EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **11**, Núm. 2, 288 – 300 (1996)

Fonctionnelle additive et ellipticité

MEHDI ZAHID

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cadi Ayyad Boulevard Abdelkrim El Khattabi, B.P. 618 Marrakech, Maroc

(Presented by L. Vega)

AMS *Subject Class.* (1991): 60–XX, 31–XX *Received August* 25, 1994

1. Introduction

Dans ce travail, on se donne un processus de Markov standard à trajectoires continues, et une fonctionnelle additive continue telle que $E^x(A_{\tau_D}) < \infty$, on montre que si les fonctions X-harmoniques vérifient la propriété d'ellipticité sur un ouvert D vérifiant $E^x(\tau_D < \infty) = 1$, alors les fonctions (X, A)-harmoniques vérifient aussi cette propriété. Comme application on peut considérer l'opérateur: $L = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}) - \mu$ où les coefficients (a_{ij}) vérifient les propriétés de l'article [10], et μ une mesure positive potentiellement finie; les fonctions L-harmoniques positives dans un domaine borné sont soit strictement positives, ou bien identiquement nulles. Ensuite; on donne un critère de comparaison des fonctions X-harmoniques positives et (X, A)-harmoniques positives. Comme application de ce critère, on montre sous une certaine hypothèse que si les fonctions X-harmoniques positives vérifient l'inégalité de Harnack, alors le résultat est aussi vrai pour les fonctions (X, A)-harmoniques positives.

2. Rappels et définitions

Soit $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ un processus de Markov standard à trajectoires continues ayant $(E, \mathcal{E})$ comme espace des états voir [3], E est supposé localement compact à base dénombrable. Soit (A_t) une fonctionnelle additive continue par rapport au processus (X_t). On donne les définitions suivantes dans Dynkin [8]

DÉFINITION 1. Soit O un ouvert de E, f une fonction localement bornée sur O, alors f sera appelée X-harmonique dans O si et seulement si pour tout

D ouvert relativement compact de O ($\overline{D} \subset O$) on a:

$$E^x(f(X_{\tau_D})) = f(x), \quad \forall x \in D \tag{1}$$

où τ_D est le début du complémentaire de D dans O.

De la même façon on définit les fonctions (X, A)-harmoniques par:

DÉFINITION 2. Soit O un ouvert de E, f une fonction localement bornée sur O, alors f sera appelée (X, A)-harmonique dans O si et seulement si pour tout D ouvert relativement compact de O ($\overline{D} \subset O$) on a:

$$E^x\Big(f(X_{\tau_D})\exp(-A_{\tau_D})\Big) = f(x), \quad \forall x \in D \tag{2}$$

où τ_D est le début du complémentaire de D dans O.

Soit D un ouvert relativement compact de O, où O est un ouvert fixé de E, on supposera dans toute la suite que O vérifie la propriété suivante: $E^x(\tau_O < \infty) = 1$. Par exemple cette propriété est toujours vérifiée si X est un processus de diffusion et O est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, voir [8] et [12].

On pose $\mathcal{S}_\lambda^D f(x) = E^x \int_0^{\tau_D} \exp(-\lambda A_t) f(X_t) dA_t$; on sait d'après [3] que $(\mathcal{S}_\lambda^D)$ est la résolvante associée au noyau $\mathcal{S}^D f(x) = E^x \int_0^{\tau_D} f(X_t) dA_t$. Si $\lambda = 1$ on notera $\mathcal{S}_1^D = \mathcal{P}^D$.

