EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **9**, Núm. 3, 139 – 159 (1994)

Medias Generalizadas y Aplicaciones

J.C. Candeal [1] and E. Induráin [2]

[1] *Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza c/ Doctor Cerrada 1 y 3, 50005-Zaragoza, Spain*
[2] *Departamento de Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra Campus Arrosadía s/n, 31006-Pamplona, Spain*

(Presented by Jesús M.F. Castillo)

AMS *Subject Class.* (1991): 22A05, 54H11, 90A08 *Received October* 25, 1994

1. Conceptos Previos e Introducción

Sea $(X, +)$ un grupo algebraico (X es el conjunto base y "+" es la correspondiente operación binaria).

Una *n-media generalizada algebraica* para X es una aplicación $F : X^n \to X$ verificando:

(i) $F(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + F(y_1, \ldots, y_n)$,

(ii) $F(x, \ldots, x) = x$,

(iii) $n \cdot F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$,

para cualesquiera $x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$.

Ejemplos de medias generalizadas son:

1. La media aritmética A definida en $(\mathbb{R}, +)$ mediante $A(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)/n$.
2. La media geométrica G definida en $((0, +\infty), \cdot)$ mediante $G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$.

Nota 1. Aunque pueda sorprender, no es fácil dar otros ejemplos que puedan calificarse de sencillos. De hecho, como indicaremos en el Corolario 2, la media aritmética es la única n-media algebraica posible en $(\mathbb{R}, +)$, y, en consecuencia, la media geométrica es la única posible en $((0, +\infty), \cdot)$. Algún grupo típico, como el grupo multiplicativo S^1 de los números complejos de módulo

1, carece de medias algebraicas (se verá en Teorema 3 y Nota 3 (iii)). Otros, como $(\mathbb{Z}_p, +)$, no pueden poseer n-medias algebraicas para todos los valores de n (se verá en la Nota 2).

El concepto de media generalizada surge de manera independiente en contextos matemáticos bien distintos.

I. Un primer contexto fue introducido por G. Aumann en su tesis doctoral (véanse [2, 3]), donde se aborda el estudio de ciertas variedades topológicas Y en las que es posible definir una aplicación $G : Y^n \to Y$, cumpliendo las tres condiciones siguientes:

(i) G es continua,

(ii) $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$ para cualquier reordenación $(y_1, \ldots, y_n)$ de $(x_1, \ldots, x_n)$,

(iii) $G(x, \ldots, x) = x$, para todo $x \in Y$.

A una función G de este tipo la llamaremos en lo que sigue *n-media generalizada topológica*.

Veamos dos ejemplos de distinta naturaleza:

1. Sea Φ una función continua y estrictamente monótona de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y definamos $G(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{-1}([\Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n)]/n)$.
2. Sea Y un conjunto totalmente ordenado, y definamos $G(x_1, \ldots, x_n) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$. Es frecuente que Y esté dotado de alguna topología para la que la operación de tomar el mínimo sea continua, con lo que G pasa a definir una n-media generalizada topológica.

Aumann demostró que la existencia para cualquier n de n-medias generalizadas en ciertas variedades topológicas conexas caracterizaba el hecho de que estas variedades fuesen contractibles, es decir, que existieran una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \to Y$ y un punto $y_0 \in Y$ tales que $H(y, 0) = y, H(y, 1) = y_0$ para todo $y \in Y$. (Véase [4]. También pueden consultarse los trabajos de Eckmann [25], Eckmann, Ganea y Hilton [26], Bacon [5] y Keesling [32].)

Cabe decir que las variedades topológicas consideradas por Aumann son, en esencia, *complejos celulares finitos*. Este concepto, que definiremos más adelante en el presente trabajo, apareció de una manera formal y precisa en la literatura a partir de un artículo de Whitehead [42], que es posterior a la tesis de Aumann. Parece así oportuno no exponer aquí la prueba original de

Aumann, larga y complicada, y presentar a cambio una versión más moderna de ese mismo resultado (Corolario 3 y Teorema 5 de la próxima sección) indicando sus líneas maestras.

A través del concepto de n-media generalizada topológica se llega fácilmente al de n-media generalizada algebraica, sin más que pararse a pensar en algunos de los invariantes algebraicos típicos, bien conocidos en Topología Algebraica, que tengan caracter funtorial. Entre ellos estarían los grupos de homotopía, homología y cohomología. Así, por ejemplo, si $\pi_k(Y)$ representa el *k-ésimo grupo de homotopía* de la variedad Y (es decir, el conjunto de las clases de funciones homotópicamente equivalentes de $[0,1]^k$ en Y que envían un punto prefijado de $[0,1]^k$ a un punto prefijado de Y, véase Rohlin y Fuchs [38, p. 359 y ss]), la existencia de una n-media generalizada topológica F para Y induce la existencia para cada valor de k de una n-media generalizada algebraica F_k^* para $\pi_k(Y)$. Este hecho fue observado ya por Eckmann en [25].

II. Las medias generalizadas se aplican también al estudio de grupos topológicos. Un *grupo topológico* es un conjunto G, dotado de una topología τ y de una operación interna "+" que define una estructura algebraica de grupo, de tal forma que la operación "+" sea una aplicación continua de $G \times G$ con la topología producto en (G, τ) y que la aplicación que a cada elemento $x \in G$ asocia $-x$ sea también una aplicación continua de (G, τ) en sí mismo. En Keesling [32] se demuestra el hecho de que *un grupo topológico abeliano conexo, compacto y Hausdorff admite una n-media generalizada algebraica si y sólamente si admite una n-media generalizada topológica.* Además los grupos abelianos (no necesariamente topológicos) que admiten una n-media generalizada algebraica para todo valor de n son perfectamente catalogables, como veremos más adelante. Se trata precisamente de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

III. Un contexto muy diferente en el que la noción de media generalizada juega un relevante papel es la *teoría matemática de la Elección Social.* A lo largo de este trabajo pondremos mayor énfasis en esta última aplicación, puesto que consideramos que es menos conocida para la mayoría de las matemáticos, siendo además uno de los temas objeto de nuestras investigaciones.

