ \Big|\sum_{n\geqslant 1}(2n+1)^{3-\alpha}/\mu_{2n+1,\epsilon} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f_\epsilon(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leqslant 2a\epsilon^{2-r} + 2b\end{aligned} \tag{26}$$

d'après le lemme 1, pour $r := 3 - \alpha$.
Par conséquent au vu de (24), (25) et (26):

$$|a_\epsilon| \leqslant A\epsilon^\alpha + B\epsilon. \tag{27}$$

Et alors:

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)} &\leqslant |a_\epsilon|\,\|\varphi_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)} \\ &\leqslant (A\epsilon^\alpha + B\epsilon)\|\psi_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)}.\end{aligned} \tag{28}$$

Comme, $\Sigma_{n\geqslant 1}((-1)^{n+1}/n\mu_{n,\epsilon})\mathrm{Sin}(nx)$ est la solution du problème $(\mathrm{SL})_{(x/2)}$, converge dans $H^2(]0,\pi[)$ alors $\|\varphi_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)}$ est bornée indépendament de ϵ, et donc:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)} = 0, \tag{29}$$

i.e. u_ϵ et v_ϵ sont de même nature dans $H^2(]0,\pi[)$, ce qui prouve, d'après (19), la convergence de u_ϵ vers v dans $H^2(]0,\pi[)$. ∎

Remarque 3. Si f est donnée par (15) avec $\alpha > 2$, on a alors:

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}((-1)^{n+1}n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} 1/n^{\alpha-1} \leqslant C \tag{30}$$

Avec C une constante indépendante de ϵ:

$$|a_\epsilon| \leqslant C_1 \epsilon \tag{31}$$

Et on obtient les mêmes résultats.

REFERENCES

1. BENKIRAN, T., Comportement asymptotique d'un problème de perturbation singu lière, *Collect. Math.* **43.2** (1992), 107–115.
2. DAUTRY, R., LIONS, J.L., "Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Technique ", tome 5 (Spectre des Opérateurs), Masson, 1987.
3. GEORGE, C., "Exercices et Problème d'Intégration ", Université de NANCY I, Gauthier-Villars, 1980.
4. HUET, D., Stabilité et convergence dans les problèmes de perturbations singulières, in "Asymptotic Analysis 2 ", North-Holland, 1989, 5–19.
5. LANDAU, L., LIFSCHITZ, E., "Théorie de l'Elasticité ", Mir, Moscou, 1967.
6. SMIRNON, V., "Cours de Mathématiques Supérieures ", tome 3, Mir, Moscou, 1972.