Remarque 3. D'après l'équation résolvante on a:

$$\mathcal{S}^D = \mathcal{P}^D + \mathcal{S}^D\mathcal{P}^D = \mathcal{P}^D + \mathcal{P}^D\mathcal{S}^D. \tag{3}$$

3. FONCTIONNELLE ADDITIVE ET ELLIPTICITÉ

LEMME 4. *Posons pour* $\lambda \in [0, +\infty[$, $\phi(\lambda) = E^x\Big(\exp(-\lambda A_{\tau_D}) f(X_{\tau_D})\Big)$ *pour* f *borelienne bornée positive sur* $\overline{D}$. *Alors* ϕ *est une fonction complètement monotone (donc logarithmiquement convexe).*

Preuve. Remarquons d'abord que d'après [3] on a:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= P_D f(x) - \alpha \mathcal{S}_\alpha^D P_D f(x) \\ &= (I - \alpha \mathcal{S}_\alpha^D) P_D f(x) \end{aligned} \tag{4}$$

où $P_D f(x) = E^x(f(X_{\tau_D}))$, on sait aussi d'après [3] que P_D (pour D ouvert) opère de bO vers bO (bO étant l'ensemble des fonctions boreliennes bornées sur O).

Pour montrer que ϕ est complètement monotone on va faire un raisonnement par récurrence: (voir [7] et [13])

$$\phi'(\lambda) = -\mathcal{S}_\lambda^D P_D f - \lambda(\mathcal{S}_\lambda^D P_D f)'$$

et $(\mathcal{S}_\lambda^D P_D f)' = \lim\limits_{\beta\to\lambda} \frac{\mathcal{S}_\beta^D P_D f - \mathcal{S}_\lambda^D P_D f}{\beta-\lambda} = \lim\limits_{\beta\to\lambda} -\mathcal{S}_\beta^D \mathcal{S}_\lambda^D P_D f = -(\mathcal{S}_\lambda^D)^2 P_D f$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \phi'(\lambda) &= -\mathcal{S}_\lambda^D P_D f + \lambda(\mathcal{S}_\lambda^D)^2 P_D f \\ &= -\mathcal{S}_\lambda^D (I - \lambda\mathcal{S}_\lambda^D) P_D f \\ &= -\mathcal{S}_\lambda^D(\phi(\lambda)) . \end{aligned}$$

On en déduit facilement la formule de récurrence:

$$\phi^{(n)}(\lambda) = n!(-1)^n (\mathcal{S}_\lambda^D)^n (I - \lambda\mathcal{S}_\lambda^D) P_D f .$$

D'où ϕ est complètement monotone sur $[0, +\infty[$. ∎

LEMME 5. *Supposons que la fonctionnelle additive (A_t) vérifie l'hypothèse $E^x(A_{\tau_D}) < \infty$ où D est un ouvert relativement compact dans O ($\overline{D} \subset O$), et soit f une fonction borelienne bornée positive sur $\overline{D}$; et posons $Q_D f(x) = E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D}) f(X_{\tau_D})\Big)$, alors on a l'inégalité suivante:*

$$\forall\, x \in D,\ Q_D f(x) \geq P_D f(x) \exp\Big[- \mathcal{S}^D(P_D f)(x)/P_D f(x)\Big] . \qquad (5)$$

Preuve. D'après le lemme 1, puisque ϕ est complètement monotone sur $[0, +\infty[$, elle est logarithmiquement convexe (voir [9]), donc on a:

$$\phi(1) \geq \phi(0) \exp(\phi'(0)/\phi(0))$$

où $\phi'(0)$ désigne la dérivée à droite de ϕ en 0. Or on a:

$$\begin{aligned} \phi(1) &= E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D}) f(X_{\tau_D})\Big) = Q_D f(x) \\ \phi(0) &= E^x(f(X_{\tau_D})) = P_D f(x) \\ \phi'(0) &= -\mathcal{S}^D(P_D f)(x) . \end{aligned}$$

En effet:

$$\phi'(\lambda) = -\mathcal{S}^D(P_D f) + \lambda\left(\mathcal{S}^D\right)^2 P_D f$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \phi'(\lambda) = -\mathcal{S}_\lambda^D\left(I - \lambda\mathcal{S}_\lambda^D\right) P_D f = -\mathcal{S}_\lambda^D(\phi(\lambda)) \\ &\Longrightarrow \phi'(0) = -\mathcal{S}^D(\phi(0)) = -\mathcal{S}^D(P_D f)(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