En la teoría matemática de la Elección Social se considera el problema de *definir preferencias sociales a partir de preferencias individuales, respetando las principales características de los individuos.* Explicaremos brevemente, a continuación, qué significa esta última idea:

Una *relación de preferencias P* sobre un conjunto X (que suele denominarse *conjunto de alternativas*) es una relación binaria *asimétrica* (i.e.: $xPy \Rightarrow$ no(yPx)) y *negativamente transitiva* (i.e.: no(xPy), no$(yPz) \Rightarrow$ no(xPz)). Supongamos ahora que hay una *sociedad* (finita o infinita) compuesta de *individuos* (o agentes económicos, o decisores, o votantes, etc.) de forma que cada individuo i tiene definida una relación de preferencias P_i sobre el mismo conjunto de alternativas X. Una *regla de elección social* asignará una relación de preferencia P sobre X que respete características de las preferencias individuales. Este hecho de respetar características individuales *depende del modelo matemático con que se vaya a trabajar*, y hay una gran variedad de modelos de este tipo (véase, por ejemplo, Kelly [33]). Para fijar ideas, una de las condiciones que parece de sentido común exigir a una regla de elección social es el *respeto de la unanimidad*: Si dadas dos alternativas $x, y \in X$ resulta que para cualquier i es $xP_i\, y$, entonces en la preferencia social P debe ser también xPy. Los modelos de elección social trabajan con condiciones como la anterior, y buscan reglas que satisfagan una lista de condiciones.

En principio, la matemática que había detrás de tales modelos era, principalmente, *combinatoria*: se considera una sociedad en la que hay un número finito de agentes y un número finito de alternativas, se hace una lista de todas las preferencias posibles, y se eliminan aquellas que no satisfagan alguno de los requisitos que el modelo exija para poder ser consideradas reglas sociales. En este marco apareció un resultado que podemos catagolar de contundente: *El teorema de imposibilidad de Arrow* (Arrow [1]). Sin desarrollar el modelo de Arrow, digamos que en el mismo aparecen cinco condiciones que podríamos considerar de sentido común para las reglas de elección social. La gran sorpresa es que, *bajo tales condiciones, no existe ninguna regla de elección social.* Este teorema de imposibilidad de Arrow ha supuesto una clara bifurcación en los estudios sobre Elección Social: Por un lado aparecen las investigaciones en las que, a sabiendas de que las reglas de elección social que uno construya van a ser malas, en el sentido de que van a dejar de cumplir alguna de las condiciones del modelo de Arrow, se trata de encontrar reglas que sean lo menos malas posibles. El otro punto de vista es rebajar nuesta idea de sentido común, cambiando las condiciones de los modelos, buscando así otros, distintos al de Arrow, en los que aparezcan *resultados de posibilidad*, es decir, *que en tales modelos podamos encontrar reglas de elección social.* (Para más información sobre distintos modelos matemáticos en Elección Social puede consultarse el excelente texto de Kelly [33] donde se dedican varios capítulos al análisis detallado de las condiciones del modelo de Arrow así como a dar una prueba técnicamente sencilla del teorema de imposibilidad y que debido a su longitud omitiremos aquí.)

Es en alguno de estos últimos modelos de Elección Social donde el concepto de medias generalizadas va a jugar un relevante papel. Veremos, entre estos últimos modelos, el introducido en los trabajos de Chichilnisky [13, 14, 15]. Pensamos que es el que mejor refleja la línea de las aplicaciones de la Topología Algebraica a la Elección Social.

EL MODELO DE ELECCIÓN SOCIAL DE CHICHILNISKY. La idea clave de este modelo es pensar que en una sociedad puede haber agentes que tengan opiniones, o preferencias, que podríamos entender como próximas. Para precisar matemáticamente esta idea de proximidad, Chichilnisky estudia *espacios de preferencias* Y que recogen todas las distintas preferencias que un agente podría definir (quizá bajo ciertos supuestos adicionales, según ramificaciones del modelo) sobre un conjunto de alternativas. Así, cada elemento de Y corresponderá a una determinada relación de preferencia definida sobre cierto conjunto de alternativas. A este espacio de preferencias se le dota de una *topología* que nos permitirá hablar de preferencias parecidas (por ejemplo, en el momento que pertenezcan a algún mismo entorno de una preferencia dada). Además, a esta topología se le exige ser de Hausdorff con la idea de poder separar preferencias distintas.

Bajo estas condiciones, *una n-regla social de Chichilnisky no es más que una n-media generalizada topológica definida para Y.* El lenguaje propio de la Elección Social, llama *respeto del anonimato* a la propiedad (ii) de la definición de n-media generalizada topológica, y *respeto de la unanimidad* a la propiedad (iii) de dicha definición.

Encontrar una n-regla de elección social suele denominarse también *agregar* las preferencias individuales para el caso de n agentes. Y así, las n-reglas sociales (n-medias generalizadas topológicas) también suelen denominarse *reglas de agregación* en este lenguaje de Elección Social.

En resumen, en el lenguaje de la teoría matemática de la Elección Social, una n-regla topológica de Chichilnisky es una aplicación $G : Y^n \to Y$ que sea continua, anónima y unánime, donde Y es un determinado espacio de preferencias.

Antes de seguir, veamos algunos ejemplos de espacios de peferencias:

1. Lanzamos un satélite al espacio. Se sabe que la forma óptima de colocación del satélite se obtiene en dos fases: En primer lugar lo lanzamos hasta que alcance, con velocidad y energía cero, una determinada altura sobre nuestra

vertical. Una vez en ese punto, se activa una turbina que ha de desplazarlo una distancia prefijada, en línea recta y en un plano perpendicular a nuestra vertical. Así, puede observarse fácilmente que el conjunto de posiciones óptimas que puede haber corresponde al espacio topológico $(0,+\infty) \times S^1$. (El primer factor determina la altura alcanzada, y el segundo la dirección escogida).

2. A la hora de contratar una empresa para realizar unas obras públicas, el criterio que ha seguido un determinado ayuntamiento ha sido: En primer lugar escoger la oferta más barata. Caso de haber varias, escoger aquella tal que su oficina central diste lo memos posible del ayuntamiento, con la idea de minimizar los costes en correo y teléfono. Aquí, el espacio de preferencias es $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$. El primer factor corresponde a la cuantía de la oferta, y el segundo a la distancia al ayuntamiento.

En diversos artículos Chichilnisky y otros van observando el hecho de que la topología que tenga el espacio de preferencias X es decisiva a la hora de encontrar n-reglas topológicas.

Se prueba que una clase de espacios topológicos en la que están la mayor parte de las espacios de preferencias que aparecen en Economía son los *complejos celulares parafinitos* (Rohlin y Fuchs [38, Ch. 2]). Un complejo celular es un espacio obtenido al pegar adecuadamente celdas de dimensión finita: Las celdas de dimensión cero son puntos, las de dimensión uno, intervalos abiertos de la recta real, las de dimensión dos, interiores de círculos en el plano, las de dimensión tres, interiores de esferas en el espacio de tres dimensiones, etc.

