EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **9**, Núm. 3, 173 – 180 (1994)

Comparaison de l'Orthogonalité de Diminnie aux Orthogonalités de Type Carlsson

Boussouis Brahim

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 1796, *Fés-Atlas, Maroc*

(Presented by C. Benítez)

AMS *Subject Class.* (1991): 46B20 *Received June* 29, 1994

1. Introduction

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension > 1. Si $(E, \|\cdot\|)$ est préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, on exprime d'habitude l'orthogonalité de deux vecteurs $x, y \in E$ par $x \perp y$ si et seulement si $(x, y) = 0$. Il existe d'autres formulations de cette relation qui ne font pas appel explicitement au produit scalaire et n'utilisent que la norme. En général ces formulations gardent un sens dans le contexte d'un espace normé quelconque et donnent lieu à différents concepts d'orthogonalité. Voir [1] et [3] et les références qui y sont données pour plus détails.

Dans ce travail on aura affaire à trois orthogonalités généralisées: la B-orthogonalité (introduite par G. Birkhoff dans [4] et étudiée par R.C. James dans [10] et [12]), la C-orthogonalité (introduite par S.O. Carlsson dans [7]) et la D-orthogonalité (introduite par C.R. Diminnie dans [8]). Ces trois orthogonalités coincident avec l'orthogonalité usuelle lorsque l'espace est préhilbertien. D'autre part nous avons:

Théorème 1.1. ([5, corollaire 7]) *Si la* B-*orthogonalité ou la* D-*orthogonalité entraînent la* C-*orthogonalité, alors l'espace* $(E, \|\cdot\|)$ *est préhilbertien.*

Une réciproque partielle de ce résultat est fournie par le

Théorème 1.2. ([6, théorème 2.1]) *Si la* C-*orthogonalité entraîne la* B-*orthogonalité alors l'espace* $(E, \|\cdot\|)$ *est préhilbertien.*

Le but principal de ce travail est d'établir la deuxième partie de la réciproque du théorème 1.1, à savoir que si la C-orthogonalité entraîne la D-orthogonalité, alors l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est préhilbertien. Ce résultat est une conjecture des auteurs de [1], et ils l'ont partiellement démontrée lorsque la C-orthogonalité est soit l'orthogonalité isocèle, soit l'orthogonalité au sens de Pythagore [2].

2. Rappels

Rappelons d'abord quelques définitions. Dans toute la suite $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel de dimension > 1. S et $S^\star$ désignent respectivement la sphère unité de E et de son dual topologique. Soit $(x, y) \in E^2$.

Définition 2.1. (G. Birkhoff [4, page 169]) x est B-orthogonal à y, $x \perp_{\mathrm{B}} y$, si et seulement si $\|x\| \leq \|x + ty\|$, pour tout réel t.

Définition 2.2. (S.O. Carlsson, [7, définition 1.1]) x est C-orthogonal à y,
$x \perp_{\mathrm{C}} y$, si et seulement si $\sum_{1\leq j\leq m} a_j \|b_j x + c_j y\|^2 = 0$, où les a_j, b_j, c_j, sont des réels tels que

$$\sum_{1\leq j\leq m} a_j b_j^2 = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{1\leq j\leq m} a_j c_j^2 = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{1\leq j\leq m} a_j b_j c_j = 1, \tag{3}$$

$a_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$; les couples (b_j, c_j) sont deux à deux linéairement indépendants.

Signalons que la C-orthogonalité englobe comme cas particuliers les orthogonalités suivantes, considérées par d'autres auteurs avant et après Carlsson:
– L'orthogonalité isocèle [11]: $x \perp_{\mathrm{I}} y$ si et seulement si $\|x + y\| = \|x - y\|$.
– L'orthogonalité au sens de Pythagore [11]: $x \perp_{\mathrm{P}} y$ si et seulement si $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
– La a-orthogonalité [9]: $x \perp_a y$ si et seulement si $(1 + a^2)\|x + y\|^2 = \|x + ay\|^2 + \|ax + y\|^2$ $(0 \leq a < 1)$.
– La ab-orthogonalité [13]: $x \perp_{ab} y$ si et seulement si $\|x + y\|^2 + \|ax + by\|^2 = \|x + by\|^2 + \|ax + y\|^2$, $(0 \leq a \leq b \leq 1)$.