THÉORÈME 6. *Soit O un ouvert de E vérifiant la propriété suivante: "$\exists\, D_n$ une suite d'ouverts relativement compacts dans O telle que $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ et $O = \bigcup_n D_n$; et pour tout n dans $\mathbb{N}$ les fonctions X-harmoniques ≥ 0 dans D_n sont soit strictement positives ou bien identiquement nulles sur D_n." Si (A_t) est une fonctionnelle additive telle que $E^x(A_{\tau_O}) < \infty$, $\forall\, x \in O$. Alors toute fonction (X, A)-harmonique positive dans O est soit strictement positive ou bien identiquement nulle sur O.*

Preuve. Soit u une fonction (X, A)-harmonique positive dans O, et soit $x \in O$ tel que $u(x) = 0$; soit D_n un ouvert de la suite ci-dessus qui contient x, puisque u est localement bornée dans $O \Longrightarrow u_{|\overline{D_n}}$ est bornée, posons alors $f = u_{|\overline{D_n}}$, d'après le lemme 5, on a:

$$\forall\, x \in D_n,\ Q_{D_n} f(x) \geq P_{D_n} f(x) \exp\Big[- \mathcal{S}^{D_n}(P_{D_n} f)(x)/P_{D_n} f(x)\Big]$$

or u est (X, A)-harmonique donc

$$Q_{D_n} f(x) = E^x\Big(\exp(-A_{\tau_{D_n}})u(X_{\tau_{D_n}})\Big) = u(x) = 0\,.$$

Donc ou bien $P_{D_n} f(x) = 0$ ou $\exp\Big[- \mathcal{S}^{D_n}(P_{D_n} f)(x)/P_{D_n} f(x)\Big] = 0$, or si $P_{D_n} f(x) \neq 0$ alors $\mathcal{S}^{D_n}(P_{D_n} f)(x) \leq (\sup_{D_n} P_{D_n} f)$. $E^x\left(A_{\tau_{D_n}}\right) < \infty$, donc l'exponentielle ne s'annule pas en x, d'où nécessairement $P_{D_n} f(x) = 0$, or d'après Dynkin Th. II p. 25 [8], $P_{D_n} f$ est une fonction X-harmonique dans D_n d'où d'après l'hypothèse faite sur O

$$P_{D_n} f(x) = 0, \quad \forall\, x \in D_n$$

mais on a $P_{D_n} f(x) = E^x(f(X_{\tau_{D_n}})) \geq Q_{D_n} f(x) = u(x)$ donc $u(x) = 0$, $\forall\, x \in D_n$. Puis en faisant tendre n vers $+\infty$ on trouve $u = 0$ sur O tout entier. ∎

EXEMPLE 1. On considère l'opérateur $L = \frac{1}{2}\Delta - \mu$ (où μ est une mesure positive potentiellement finie), opérateur qui a déjà été étudié par Feyel et de la Pradelle voir [9]. On rappelle la définition et proposition suivantes dans [9].

DÉFINITION 7. Soit u une fonction $(\sigma + \mu)$-localement intégrable dans un ouvert O. On dira que u est L-harmonique, si et seulement si u est finement continue, et $Lu = 0$ au sens des distributions. (σ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$).

Soit X_t le mouvement brownien associé à l'étude du Laplacien.

PROPOSITION 8. *Si u est localement bornée dans O alors on a les équivalences suivantes:*

(1) *u est L-harmonique dans O;*

(2) *Pour tout ouvert relativement compact D de O / $\overline{D} \subset O$ on a:*

$$E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D})u(X_{\tau_D})\Big) = u(x), \quad \forall x \in D$$

où A_t est la fonctionnelle additive associée à la mesure μ, et τ_D est le début du complémentaire de D.

(3) $\exp(-A_t)u(X_t)$ *est une martingale locale sur l'intervalle stochastique* $[0, \tau_O[$.

En appliquant le théorème précédent on retrouve un résultat dans [9].