Un complejo celular se dice *finito* si posee un número finito de celdas que lo constituyen, y se dice *parafinito* si posee únicamente un número finito de celdas en cada dimensión (aunque quizás su número total de celdas sea infinito). Un ejemplo es la superficie de una rosquilla, o *toro unidimensional* $S^1 \times S^1$, que se obtiene de un cuadrado en el que se identifican con la misma orientación sus lados paralelos. El toro consta de una celda de dimensión dos, dos celdas de dimensión uno y una celda de dimensión cero.

Entre los complejos celulares parafinitos, la existencia de una n-media topológica para todo $n \in \mathbb{N}$ viene caracterizada por la contractibilidad del espacio topológico. Esto, a su vez (en este marco de complejos celulares parafinitos) puede caracterizarse por el hecho de que todos los grupos de homotopía del complejo sean triviales. En el marco de la Elección Social, este hecho fue observado y demostrado por Chichilnisky y Heal [22], y es conocido con el nombre de *resolución de la paradoja de la Elección Social.* Digamos que, en un modelo de elección social, un espacio de preferencias constituye una *paradoja* si no es posible encontrar en él, para algún valor de n, una n-regla topológica. Un ejemplo es la esfera unidad S^1, complejo celular no contractible. (Obsérvese además que su primer grupo de homotopía es no trivial. Como es bien conocido, se trata del grupo aditivo de los números enteros, i.e. : $\pi_1(S^1) = (\mathbb{Z}, +)$.)

Como hemos dicho, hay ejemplos típicos de espacios de preferencias que se manejan en Economía que son complejos celulares parafinitos. Citamos y referenciamos algunos de los casos más notables:

1. El conjunto de las preferencias lineales no triviales sobre el espacio $\mathbb{R}^{k+1}$, dotado con la topología *smooth* (introducida por Debreu en [24]), puede identificarse (véase Chichilnisky [15]) con la esfera unidad k-dimensional S^k, con su topología usual. Para explicar intuitivamente este caso, digamos que se trata de elegir direcciones y sentidos de movimiento a partir de un punto fijo de $\mathbb{R}^{k+1}$, por ejemplo, el origen. Además, hay que moverse forzosamente (de ahí el nombre de preferencias no triviales) siguiendo alguna dirección y sentido. Es sencillo observar que ese conjunto de direcciones y sentidos, como tal, puede identificarse fácilmente con el conjunto de puntos de S^k. Evidentemente, la identificación topológica dependerá de qué topología se considere sobre el espacio de preferencias. El porqué económico de estas preferencias lineales puede entenderse pensando que una empresa que trabaje con $k+1$ tipos de bienes puede querer, en un momento dado, vender unos y comprar otros de esos bienes en unas determinadas proporciones. Y además, su decisión nunca va a ser ni comprar ni vender. Esto determina una dirección y sentido en el espacio de $k + 1$ dimensiones. Para verlo con mayor claridad, supongamos que se trabaja únicamente con dos bienes x e y, sobre los cuales la decisión es comprar, y comprar dos veces más de y que de x. Esto determina la dirección de la recta "$y = 2x$", que determina claramente un punto de S^1, a saber $e^{i\alpha}$ con $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

2. El espacio de las utilidades de Neumann-Morgenstern sobre un conjunto de loterías definido sobre un número finito n de premios, puede también llegar a identificarse con una esfera. (Véase Chichilnisky [17, 19].) Para explicar intuitivamente lo que esto significa, digamos que hay una lotería que reparte, por ejemplo, dos premios A y B. Nosotros podemos tener una preferencia cuantificada a través de una función de utilidad que no es otra cosa que una representación númerica dada por una función $U : \{A, B\} \to \mathbb{R}$ tal que A es preferido a B si y sólo si $U(A) > U(B)$. Pues bien, si la lotería ofrece el premio A con probabilidad p, y el premio B con probabilidad $1 - p$, parece necesario extender nuestra idea de utilidad a este conjunto de loterías admitiendo que la utilidad del anterior hecho sea precisamente $p \cdot U(A) + (1 - p) \cdot U(B)$. A

este tipo de utilidades se les denomina *utilidades de Neumann-Morgenstern*, y como indicamos, con una adecuada topología pueden entenderse como esferas.

Presentaremos a continuación los principales resultados de esta teoría, incluyendo algunas de las demostraciones más sencillas de hechos significativos. Lo que pretendemos es ofrecer una recopilación conjunta y panorámica de tales resultados, que pueda servir a los investigadores en cada una de las posibles aplicaciones del concepto de media generalizada. Por otra parte, debemos decir que los resultados que vamos a presentar se encuentran algo desperdigados en una colección notable de artículos, a primera vista poco relacionados unos con otros. Por ello, nos ha parecido necesaria esta labor de presentación global y conjunta, que es la que nos ha motivado a escribir este trabajo.

2. Principales Resultados de la Teoría sobre Medias Generalizadas

Organizamos el trabajo en varias fases:

I. Resultados sobre n-medias generalizadas algebraicas.

II. Aplicaciones a grupos topológicos.

III. Diversas técnicas topológicas en relación con medias generalizadas.

IV. Aplicaciones a la Teoría Matemática de la Elección Social.

V. Comentarios finales.

I. Resultados sobre n-medias generalizadas algebraicas

TEOREMA 1. *Sean $(X,+)$ un grupo, y $F : X^n \to X$ una n-media algebraica para X. Entonces se tiene:*

(i) *El grupo $(X,+)$ es abeliano (esto es, $x+y=y+x$ para todo $x,y \in X$),*

(ii) *X es n-divisible, es decir, para cada $x \in X$ existe un único $y \in X$ tal que $n \cdot y = x$. Además la aplicación que envía $x \in X$ en el correspondiente elemento $y \in X$ tal que $n \cdot y = x$ es un automorfismo de X.*

Demostración. (Aparece, esencialmente, en Eckmann [25] y Chichilnisky y Heal [22]. Pueden verse ideas similares en los trabajos de Aumann [4], Keesling [32] y Candeal e Induráin [11].)

(i) Sea "e" el elememto neutro de la estructura de grupo $(X,+)$. Por unanimidad resulta que $F(t,\dots,t) = t$, para todo $t \in X$. Pero $F(t,\dots,t) = F(t,e,\dots,e) + F(e,t,e,\dots,e) + \cdots + F(e,\dots,e,t)$. Por anonimato, resulta ahora $F(t,\dots,t) = n \cdot F(t,e,\dots,e)$.