Définition 2.3. ([8, définition 1]) x est D-orthogonal à y, $x \perp_{\mathrm{D}} y$, si et seulement si $\|x, y\| = \|x\|\,\|y\|$, où $\|x, y\| = \sup\{f(x)g(y) - f(y)g(x) \mid f, g \in S^\star\}$.

DÉFINITION 2.4. Une orthogonalité $\perp$ est dite existante à droite (resp. à gauche) si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un réel α (resp. β) tel que $x \perp \alpha x + y$ (resp. $\beta x + y \perp x$). Elle est dite unique à droite (resp. à gauche) si le réel α (resp. β) est unique chaque fois que $x \neq 0$.

LEMME 2.5. ([10, corollaire 2.2, thórèmes 2.3, 4.1 et 4.3]) *La* B-*orthogonalité est existante à droite et à gauche. De plus $x \perp_B \alpha x + y$ si et seulement si $N_-(x, y) \leq -\alpha\|x\| \leq N_+(x, y)$, où $N_\pm(x, y) = \lim_{t \to \pm 0}(\|x + ty\| - \|x\|)/t$ (ces limites existent car $t \to \|x + ty\|$ est convexe) et $\beta x + y \perp_B x$ si et seulement si $\|\beta x + y\| \leq \|tx + y\|$, pour tout réel t.*

LEMME 2.6. ([7, théorème 3.1]) *La* C-*orthogonalité est existante à droite et à gauche.*

En fait seule l'existence à droite est considérée dans [7]. L'existence à gauche se démontre de façon analogue.

LEMME 2.7. ([7, lemme 2.2]) *Pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout réel α, on a:*

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{\|(t + \alpha)x + y\|^2 - \|tx + y\|^2}{t} = 2\alpha\|x\|^2.$$

LEMME 2.8. ([8, lemmes 2.5 et 3.1])

(i) *Si $\|x, y\| \leq \|x\| \, \|y\|$, pour tout $(x, y) \in E^2$, alors la* B-*orthogonalité et la* D-*orthogonalité sont équivalentes.*

(ii) $\|\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\| = |\alpha\delta - \beta\gamma| \, \|x, y\|$ *($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels et $(x, y) \in E^2$).*

3. COMPARAISON DE LA C–ORTHOGONALITÉ A LA D–ORTHOGONALITÉ

Soit $(x, y) \in E^2$, $x \neq 0$. Par le lemme 2.6 on peut associer à tout réel t, deux réels $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, tels que $tx \perp_C \alpha(t)x + y$ et $\beta(t)x + y \perp_C tx$. Le lemme suivant généralise le théorème 3.4 de [10]:

LEMME 3.1. *Les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont bornées pour $|t|$ assez grand. Plus précisément on a les formules suivantes:*

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=\alpha(x,y). \tag{4}$$

$$\lim_{t\to-\infty}\alpha(t)=\beta(x,y). \tag{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\beta(t)=\alpha(x,y). \tag{6}$$

$$\lim_{t\to-\infty}\beta(t)=\beta(x,y). \tag{7}$$

Où

$$\alpha(x,y)=-\|x\|^{-1}(pN_+(x,y)+(1-p)N_-(x,y));$$

$$\beta(x,y)=-\|x\|^{-1}(pN_-(x,y)+(1-p)N_+(x,y))=-\alpha(x,-y)$$

$$p=\sum_{b_jc_j>0}a_jb_jc_j.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la relation T dèfinie par xTy si et seulement si $y\perp_{\mathrm{C}}x$, est une relation d'orthogonalité de type Carlsson. De ce fait on peut déduire de toute proposition vérifiée par $\alpha(t)$ une proposition vérifiée par $\beta(t)$, en échangeant simplement les rôles des b_j et des c_j.