PROPOSITION 9. *Si O est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ (d'après Dynkin $E^x(\tau_O < \infty) = 1$) et μ est potentiellement finie, c'est-à-dire $G_\mu(x) = E^x(A_{\tau_O}) < \infty$, $\forall x \in O$. Alors toute fonction L-harmonique positive dans O est soit > 0 ou bien identiquement nulle dans O.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème en remarquant que O peut s'écrire sous la forme $O = \bigcup_n D_n$, $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$ et D_n un ouvert relativement compact connexe, et utiliser le fait que les fonctions Δ-harmoniques ≥ 0 sur un connexe borné, sont soit strictement positives ou bien identiquement nulles. ∎

EXEMPLE 2. Si X_t est un processus de diffusion associé à un opérateur elliptique L sur $\overline{D}$, où D est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. A_t une fonctionnelle additive continue par rapport à X_t telle que $E^x(A_{\tau_D}) < \infty$, $\forall x \in D$. On définit les fonctions X-harmoniques et (X, A)-harmoniques comme au début de l'article. Et comme pour les diffusions on a toujours $E^x(\tau_D < \infty) = 1$ pour tout domaine borné on a la proposition suivante:

PROPOSITION 10. *Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, alors toute fonction (X, A)-harmonique positive sur D est soit strictement positive sur D, ou bien identiquement nulle sur D.*

Remarque 11. Si A_t est la fonctionnelle additive associée à une mesure de Radon, potentiellement finie et négligeant les semi-polaires de X_t, et si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Alors les fonctions $(\frac{1}{2}L - \mu)$-harmoniques positives sur D, sont soit strictement positives, ou bien identiquement nulles sur D.

EXEMPLE 3. D'une manière générale, soit E un espace harmonique fort voir H.Bauer [2] elliptique telle que 1 soit hyperharmonique. Alors d'après [2] il existe un processus de Hunt à trajectoires continues $X = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$, tel que les fonctions hyperharmoniques positives coïncident avec les fonctions X-excessives.

PROPOSITION 12. *f est harmonique dans O si et seulement si pour tout ouvert relativement compact D dans O ($\overline{D} \subset O$) on a:*

$$E^x\Big(f(X_{\tau_D})\,;\,\tau_D < \infty\Big) = f(x), \quad \forall\, x \in D\,.$$

Preuve. Il suffit de remarquer d'après [2] que la mesure harmonique relative à un ouvert D s'écrit sous la forme $E^x\Big(f(X_{\tau_D})\,;\,\tau_D < \infty\Big) = \rho_x^D(f)$. ∎

Soit A_t une fonctionnelle additive par rapport à X_t tel que $E^x(A_{\tau_D}) < \infty$, $\forall\, x \in O$, (condition qui se réduit à $G_\mu < \infty$ si l'espace harmonique E admet une fonction de Green dans O, et si A_t est la fonctionnelle additive associée à μ). Alors on a la proposition suivante:

PROPOSITION 13. *Si O est un ouvert connexe tel que $E^x(\tau_D < \infty) = 1$, et si E est localement connexe, localement compact à base dénombrable. Alors les fonctions (X, A)-harmoniques positives dans O sont soit strictement positives, ou bien identiquement nulles sur O.*

Preuve. Il suffit d'écrire $O = \bigcup_n D_n$ où les D_n sont connexe relativement compact et $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$, ensuite utiliser le théorème 6 et le fait que E est un espace harmonique elliptique. ∎

4. COMPARAISON DES MESURES HARMONIQUES P_D ET Q_D

Soit D un ouvert relativement compact tel que $\overline{D} \subset O$ et $E^x(A_{\tau_D}) < \infty$, $\forall\, x \in D$, alors on a la proposition suivante:

PROPOSITION 14. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $\exists\, c > 0$, $\forall\, f$ *borelienne bornée positive sur $\overline{D}$ on a:*

$$Q_D f(x) \le P_D f(x) \le c Q_D f(x), \quad \forall\, x \in D \tag{6}$$

(2) $\exists\, c > 0$, $\forall\, f$ *borelienne bornée positive sur* $\overline{D}$ *on a*:

$$\mathcal{S}^D(P_D f)(x) \leq c P_D f(x), \quad \forall\, x \in D \tag{7}$$

Preuve. [$\Longrightarrow$] D'après (1) $\exists\, c > 0$, $\forall\, f$ borelienne bornée positive sur $\overline{D}$ on a: $P_D f \leq c Q_D f$, et puisque $\mathcal{S}^D$ est un noyau positif $\mathcal{S}^D P_D f \leq c \mathcal{S}^D Q_D f$, mais $Q_D f = P_D f - \mathcal{S}_1^D(P_D f)$ donc $\mathcal{S}^D(Q_D f) = \mathcal{S}^D(P_D f) - \mathcal{S}^D \mathcal{S}_1^D(P_D f)$.