Como F es homomorfismo, obtenemos $t = F(t,\dots,t) = F(n \cdot t, e,\dots,e)$. Así $x+y = F(n\cdot(x+y),e,\dots,e) = F((x+y)+\dots$ n veces $\cdots+(x+y), e,\dots,e) = F(x,e,\dots,e) + F(y+(x+y)+\dots$ $n-1$ veces $\cdots+(x+y),e,\dots,e)$. De nuevo por anonimato: $F(x,e,\dots,e) = F(e,x,e,\dots,e)$.

Finalmente $F(x,e,\dots,e) + F(y+(x+y)+\dots$ $n-1$ veces $\cdots+(x+y),e,\dots,e) = F(e,x,e,\dots,e) + F(y+(x+y)+\cdots+(x+y),e,\dots,e) = F(y+(x+y)+\cdots+(x+y),x,e,\dots,e) = F(y+(x+y)+\cdots+(x+y),e,\dots,e) + F(e,x,e,\dots,e) = F(y+(x+y)+\cdots+(x+y),e,\dots,e) + F(x,e,\dots,e) = F(y+(x+y)+\dots$ $n-1$ veces $\cdots+(x+y)+x,e,\dots,e) = F(n\cdot(y+x),e,\dots,e) = y+x$.

(ii) Observemos que $x = F(x,\dots,x) = F(n\cdot x,e,\dots,e) = n\cdot F(x,e,\dots,e)$. Sea $y = F(x,e,\dots,e)$ y veamos que y es el único elemento tal que $n\cdot y = x$: De hecho, si $n\cdot z = x$, entonces, siendo $-z$ el opuesto de z, se sigue por el apartado (i) que $n\cdot(y-z) = e$. Así que $e = F(e,e,\dots,e) = F(n\cdot(y-z),e,\dots,e) = y-z$. Por consiguiente $z = y$.

Para cada $x \in X$ definimos ahora $F^*(x) = y$, con $y \in X$ el único elemento tal que $n\cdot y = x$. F^* es, claramente, un homomorfismo de grupos, y se tiene que $F^*(n\cdot x) = n\cdot F^*(x) = n\cdot y = x$ $(x \in X)$. Así F^* es epimorfismo. Por otra parte, la inyectividad de F^* ha sido ya establecida. ∎

COROLARIO 1. *Sea $(X,+)$ un grupo que admita una n-media algebraica para todo valor de $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(X,+)$ es un* grupo abeliano divisible *(i.e.: es n-divisible para todo $n \in \mathbb{N}$)* libre de torsión *(i.e.: si para ciertos $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n\cdot x = e$, entonces a la fuerza $x = e$; en otras palabras, $(X,+)$ no posee elementos nilpotentes). El recíproco también es cierto.*

Demostración. (Aparece, por ejemplo, en Chichilnisky [18].) Usando el Teorema 1, lo único no inmediato es el recíproco. Para verlo, basta observar que, dados $n \in \mathbb{N}$ y $x_1,\dots,x_n \in X$, por divisibilidad, existe un único elemento $F(x_1,\dots,x_n) \in X$ tal que $n\cdot F(x_1,\dots,x_n) = x_1+\cdots+x_n$. La aplicación F así definida es claramente una n-media generalizada algebraica. ∎

Notas 2. (i) De la demostración del Teorema 1 y Corolario 1 anteriores se deduce inmediatamente que *un grupo $(G,+)$ es n-divisible si y sólo si admite* *una n-media generalizada algebraica.* Por ejemplo: El grupo cíclico $\mathbb{Z}/p \cdot \mathbb{Z}$ admite una q-regla si y sólo si q es primo con p $(p, q \in \mathbb{N})$.

(ii) Los grupos abelianos divisibles y libres de torsión son isomorfos a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$, y viceversa. En otras palabras, se trata precisamente de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Este hecho puede verse demostrado en Kaplansky [31, p. 10]. En particular, *tales grupos han de ser infinitos.*

Un caso particular significativo se da cuando queremos definir alguna n-media generalizada algebraica sobre un espacio vectorial real. No es difícil, a partir del Teorema 1 y del Corolario 1, obtener el resultado siguiente:

COROLARIO 2. *La única n-media algebraica que puede definirse sobre un espacio vectorial real X es la media aritmética Φ definida mediante $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (1/n) \cdot (x_1 + \cdots + x_n)$, para $x_1, \ldots, x_n \in X$.*

La demostración es un ejercicio sencillo y aparece, por ejemplo, en Candeal, Induráin y Uriarte [12]. A la aplicación Φ se le suele denominar también *media convexa.*

II. APLICACIONES A GRUPOS TOPOLÓGICOS

El estudio de grupos topológicos se realiza tanto en su vertiente algebraica en cuanto grupos, como en su vertiente topológica, como variedades topológicas, en las que a su vez cabe emplear técnicas propias de, ponemos por caso, Topología Algebraica como el cálculo de grupos de homotopía y homología, etc. Entre las técnicas usuales está el empleo de otros grupos asociados, que proporcionan valiosa información a cerca del grupo topológico que se pretenda estudiar. Dado un grupo topológico G, entre estos posibles grupos podemos encontrar el de los automorfismos de G, $\mathrm{Aut}\,(G)$; el de los homomorfismos de G en el grupo aditivo de los números enteros, $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbb{Z})$; o en los reales, $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbb{R})$; o en el grupo multiplicativo S^1 de los números complejos de módulo unidad, $\mathrm{Hom}\,(G, S^1)$. Si de este último consideramos el subgrupo de los homomorfismos *continuos* de G en S^1, obtenemos el denominado *grupo de caracteres de G*, o *grupo dual de Pontryagin del grupo G*, al cual se suele denotar $G^\frown$. Cuando G es abeliano y localmente compacto, a este grupo de caracteres se le puede dotar de una topología adecuada (la inducida por las funciones de $\mathrm{L}^1(G)$, con respecto a la medida de Haar en G) que lo convierte en grupo topológico con buenas propiedades en relación con la estructura topológica de G. Para más detalles, acerca de estas construcciones y sobre la teoría general de grupos topológicos, puede consultarse Rudin [39].

En lo que sigue vamos a trabajar con un grupo topológico abeliano, conexo, localmente compacto y Hausdorff, $(G, +)$, sobre el que estudiaremos medias generalizadas, tanto algebraicas como topológicas.

LEMA 1. *Sea G un grupo abeliano topológico conexo, localmente compacto y Hausdorff. Entonces, el primer grupo de homotopía de G, $\pi_1(G)$, es isomorfo a* $\mathrm{Hom}\,(G^{\frown}, \mathbb{Z})$ *y también a* $\mathrm{Hom}\,(S^1, G)$. *Además, para todo $k > 1$, los grupos de homotopía $\pi_k(G)$ son todos triviales.*

La demostración puede verse en Enochs [28] o en Sigmon [40].