Montrons maintenant que $\alpha(t)$ est bornée pour $|t|$ assez grand. En effet on a

$$\sum_{1\le j\le m}a_j\|(tb_j+c_j\alpha(t))x+c_jy\|^2=0. \tag{8}$$

En utilisant les inégalités $|\|u\|-\|v\||\le\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ et en tenant compte des signes des a_j et des relations (1) et (2) on obtient

$$2|t\alpha(t)|\|x\|^2\le 2\|x\|\,\|y\|\sum_{1\le j\le m}|a_jc_j(tb_j+c_j\alpha(t)|\,.$$

Et par suite $|\alpha(t)|(1-A/|t|)\le B$, où $A=(\|y\|\|x\|^{-1})\sum_{1\le j\le m}|a_jc_j^2|$ et $B=(\|y\|\|x\|^{-1})\sum_{1\le j\le m}|a_jb_jc_j|$. Donc $\alpha(t)$ est bornée pour $|t|$ assez grand.

Pour terminer nous démontrons la formule (4), les autres formules se démontrent de manière analogue. Soit (t_n) une suite de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Puisque $\alpha(t_n)$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite, qu'on continuera de noter par abus $\alpha(t_n)$, qui est convergente. Soit $\alpha=\lim_{n\to+\infty}\alpha(t_n)$ et soit

$$U_n=\sum_{1\le j\le m}a_jt_n^{-1}\|b_jt_nx+c_j(\alpha(t_n)x+y)\|^2$$

$$(=0\quad\text{car } t_nx\perp_{\mathrm{C}}\alpha(t_n)x+y).$$

Ecrivons $U_n = P_n + Q_n + R_n + S_n$, où

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{1\le j\le m} a_j t_n^{-1}\left(\|b_j t_n x + c_j(\alpha(t_n)x + y)\|^2 - \|b_j t_n x + c_j(\alpha x + y)\|^2\right)\\
Q_n &= \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 t_n^{-1}\left(\|(t_n + \alpha b_j^{-1} c_j)x + b_j^{-1}c_j y\|^2 - \|t_n x + b_j^{-1} c_j y\|^2\right)\\
R_n &= \sum_{b_j=0} a_j c_j^2 t_n^{-1}\|\alpha x + y\|^2\\
S_n &= \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 t_n^{-1}\|t_n x + b_j^{-1} c_j y\|^2.
\end{aligned}$$

Ceci étant nous avons:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 0, \tag{9}$$

car

$$|P_n| \le \|x\|\,|\alpha(t_n) - \alpha| \sum_{1\le j\le m} |a_j c_j| t_n^{-1}\left(\|b_j t_n x + c_j(\alpha(t_n)x + y)\| + \|b_j t_n x + c_j(\alpha x + y)\|\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = 2\|x\|^2 \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 \alpha b_j^{-1} c_j = 2\alpha\|x\|^2. \tag{10}$$

(En appliquant le lemme 2.7).

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0. \tag{11}$$

Et en appliquant la relation (1), on peut écrire

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 t_n^{-1}\left(\|t_n x + b_j^{-1}c_j y\|^2 - \|t_n x\|^2\right)\\
&= \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 t_n^{-1}\left(\|t_n x + b_j^{-1}c_j y\| + \|t_n x\|\right)\left(\|t_n x + b_j^{-1}c_j y\| - \|t_n x\|\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\|x\| \sum_{b_j\neq 0} a_j b_j^2 N_+(x, b_j^{-1}c_j y) \tag{13}$$

$$= 2\|x\|\left(pN_+(x,y) + (1-p)N_-(x,y)\right). \tag{14}$$

(Car $N_+(x,ky)=kN_+(x,y)$ si $k\geq 0$ et $N_+(x,ky)=kN_-(x,y)$ si $k\leq 0$).