$$\Longrightarrow \mathcal{S}^D(P_D f) \leq c\Big[\mathcal{S}^D(P_D f) - \Big(\mathcal{S}^D(P_D f) - \mathcal{S}_1^D(P_D f)\Big)\Big]$$

car $\mathcal{S}^D \mathcal{S}_1^D(P_D f) = \mathcal{S}^D(P_D f) - \mathcal{S}_1^D(P_D f)$ (équation résolvante).

$$\Longrightarrow \mathcal{S}^D(P_D f) \leq c \mathcal{S}_1^D(P_D f) \leq c P_D f$$

cette dernière inégalité est vraie, car $P_D f$ est $(\mathcal{S}_\lambda^D)$-surmédiane, c'est-à-dire $\lambda \mathcal{S}_\lambda^D P_D\, f \leq P_D f$, $\forall\, \lambda > 0$, en effet, il suffit de remarquer que $P_D f - \lambda \mathcal{S}_\lambda^D P_D f$ $= Q_D f$ qui est positive puisque f l'est aussi.

[$\Longleftarrow$] On peut prendre les $x \in D \;\; / \;\; P_D f(x) > 0$, pour les autres, il n'y a rien à démontrer.

D'après le lemme 2 on a:

$$\forall\, x \in D,\ Q_D f(x) \geq P_D f(x) \exp\Big[-\mathcal{S}^D(P_D f)(x)/P_D f(x)\Big]$$

or d'après (2) $\mathcal{S}^D(P_D f)(x)/P_D f(x) \leq c$ où c ne dépend que de D

$$Q_D f(x) \geq P_D f(x) e^{-c}.$$

D'où le résultat. ∎

EXEMPLE 4. Dans le cas de l'opérateur $L = \frac{1}{2}\Delta - \mu$, la proposition précédente peut se résumer à:

PROPOSITION 15. *Les propriétés suivantes sont équivalentes si* μ *est potentiellement finie et* D *borné*:

(1) $\rho_{\cdot}^D$ *et* $\overline{\rho}_{\cdot}^D$ *sont comparables, c'est-à-dire* $\exists\, c > 0 \quad \rho_x^D \leq \overline{\rho}_x^D \leq c \rho_x^D$, $\forall\, x \in D$ *où* ρ_x^D *désigne la mesure* L*-harmonique dans* D *en* x *et* $\overline{\rho}_x^D$ *celle de* Δ *dans* D *en* x.

(2) $\exists\, k > 0$, $\forall\, f$ *borelienne bornée positive sur* ∂D *frontière de* D, *on a*

$$E^x \int_0^{\tau_D} \overline{\rho}_x^D(f)(X_t) dA_t = G(\overline{\rho}_x^D(f) \cdot \mu) \leq k \overline{\rho}_x^D(f), \quad \forall\, x \in D. \tag{8}$$

Pour le théorème suivant, on suppose que A_t vérifie l'hypothèse "$E^x(A_{\tau_O}) < \infty, \forall x \in O$". Alors on a:

THÉORÈME 16. *Les deux proprietés suivantes sont équivalentes*:

(1) $\exists c > 0, \forall f$ *X-harmonique positive dans* O :

$$\mathcal{S}^D f(x) \leq cf(x), \quad \forall x \in D \tag{9}$$

(2) $\exists k > 0, \forall f$ *X-harmonique positive dans* O : $\exists \tilde{f}$ (X, A)*-harmonique positive dans* D *telle que*:

$$\tilde{f}(x) \leq f(x) \leq k\tilde{f}(x), \quad \forall x \in D. \tag{10}$$

(*En effet on peut prendre*: $\tilde{f}(x) = E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D}) f_{|\overline{D}}(X_{\tau_D})\Big)$).