LEMA 2. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano topológico conexo, compacto y Hausdorff, y supongamos que existe una n-media generalizada algebraica Φ para G. Entonces Φ es también una n-media topológica. (En otras palabras, Φ es continua.)*

Demostración. Aparece en Keesling [32].Veamos una prueba alternativa sencilla: Por el Teorema 1, la aplicación $\Phi^{\sim} : G \to G$ dada por $\Phi^{\sim}(g) = \Phi(g, e, \ldots, e)$ es un automorfismo. Para ver que $\Phi^{\sim}$ es continua, tomemos una red $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en G que converja a un elemento $g_0 \in G$. Por compacidad de G, existe una subred (que denotaremos igual) tal que existe el límite

$$h = \lim_\alpha \Phi(g_\alpha, e, \ldots, e) = \lim_\alpha \Phi^{\sim}(g_\alpha)\,.$$

Por continuidad de la operación del grupo (repetida n veces), se sigue que

$$n \cdot h = \lim_\alpha \,[n \cdot \Phi(g_\alpha, e, \cdots, e)] = \lim_\alpha \,(g_\alpha) = g_0\,,$$

por tanto $h = \Phi(g_0, e, \ldots, e) = \Phi^{\sim}(g_0)$.

Se sigue ahora, utilizando de nuevo el Teorema 1, que la aplicación Φ, al ser $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1 + \cdots + x_n, e, \ldots, e) = \Phi^{\sim}(x_1 + \cdots + x_n)$, es de hecho continua y por tanto es una n-media topológica en G. ∎

LEMA 3. *Sea X un espacio topológico conexo. Si existe una n-media generalizada topológica para X, entonces existe una n-media algebraica generalizada para cualquier grupo de homotopía de X.*

Este hecho fue ya advertido por Eckmann en [25] y resulta un ejercicio sencillo a partir de las propiedades elementales del funtor de homotopía.

TEOREMA 2. *Sea $(G, +)$ un grupo topológico conexo, compacto y Hausdorff, y supongamos que existe para G una n-media generalizada, bien algebraica o bien topológica, Φ. Entonces todos los grupos de homotopía de G son triviales.*

Demostración. Aparece, esencialmente, en Keesling [32]. Veamos una prueba alternativa: Por el Lema 2, podemos trabajar únicamente con medias topológicas. Por el Lema 1, bastará ver que $\pi_1(G)$ es trivial. Supongamos pues que existe una n-media generalizada topológica Φ para G. Por el Lema 3, Φ induce una n-media algebraica Φ^* para $\pi_1(G)$, primer grupo de homotopía de G. Además, por el Teorema 1, Φ^* induce un automorfismo $\Phi^{*\sim}$ en $\pi_1(G)$ dado por $\Phi^{*\sim}(s) = \Phi^*(s, e, \ldots, e)$. Ahora, de nuevo por el Lema 1, llegamos al siguiente hecho: Si la aplicación $\Phi^{*\sim}$, entendida ahora como de $\mathrm{Hom}\,(G^{\frown}, \mathbb{Z})$ sobre $\mathrm{Hom}\,(G^{\frown}, \mathbb{Z})$, y dada por $\Phi^{**}(f) = f/n$, es un automorfismo, entonces para cada $f \in \mathrm{Hom}\,(G^{\frown}, \mathbb{Z})$ y $g^{\frown} \in G^{\frown}$, n divide a $f(g^{\frown})$, y reiterando este proceso, n^p divide a $f(g^{\frown})$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Esto sólo es posible cuando $\mathrm{Hom}\,(G^{\frown}, \mathbb{Z}) = \{0\}$. ∎

COROLARIO 3. *Bajo las condiciones de Teorema 2, y en el supuesto de que G sea además un complejo celular parafinito, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *Para algún $n > 1$, existe una n-media topológica para G,*

(ii) *Todos los grupos de homotopía de G son triviales,*

(iii) *G es contractible,*

(iv) *Para todo $n > 1$, existe una n-media topológica para G.*

(*Un ejemplo de grupo topológico en las condiciones del enunciado es el toro $S^1 \times S^1$.*)

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es una consecuencia directa de la prueba del Teorema 2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Un complejo celular parafinito tal que todos sus grupos de homotopía sean triviales debe ser contractible (Rohlin y Fuchs [38, p. 446], o Fomenko, Fuchs y Gutenmacher [29, p. 77]).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Este resultado, probado por Chichilnisky y Heal en [22], se conoce como la *resolución de la paradoja de la Elección Social.* (Otra prueba puede verse en Candeal e Induráin [11].)

(iv) $\Rightarrow$ (i) Es obvio. ∎

III. Diversas técnicas topológicas en relación con medias generalizadas

En este párrafo nos detendremos en técnicas clásicas de Topología (en su mayoría de Topología Algebraica) para el cálculo de medias generalizadas. En realidad, los resultados que vamos a incluir podrían encajar en la sección anterior de los grupos topológicos, o en la siguiente, de aplicaciones a la Elección Social. Y también, en algún resultado ya expuesto, hemos utilizado técnicas propias de Topología Algebraica. No obstante, hemos querido hacer aquí un resumen, que creemos ilustrativo para quien trabaje en estos temas, de las principales técnicas de Topología Algebraica que se emplean en este contexto de medias generalizadas.

En las construcciones anteriores hemos trabajado, fundamentalmente, con grupos de homotopía. Así ocurre, en general, en la mayoría de los trabajos clásicos sobre el tema (véase, por ejemplo, Aumann [4], Eckmann [25], Enochs [28] o Keesling [32]). Sin embargo, no hay ningún inconveniente en manejar también grupos de homología o de cohomología. Así se hace también en Enochs [28] y en Keesling [32]. Los trabajos clásicos de Chichilnisky [14, 15] y el de Chichilnisky y Heal [22] emplean ambas técnicas (homotopía y homología). Cabe decir que ambas técnicas están claramente relacionadas. Así, ya en el Lema 1 hemos utilizado la identificación entre un grupo fundamental de homotopía y un adecuado grupo de homomorfismos, clásico en homología. Otro resultado de gran utilidad en estas técnicas es el *teorema de isomorfía de Hurewicz* (véase Spanier [41, Th. 5, p. 398]), que establece la isomorfía entre el primero de los grupos de homotopía que sea no trivial, sea éste el k-ésimo, y el correspondiente k-ésimo grupo de homología de una variedad topológica simplemente conexa. Este resultado ha sido ampliamente mencionado y utilizado en los trabajos de Chichilnisky y Heal. Sin embargo, cabe añadir que es posible demostrar el famoso resultado conocido como resolución de la paradoja de la elección social (Chichilnisky y Heal [22]) empleando únicamente técnicas de homotopía, sin mención alguna a la homología. Una demostración de esta naturaleza aparece en Candeal e Induráin [11] y, en esencia, también en Chichilnisky [19]. (Se verá más adelante en el Teorema 5 del presente trabajo.)