Par suite $\alpha=-\|x\|^{-1}(pN_+(x,y)+(1-p)N_-(x,y))=\alpha(x,y)$.

Ainsi pour toute suite (t_n) de limite $+\infty$, il existe une sous-suite de $\alpha(t_n)$ qui converge vers $\alpha(x,y)$.

Par conséquent $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=\alpha(x,y)$. ∎

THÉORÈME 3.2. *L'espace $(E,\|\cdot\|)$ est préhilbertien si et seulement si la* C*-orthogonalité entraîne la* D*-orthogonalité.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On ne perd pas en généralité en supposant que E est de dimension deux ([3, page 9, proposition (1.4′)]). Grâce au théorème 1.2, cité en introduction, on est ramené à démontrer que la D-orthogonalité est équivalente à la B-orthogonalité, ou encore, en utilisant le lemme 2.8-(i) que $\|x,y\|\leq 1$, pour tout $(x,y)\in S^2$. Soient $(x,y)\in S^2$, x et y linéairement indépendants, et $\beta(t)$ tel que $\beta(t)x+y\perp_{\mathrm{C}} tx$ $(t\in\mathbb{R})$. Sous l'hypothèse du théorème on a $\beta(t)x+y\perp_{\mathrm{D}} tx$, soit $\|\beta(t)x+y,tx\|=\|tx\|\,\|\beta(t)x+y\|$. Or $\|\beta(t)x+y,tx\|=|t|\,\|x,y\|$ (d'après le lemme 2.8-(ii)). Donc

$$\|x,y\|=\|\beta(t)x+y\|\quad (t\in\mathbb{R}^\star). \tag{15}$$

Et en utilisant la formule (6) du lemme 3.1, on obtient

$$\|x,y\|=\|\alpha(x,y)x+y\|. \tag{16}$$

Supposons dans un premier temps que la norme soit Gâteaux-différentiable en x, et distinguons deux cas:

PREMIER CAS: La fonction $\beta(t)$ prend au moins trois valeurs distinctes. Dans ce cas la fonction convexe $F(t)=\|tx+y\|$, serait constante et atteindrait son minimum sur un intervale contenant $\alpha(x,y)$, et ceci grâce aux égalités (15) et (16). D'où $\|x,y\|=\|\alpha(x,y)x+y\|\leq\|0x+y\|=1$.

DEUXIÈME CAS: La fonction $\beta(t)$ prend au plus deux valeurs distinctes. Soient β_1 et β_2, le deux valeurs éventuelles de $\beta(t)$, et soit

$$B_i=\{t>0\mid \sum_{1\leq j\leq m} a_j\|c_jtx+b_j(\beta_ix+y)\|^2=0\},\quad i=1,2.$$

B_1 et B_2 sont deux fermés de $\mathbb{R}_+^\star$ et $B_1\cup B_2=\mathbb{R}_+^\star$. Puisque $\mathbb{R}_+^\star$ est connexe on a nécessairement $\mathbb{R}_+^\star=B_i$, pour un certain $i\in\{1,2\}$, et grâce au lemme 3.1, on a $\beta_i=\alpha(x,y)$. Ainsi pour tout $t>0$, $y+\alpha(x,y)x\perp_{\mathrm{C}} tx$. On démontre de même que pour tout $t < 0$, $y + \beta(x,y)x = y + \alpha(x,y)x \perp_{\mathrm{C}} tx$. Soit $u = y + \alpha(x,y)x$.