Preuve. [$\Longrightarrow$] Soit f X-harmonique positive dans O et posons

$$\tilde{f}(x) = E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D}) f_{|\overline{D}}(X_{\tau_D})\Big)$$

montrons d'abord que $\tilde{f}$ est (X, A)-harmonique dans D. Remarquons d'abord que $\tilde{f}(x) = (I - \mathcal{S}_1^D)(f_{|\overline{D}}) = (I - \mathcal{P}^D)(f_{|\overline{D}})$, de la même façon que dans [14] (pp. 224,225) on a la démonstration suivante:
montrons que $E^x\Big(\exp(-A_S)(I - \mathcal{P}^D) f(X_S)\Big) = (I - \mathcal{P}^D) f(x)$, $\forall S = \tau_U$, U relativement compact dans D. En effet on a: $E^x\Big(\exp(-A_S)(I - \mathcal{P}^D) f(X_S)\Big) = E^x\Big(\exp(-A_S) f(X_S)\Big) - E^x\Big(\exp(-A_S)\mathcal{P}^D f(X_S)\Big)$, or on a $\exp(-A_S)\mathcal{P}^D f(X_S) = \exp(-A_S) E^{X_S} \int_0^{\tau_D} \exp(-A_t) f(X_t)\, dA_t$, on utilise la propriété de Markov forte, et on trouve:

$$\begin{aligned}
&\exp(-A_S)\mathcal{P}^D f(X_S) \\
&\qquad = \exp(-A_S) E_S \int_0^{+\infty} M_u \circ \theta_S f(X_u \circ \theta_S) \exp(-A_u \circ \theta_S)\, dA_{u+S} \\
&\qquad = E_S \int_S^{\tau_D} \exp(-A_t) f(X_t)\, dA_t \\
&\qquad = E_S \int_0^{\tau_D} \exp(-A_t) f(X_t)\, dA_t - E_S \int_0^{S} \exp(-A_t) f(X_t)\, dA_t
\end{aligned}$$

où E_S désigne l'opérateur espérence conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{M}_S$, et M_u l'indicatrice de l'intervalle $[0, \tau_D[$. Donc

$$E^x\Big(\exp(-A_S)(I-\mathcal{P}^D)f(X_S)\Big) = E^x\Big(\exp(-A_S)f(X_S)\Big) - \mathcal{P}^D f(x) + E^x \int_0^S \exp(-A_t)f(X_t)\,dA_t$$

mais on a

$$\begin{aligned} E^x\Big(\exp(-A_S)f(X_S) + \int_0^S \exp(-A_u)f(X_u)\,dA_u\Big) \\ = E^x\Big(\exp(-A_S)f(X_S)\Big) + E^x \int_0^S \exp(-A_u)\,df(X_u) \\ - E^x \int_0^S d(\exp(-A_u)f(X_u))\,. \end{aligned}$$

Ceci est vrai grâce à la formule d'Itô (voir [6]). Donc

$$\begin{aligned} E^x\Big(\exp(-A_S)(I-\mathcal{P}^D)f(X_S)\Big) &= E^x\Big(\int_0^S e^{-A_t}\,df(X_t) + f(X_0)\Big) - \mathcal{P}^D f(x) \\ &= f(x) + E^x \int_0^S e^{-A_t}df(X_t) - \mathcal{P}^D f(x)\,. \end{aligned}$$