Técnicas de Topología Diferencial, fundamentalmente de teoría de foliaciones, fueron empleadas en Chichilnisky [14, 15], donde aparece probado que *ciertos espacios de foliaciones de dimensión infinita no admiten ninguna n-media generalizada topológica*. En general, a esta familia de resultados acerca de la no existencia de n-medias topológicas sobre ciertos espacios topológicos (ya hemos visto otros ejemplos, a saber: las esferas k-dimensionales, que son complejos celulares parafinitos no contractibles) se les conoce como *teoremas de imposibilidad de Chichilnisky*.

También han sido utilizadas técnicas propias de *matemática discreta y combinatoria* para probar *versiones discretas* de los teoremas de imposibilidad anteriores. Una buena muestra aparece en Baigent [7].

Otras técnicas topológicas pasan por considerar adecuadas *topologías cocientes y espacios cociente*. Así, si X es un espacio topológico Hausdorff, encontrar una n-media topológica para X equivale a encontrar una aplicación continua y unánime definida en un espacio Y, que aparece como un cociente de X^n identificando n-uplas que se obtengan una de otra por reordenación. (Con este cociente la condición de anonimato desaparece al venir implícita en la propia construcción del cociente.) Esta simple observación apareció en Baigent [6], y aunque muy sencilla, da lugar a pruebas alternativas no triviales de alguno de los teoremas de imposibilidad de Chichilnisky. Por ejemplo, cuando $n = 2$ y $X = S^1$, el espacio cociente que aparece puede identificarse con una banda de Moebius, y la no existencia de 2-reglas topológicas para este caso se deduce del hecho topológico de que una banda de Moebius no puede deformarse continuamente en su frontera. Toda esta argumentación puede verse en Candeal e Induráin [10]. Argumentaciones parecidas, con un determinado cociente, aparecen también en Chichilnisky [13]. Cabe añadir también que ya en Aumann [4] aparece una prueba de la no existencia de 2-medias topológicas para S^1, con una argumentación completamente distinta, que recuerda a las de la *geometría diferencial intrínseca de curvas*.

Veamos ahora alguna nueva aplicación a grupos topológicos en la que aparecen conceptos nuevos de topología algebraica, como, por ejemplo, grupos de cohomología.

TEOREMA 3. *Sea G un grupo abeliano topológico compacto, conexo y Hausdorff. Entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) *Existe una n-media algebraica para G,*

(ii) *Existe una n-media topológica para G,*

(iii) *Existe una n-media algebraica continua (luego también es n-media topológica) para G,*

(iv) *El grupo de cohomología $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z})$ es n-divisible,*

(v) *El grupo de cohomología $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}_n)$ es trivial,*

(vi) *El grupo dual de Pontryagin de G, $G^\frown$, es n-divisible,*

(vii) *G es n-divisible.*

Hay varias implicaciones que se deducen fácilmente de resultados anteriores. Para una prueba completa véase Keesling [32].

Notas 3. (i) A partir del Teorema 3 podría obtenerse una prueba sencilla del Teorema 2: La existencia de una n-media algebraica o topológica implica que el grupo dual de Pontryagin de G. $G^\frown$. es n-divisible. Ahora bien, si para cualquier $g^\frown \in G^\frown$ y $f \in \mathrm{Hom}(G^\frown, \mathbb{Z})$ ocurriera que $f(g^\frown) \neq 0$, entonces n^p sería divisor de $f(g^\frown)$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Esto es claramente una contradicción. En consecuencia $\mathrm{Hom}(G^\frown, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

(ii) Combinando el Corolario 3 con el Teorema 3, aparecen más equivalencias para el caso de grupos topológicos abelianos, conexos, compactos y Hausdorff que sean complejos celulares parafinitos. Por ejemplo, la existencia de una n-media generalizada (algebraica o topológica) para algún $n > 1$ equivale a la existencia de n-medias para todos los valores de n.

(iii) A partir del Teorema 3 se obtiene la no existencia de n-medias generalizadas (ni algebraicas ni topológicas) sobre la circunferencia unidad S^1, ya que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Se sabe (véase por ejemplo Chichilnisky [15]) que este resultado se generaliza a las esferas S^k $(k > 1)$. Pero ahora, hay que hacer notar que esto ya no se sigue del Teorema 3, ya que tales esferas no son grupos topológicos. Sin embargo, son espacios topológicos conexos, y es bien conocido que los grupos de homotopía $\pi_k(S^k)$ son todos isomorfos al grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$, así que la existencia de una n-media topológica para S^k implicaría la existencia de una n-media algebraica para $(\mathbb{Z}, +)$, que no es n-divisible. Hemos probado así el resultado de imposibilidad que afirma que *no existe ninguna n-media generalizada topológica $(n > 1)$ para S^k $(k > 1)$.* (Véase Aumann [4], Chichilnisky [18], Rasmussen [37] o Candeal e Induráin [11].)

(iv) Existen ejemplos no triviales de grupos topológicos compactos y conexos que admiten una n-media para todo n.

Para ello necesitamos conocer algún resultado previo, como el hecho que afirma que *un grupo topológico abeliano, compacto y Hausdorff es conexo si y sólo si su dual de Pontryagin es libre de torsión* (Rudin [39, p. 47]); el hecho de que *dado un grupo topológico abeliano G conexo, localmente compacto y Hausdorff, su segundo dual de Pontryagin $(G^\frown)^\frown$ es isomorfo, como grupo topológico*, a G (Rudin [39, p, 28]); y finalmente, el hecho de que *si un grupo topológico abeliano, conexo, localmente compacto y Hausdorff G es discreto, entonces su dual de Pontryagin $G^\frown$ es compacto, y si G es compacto, entonces* *su dual de Pontryagin $G^\frown$ es discreto.*

Así, tenemos el grupo aditivo de los númeos racionales $(\mathbb{Q}, +)$ dotado de la topología discreta. Su dual $(\mathbb{Q}$, discreta$)^\frown$ es compacto y, a su vez, su dual $(\mathbb{Q}$, discreta$)$ será libre de torsión. Así, $(\mathbb{Q}$, discreta$)^\frown$ es conexo. Obviamente $(\mathbb{Q}$, discreta$)^{\frown\frown}$, que identificaremos con $(\mathbb{Q}$, discreta$)$, es divisible, luego por el Corolario 1 y el Lema 2 existe una n-media (algebraica y topológica) para $(\mathbb{Q}$, discreta$)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Los resultados del Teorema 3 pueden extenderse al caso de grupos topológicos abelianos, conexos, localmente compactos y Hausdorff. Se tiene así el siguiente resultado:

TEOREMA 4. *Sea G un grupo topológico abeliano, localmente compacto, conexo y Hausdorff. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *Existe una n-media algebraica para G,*

(ii) *Existe una n-media topológica para G,*

(iii) *Existe una n-media algebraica continua (luego también es n-media topológica) para G,*

(iv) *El grupo dual de Pontryagin de G, $G^\frown$, es n-divisible,*

(v) *G es n-divisible.*

Demostración. La clave para la demostración es el hecho siguiente: *Si G es un grupo topológico abeliano, conexo, localmente compacto y Hausdorff, entonces G es isomorfo como grupo topológico al producto directo de un grupo topológico abeliano, compacto, conexo y Hausdorff K, por un número finito de copias de la recta real $\mathbb{R}$ (en otras palabras, G se puede identificar con $K \times \mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$).* (Véase Rudin [39, Th. 2.4.1], o Hewitt y Ross [30, Th 9.14]. Pueden verse también resultados similares en Wu [43].) A partir de aquí la prueba es ya sencilla. ∎

IV. APLICACIONES A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE LA ELECCIÓN SOCIAL

Como ya hemos ido indicando en apartados anteriores, la clave de estas aplicaciones es *la posibilidad de construir modelos de elección social en los que haya resultados de posibilidad*, como es el modelo de elección social de Chichilnisky. Además, bajo condiciones topológicas adecuadas para los modelos económicos *puede decirse cuándo van a existir esos resultados de posibilidad*, a saber: *cuando el espacio de preferencias sea contractible.*

El resultado fundamental, ya comentado anteriormente y conocido como *resolución de la paradoja de la elección social de Chichilnisky y Heal*, es el siguiente:

TEOREMA 5. *Sea X un espacio de preferencias que sea un complejo celular parafinito. Entonces existe una n-media topológica para X, para todo $n \in \mathbb{N}$, si y sólo si X es un espacio topológico contractible.*

Demostración. La implicación directa ha sido ya comentada en el Corolario 3. La prueba de la implicación recíproca, esto es, el hecho de que un espacio contractible admita n-medias topológicas para todos los valores de n, puede verse en Chichilnisky y Heal [22] o en Candeal e Induráin [11]. La idea para esta demostración es considerar X encajado en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espacio de sucesiones de números reales, y tomar la envoltura convexa cerrada $K(X)$ del espacio de preferencias. Se prueba que $K(X)$ es también contractible. Al ser $K(X)$ convexo tiene sentido, para cada valor de n, definir la media convexa de n-uplas de $K(X)$. Puede verse también que $K(X)$ puede deformarse continuamente a X. Se prueba finalmente que la composición de la inclusión de X^n en $[K(X)]^n$, la media convexa de n-uplas de $K(X)$ y la deformación continua de $K(X)$ en X es una n-media topológica sobre X. ∎

Cabe añadir que al ser el resultado anterior una caracterización, *con técnicas de elección social podríamos caracterizar algunos espacios contractibles, en el marco de los complejos celulares parafinitos*: El problema quedaría resuelto si somos capaces de identificar el espacio en cuestión como un adecuado espacio de preferencias en el que sea posible diseñar una regla de elección social continua.

V. COMENTARIOS FINALES

Veamos a continuación una reseña de líneas de investigación abiertas en torno a estos conceptos de medias generalizadas.

A. Una nueva línea, relacionada con Elección Social, consiste en buscar *generalizaciones al caso infinito*, llegando a un concepto de ∞-*medias generalizadas*, algebraicas o topológicas. Aquí resulta también clave el precisar con qué tipo de infinitud se va a trabajar. En el caso de manejar un infinito numerable, llamando $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones con términos en el espacio topológico X, cabe definir un concepto de ∞-media topológica. Sin embargo, para ello hay que precisar qué va a entenderse por respeto del anonimato, y qué tipo de continuidad se va a exigir. La generalización del respeto de la unanimidad no ofrece problemas.

Así, con respecto a la propiedad de anonimato, suele distinguirse entre un anonimato *débil* (considerando reglas de agregación que actuan igual sobre sucesiones que sólo difieren en un número finito de términos), y un anonimato *fuerte* (considerando reglas de agregación que actuan igual sobre sucesiones que se obtengan una de otra por permutación de términos, afecte esta permutación a una cantidad finita o infinita de los mismos). Con respecto al tipo de continuidad, que claramente depende de la topología que se escoge en $X^{\mathbb{N}}$, se observa que la topología producto da malos resultados (no existencia de reglas de agregación), y que resulta más adecuada una *topología uniforme* cuya subbase la constituyan conjuntos que sean producto numerable de abiertos de X: $\Pi_{i\in\mathbb{N}}A_i$, A_i abierto de X para todo $i \in \mathbb{N}$.

Este tema ha sido ampliamente abordado en los artículos de Lauwers [34], Lauwers y van Liedekerke [35] y Efimov y Koshevoy [27].

Una nueva posible generalización, en la línea de lo anterior, consistiría en buscar modelos en los que quepa una cantidad infinita no numerable de factores X. Si en el caso numerable el espacio $X^{\mathbb{N}}$ puede identificarse, conjuntistamente, como el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{N}$ en X, ahora, en el caso continuo, parece oportuno manejar, por ejemplo, espacios de funciones de $\mathbb{R}$ en X con adecuadas topologías. Aunque hay algún trabajo al respecto (véase, por ejemplo, Candeal, Chichilnisky e Induráin [9]), esta última línea está aún bastante abierta.

B. Otras líneas trabajan con aplicaciones que, a primera vista, pueden parecer más inesperadas. Así, por ejemplo, en Lauwers y van Liedekerke [35] se han estudiado conexiones entre esta teoría de medias generalizadas y la *lógica de primer orden*. En el excelente artículo de Chichilnisky [21] se encuentra una amplia gama de nuevas aplicaciones de las medias generalizadas topológicas, que van desde la *Teoría Matemática del Equilibrio General Económico*, hasta la demostración alternativa de teoremas clásicos sobre *puntos fijos*, pasando por nuevos resultados en *Análisis Convexo*.

Baryshnikov [8] da una *unificación topológica entre teoremas de imposibilidad* que podríamos llamar combinatorios derivados del Teorema de Arrow que mencionamos en la introducción, y otros teoremas de imposibilidad derivados del modelo de Chichilnisky. Esta línea de unificación de distintos modelos de elección social tiene algún precedente en Chichilnisky [16] y algunas de las técnicas que se emplean se utilizan también en Chichilnisky [21].