On a $u \perp_{\mathrm{C}} tx$ pour tout réel t, donc $tu \perp_{\mathrm{C}} x$ pour tout réel t. Appliquons le lemme 3.1 au couple (u,x), pour obtenir $\alpha(u,x) = \beta(u,x) = 0$ ($u \neq 0$ car x et y sont linéairement indépendants). Donc

$$pN_+(u,x) + (1-p)N_-(u,x) = 0, \tag{17}$$
$$pN_-(u,x) + (1-p)N_+(u,x) = 0. \tag{18}$$

En ajoutant (17) et (18), on en déduit successivement que $N_+(u,x)+N_-(u,x) = 0$; $N_-(u,x) \leq 0 \leq N_+(u,x)$; $u \perp_{\mathrm{B}} x$; $\|x,y\| = \|\alpha(x,y)x + y\| \leq 1$. En résumé si la norme est Gâteaux-différentiable en x, on a $\|x,y\| \leq 1$ pour tout $y \in S$. D'après le théorème de Mazur [14] (ou sa version bidimensionnelle [3, page 17, proposition (x)]), l'ensemble des points de S où la norme est Gâteaux-différentiable est dense dans S, donc $\|x,y\| \leq 1$ pour tout $(x,y) \in S^2$. ∎

Corollaire 3.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(i) $(E, \|\cdot\|)$ *est préhilbertien.*

(ii) *Pour tous* $x, y \in E \setminus \{0\}$, $x + \alpha y \perp_{\mathrm{D}} x - \alpha y \quad \Rightarrow \quad |\alpha|\,\|y\| = \|x\|$.

Démonstration. L'implication (i) ⇒ (ii) est immédiate. Supposons maintenant que (ii) est vraie et soient $x, y \in E \setminus \{0\}$ tels que $x \perp_{\mathrm{I}} y$. Posons $u = x + y$ et $v = x - y$. D'après ([2, proposition 7–(i)]), il existe $\alpha > 0$ tel que $u + \alpha v \perp_{\mathrm{D}} u - \alpha v$ et d'après (ii), on aurait $\alpha\|v\| = \|u\|$; donc $\alpha = 1$ et $x \perp_{\mathrm{D}} y$. Donc l'orthogonalités isocèle (qui est une C-orthogonalité particulière) entraîne la D-orthogonalité, et par suite $(E, \|\cdot\|)$ est préhilbertien, d'après le théorème 3.2. ∎

Références

[1] Alonso, J., Benítez, C., Orthogonality in normed linear spaces: a survey, part II. Relations between main orthogonalities, *Extracta Math.* **4**(3) (1989), 121–131.

[2] Alonso, J., Benítez, C., Complements on Diminnie orthogonality, *Math. Nachr.* **165** (1994), 99–106.

[3] Amir, D., "Characterizations of Inner Product Spaces", Birkhauser, Basel, 1986

[4] Birkhoff, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.

[5] BOUSSOUIS, B., Caractérisation des espaces préhilbertiens au moyen des orthogonalités généralisées, *Extracta Math.* **7** (1992), 20–24.

[6] BOUSSOUIS, B., Relations entre l'orthogonalité de Birkhoff–James et l'orthogonalité de Carlsson, *Ann. Sc. Math. Québec* **17**(2) (1993), 139–143.

[7] CARLSSON, S.O., Orthogonality in normed linear spaces, *Ark. Math.* **4** (1962), 297–318.

[8] DIMINNIE, C.R., A new orthogonality relation in normed linear spaces, *Math. Nachr.* **114** (1983), 197–203.

[9] DIMINNIE, C.R., ANDALAFTE, E.Z., FREESE, R.W., An extension of pythagorean and isocele orthogonality and a characterization of inner product spaces, *J. Approx. Theory* **39** (1983), 295–298.

[10] JAMES, R.C., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **61** (1947), 265–292.

[11] JAMES, R.C., Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.* **12** (1945), 291–301.

[12] JAMES, R.C., Inner products in normed linear spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **53** (1947), 559-566.

[13] KAPOOR, O.P., PRASAD, J., Orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1978), 403-416.

[14] MAZUR, S., Über konvexe mengen in linearen normierten raümen, *Studia Math.* **4** (1933), 70–84.