Mais on a:

$$E^x \int_0^S \exp(-A_t)df(X_t) = E^x \int_0^{\tau_U} \exp(-A_t)df(X_t) = 0, \qquad \text{où } S = \tau_U\,;$$

en effet:

$$\begin{aligned} E^x \int_0^{\tau_U} \exp(-A_t)df(X_t) &= E^x \int_0^{\tau_U} \exp(-A_t)f(X_t)dA_t \\ &\quad + E^x \int_0^{\tau_U} d\Big(\exp(-A_t)f(X_t)\Big) \\ &= \mathcal{P}^U f(x) + E^x\Big(\exp(-A_{\tau_U})f(X_{\tau_U})\Big) - f(x) \end{aligned}$$

or d'après (4) on a:

$$E^x\Big(\exp(-A_{\tau_U})f(X_{\tau_U})\Big) = P_U f(x) - \mathcal{P}^U P_U f(x) = f(x) - \mathcal{P}^U f(x)$$

car f est X-harmonique dans O $(P_U f(x) = f(x))$; d'où

$$E^x \int_0^{\tau_U} \exp(-A_t)df(X_t) = \mathcal{P}^U f(x) - f(x) - \mathcal{P}^U f(x) + f(x) = 0\,.$$

D'où finalement $Q_D(I - \mathcal{P}^D)f = Q_D f$.

D'après le lemme 5 on a:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= E^x\Big(\exp(-A_{\tau_D})f_{|\overline{D}}(X_{\tau_D})\Big)\\ &\geq f(x)\exp\Big[-\mathcal{S}^D(f)(x)/f(x)\Big]\\ &\geq f(x)e^{-c}\end{aligned}$$

donc (2) est vérifiée.

[$\Longleftarrow$] Soit f X-harmonique positive dans O et soit $\tilde{f}$ comme plus haut, d'après (2) $f(x) \leq k\tilde{f}(x)$, $\forall\, x \in D$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^D f(x) &\leq k\mathcal{S}^D\tilde{f}(x)\\ &\leq k\Big(\mathcal{S}^D(I - \mathcal{S}_1^D)f(x)\Big)\\ &= k\Big(\mathcal{S}^D f(x) - \mathcal{S}^D\mathcal{S}_1^D f(x)\Big)\end{aligned}$$

or d'après l'équation résolvante on a $\mathcal{S}^D\mathcal{S}_1^D = \mathcal{S}^D - \mathcal{S}_1^D$, d'où il reste

$$\mathcal{S}^D f(x) \leq k\mathcal{S}_1^D f(x) \leq kf(x)$$

cette dernière inégalité est vraie car f est surmédiane pour $(\mathcal{S}_\lambda^D)$. ∎

Pour le théorème suivant, on suppose que $\mathcal{S}^O(1)$ est localement bornée:

THÉORÈME 17. *Les deux proprietés suivantes sont équivalentes*:

(1) $\exists\, c > 0$, $\forall\, f$ *X-harmonique positive dans O* :

$$\mathcal{S}^D f(x) \leq cf(x), \quad \forall\, x \in D \tag{11}$$

(2) $\exists\, k > 0$, $\forall\, g$ *(X, A)-harmonique positive dans O* : $\exists\, \tilde{g}$ *X-harmonique positive dans D telle que:*

$$g(x) \leq \tilde{g}(x) \leq kg(x), \quad \forall\, x \in D\,. \tag{12}$$

(*En effet on peut prendre*: $\tilde{g}(x) = E^x(g_{|\overline{D}}(X_{\tau_D}))$).

D'où l'en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 18. *Si on suppose que $\mathcal{S}^O(1)$ est une fonction bornée, et que les fonctions X-harmoniques positives vérifient l'inégalité de Harnack faible dans l'ouvert O, alors on a la même propriété pour les fonctions (X,A)-harmoniques positives dans O.*

Preuve. Soit K un compact dans O, prenons D relativement compact dans O telle que $K \subset D \subset \overline{D} \subset O$. Vérifions que le (1) du théorème précédent est vérifié: soit donc h une fonction X-harmonique positive dans O, puisque h est bornée sur $\overline{D}$, on a:

$$\mathcal{S}^D h(x) \leq \mathcal{S}^D(1) \sup_{x\in\overline{D}} h(x) \leq \mathcal{S}^O(1)\, c \inf_{x\in\overline{D}} h(x) \leq C h(x), \quad \forall x \in D.$$