Por último cabe añadir que también se han encontrado aplicaciones de las medias generalizadas a la *Teoría de Juegos* (véase Chichilnisky [20] o Chichilnisky y Heal [23]) y conexiones con la *Teoría de la Medida* (véase Rasmussen [37]).

BIBLIOGRAFÍA

[1] ARROW, K.J., "Social Choice and Individual Values", Yale University Press, New Haven, 1951 (Segunda Edición 1963). ,

[2] AUMANN, G., Aufbau von Mittelwerte mehreren Argumente I, *Math. Annalen* **109** (1933), 235–253.

[3] AUMANN, G., Aufbau von Mittelwerte mehreren Argumente II, *Math. Annalen* **111** (1935), 713–730.

[4] AUMANN, G., Über Raüme mit Mittelbindungen, *Math. Annalen* **119** (1943), 210–215.

[5] BACON, G., Uncoherence in means, *Colloquium Math.* **21** (1970), 211–215.

[6] BAIGENT, N., A reformulation of Chichilnisky's impossibility theorem, *Econ. Letters* **16** (1984), 23–25.

[7] BAIGENT, N., Preference proximity and anonymous social choice, *Quarterly J. of Economics* **102** (1987), 162–169.

[8] BARYSHNIKOV, Y.M., Unifying impossibility theorems: A topological approach, To appear in *Advances in Applied Math.*

[9] CANDEAL, J.C., CHICHILNISKY, G. AND INDURÁIN, E., Topological aggregation of preferences: the case of a continuum of agents, To appear in *Social Choice and Welfare.*

[10] CANDEAL, J.C. AND INDURÁIN, E., The Moebius strip and a social choice paradox, *Econ. Letters* **45** (1994), 407–412.

[11] CANDEAL, J.C. AND INDURÁIN, E., Aggregation of preferences from algebraic models on groups, To appear in *Social Choice and Welfare.*

[12] CANDEAL, J.C., INDURÁIN, E. AND URIARTE, J.R., Some issues related to the topological aggregation of preferences, *Social Choice and Welfare* **9** (1992) 213–227.

[13] CHICHILNISKY, G., On fixed point theorems and social choice paradoxes, *Econ. Letters* **3** (4) (1979), 347–351.

[14] CHICHILNISKY, G., Social choice and the topology of spaces of preferences, *Advances in Math.* **37** (1980), 165–176.

[15] CHICHILNISKY, G., Social aggregation rules and continuity, *Quarterly J. of Economics* **87** (1982), 337–352.

[16] CHICHILNISKY, G., The topological equivalence of the Pareto condition and the existence of a dictator, *J. of Math. Economics* **9** (1982), 223–233.

[17] CHICHILNISKY, G., Von Neumann-Morgenstern utilities and cardinal preferences, *Math. of Operations Research* **10** (1985), 633–641.

[18] CHICHILNISKY, G., "Actions of Symmetry Groups in Social Choice", (Preprint) Columbia University, New York, 1991.

[19] CHICHILNISKY, G., Social choice and the closed convergence topology, *Social Choice and Welfare* **8** (1991), 307–317.

[20] CHICHILNISKY, G., On strategic control, *Quarterly J. of Economics* **108** (1993), 285–290.

[21] CHICHILNISKY, G., Intersecting families of sets and the topology of cones in economics, *Bulletin of the A.M.S.* **29** (1993), 189–207.

[22] CHICHILNISKY, G. AND HEAL, G., Necessary and sufficient conditions for a resolution of the social choice paradox, *J. of Economic Theory* **31** (1983), 68–87.

[23] CHICHILNISKY, G. AND HEAL, G., Patterns of power: Bargaining and incentives in two-person games, *J. of Public Economics* **23** (1984), 333–349.

[24] DEBREU, G., Smooth preferences, *Econometrica* **40** (1972), 603–615.

[25] ECKMANN, B., Raüme mit Mittelbindungen, *Commentarii Mathematici Helvetici* **28** (1954), 329–340.

[26] ECKMANN, B., GANEA, T. AND HILTON, P.J., Generalized means, In "Studies in Mathematical Analysis and Related Topics", Stanford University Press, Stanford, 1962.

[27] EFIMOV, B.A. AND KOSHEVOY, G.A., A topological approach to social choice with infinite populations, *Math. Social Sciences* **27** (1994), 145–157.

[28] ENOCHS, E., Homotopy groups of compact abelian groups, *Proceeding of the A.M.S.* **15** (1964), 878–881.

[29] FOMENKO, A.T., FUCHS, D.B. AND GUTENMACHER, V.L., "Homotopic Topology", Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[30] HEWITT, E. AND ROSS, K.A., "Abstract Harmonic Analysis I", Springer Verlag, Berlin, 1963.

[31] KAPLANSKY, I., "Infinite Abelian Groups", The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1971.

[32] KEESLING, J., The group of homeomorphisms of a solenoid, *Transactions of the A.M.S.* **172** (1972), 119–131.

[33] KELLY, J.S., "Social Choice Theory", Springer Verlag, New York, 1988.

[34] LAUWERS, L., "A Note on Weak ∞-Rules", (Working Paper) Katholieke Universiteit Leuven, 1992.

[35] LAUWERS, L. AND VAN LIEDEKERKE, L., "Ultraproducts and Aggregation", (Working Paper) Katholieke Universiteit Leuven, 1992.

[36] LAUWERS, L. AND VAN LIEDEKERKE, L., "Monotonic Chichilnisky Rules with Infinite Populations", (Working Paper) Katholieke Universiteit Leuven, 1993.

[37] RASMUSSEN, H., "Measure-based Topologies on Spaces of Preferences", (Preprint) C.R.E.B.A. Bergen-Sandviken, Norway, 1992.

[38] ROHLIN, V.A. AND FUCHS, D.B., "Premier Cours de Topologie", Mir, Moscou, 1981.

[39] RUDIN, W., "Fourier Analysis on Groups", John Wiley, New York, 1962.

[40] SIGMON, K., Acyclicity of compact means, *Michigan Math. J.* **16** (1969), 111–115.

[41] SPANIER, E.H., "Algebraic Topology", Mc-Graw Hill, New York, 1966.

[42] WHITEHEAD, J.H.C., Combinatorial homotopy I, and II, *Bulletin of the A.M.S.* **55** (1949), 213–245; 453–496.

[43] WU, S.L., Classification of self-dual torsion-free LCA groups, *Fundamenta Math.* **140** (1992), 255–278.