Où c est la constante donnée par l'inégalité de Harnack pour les X-harmoniques positives dans O. Donc d'après le théorème précédent on a: $\exists\, k > 0$, $\forall\, g$ (X,A)-harmonique positive dans O, $\exists\, \tilde{g}$ X-harmonique positive dans D telle que

$$g(x) \leq \tilde{g}(x) \leq k g(x), \quad \forall x \in D\,.$$

d'où:

$$\sup_{x\in K} g(x) \leq \sup_{x\in K} \tilde{g}(x) \leq c \inf_{x\in K} \tilde{g}(x) \leq ck \inf_{x\in K} g(x)\,.$$

où c, k ne dépendent ni de g ni de $\tilde{g}$. ∎

Application 1. Si on prend le laplacien perturbé par une mesure de Radon positive, alors on a:

Corollaire 19. *Soit O un domaine borné, si $\mathcal{S}^O(1) = G^O(\mu)$ est bornée (G^O est le noyau de Green associé au laplacien dans O), alors pour tout compact K de O $\exists\, c > 0$ telle que $\forall\, u$ $(\frac{1}{2}\Delta - \mu)$-harmonique positive dans O, on a:*

$$\sup_{x\in K} u(x) \leq c \inf_{x\in K} u(x)\,.$$

On retrouve ainsi le théorème 22 dans [9].

Application 2. Si on prend $\mathcal{A}u = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$ où (a_{ij}) vérifient les hypothèses de [10]; alors on a le corollaire suivant:

Corollaire 20. *Soit O un domaine borné, si $\mathcal{S}^O(1) = G^O(\mu)$ est bornée (G^O est le noyau de Green associé à l'opérateur $\mathcal{A}$ dans O), alors pour tout* *compact K de O $\exists c > 0$ telle que $\forall u$ $(\mathcal{A}-\mu)$-harmonique positive dans O, on a:*

$$\sup_{x\in K} u(x) \leq c \inf_{x\in K} u(x)\,.$$

où les fonctions $(\mathcal{A}-\mu)$-harmoniques sont les solutions locales de $\mathcal{A}-\mu$ au sens des distributions.

Dans ces deux exemples, on a vérifié l'inégalité de Harnack faible, en supposont seulement que μ est potentiellement bornée, qui est une hypothèse très faible; voir [1], [4], [5] et [11].

Références

[1] Aizenman, A., Simon, B., Brownian motion and Harnack's inequality foı Schrödinger operators, *Comm. Pur. Appl. Math.* **35** (1982), 209–273.

[2] Bauer, H., "Harmonic spaces and associated Markov processe", CIME (1969), 25–67 (cours d'été de Streasa 1969).

[3] Blumenthal, R.M., Getoor, R.K., "Markov Processes and Potential Theory", Academic Press, 1968.

[4] Chiarenza, F., Fabes, E., Garofalo, N., Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), 415–425.

[5] Cranston, M., Fabes, E., Zhao, Z., Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **307** (1988), 171–194.

[6] Dellacherie, C., Meyer, P.A., "Théorie des martingales", A.S.I. 1385, Hermann, Paris, 1980.

[7] Dellacherie, C., Meyer, P.A., "Théorie du potentiel associée à une résolvante", A.S.I. 1417, Hermann, Paris, 1987.

[8] Dynkin, E.B., "Markov Processes, Vol II", Springer-Verlag, 1965.

[9] Feyel, D., de la Pradelle, A., Etude de l'équation $\frac{1}{2}\Delta u - u\mu = 0$ où μ est une mesure positive, *Ann. Inst. Fourier* **38** (3) (1988), 199–218.

[10] Hervé, R.M., Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) = 0$, *Ann. Inst. Fourier* **14** (2) (1964), 493–508.

[11] Kurata, K., Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic differential equations of second order, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 411–440.

[12] Øksendal, B., "Stochastic Differential Equations", Springer-Verlag.

[13] Meyer, P.A., "Probabilités et potentiel", A.S.I. 1318, Hermann, Paris, 1966.

[14] ZAHID, M., Perturbation de processus de Markov par des mesures positives, *Stochastics and Stochastics reports* **35** (1991), 215–231.