EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 1, 95 – 105 (1998)

Application de la Théorie d'Extrapolation pour la Résolution des Équations Différentielles à Retard Homogènes

B. Amir et L. Maniar

Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Marrakech, Maroc.
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech, Maroc

(Research paper presented by L. Vega)

AMS *Subject Class.* (1991): 47D06, 34G10, 34K15 *Received March* 13, 1996

1. Introduction

Le but de ce travail est de résoudre l'équation différentielle à retard suivante

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = Lx_t \\ x_0 = \varphi \in C := C([-r,0]\,;\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

(L étant un opérateur linéaire borné de C dans $\mathbb{R}^n$), en la considérant comme "perturbation" de l'équation "triviale" suivante :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = 0 \\ x_0 = \varphi \in C := C([-r,0]\,;\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

dont la solution est connue explicitement.

La résolution se fait moyennant un résultat de la théorie d'extrapolation pour les opérateurs de Hille-Yosida, qu'on présente dans la section 2. Dans la section 3, on montre que le semi-groupe solution de (1) peut être exprimé, par une formule de la variation de la constante, comme perturbation bornée du semi-groupe solution de (2).

2. Notion d'extrapolation pour les opérateurs de Hille-Yosida

Dans cette section on donne quelques définitions et résultats importants. Pour plus de détail on donne comme références [1], [5], [6] et [9].

Soient $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et A un opérateur de Hille-Yosida de X dans X à domaine $D(A)$ non nécessairement dense.

On pose $X_0 = \overline{D(A)}$. On a le résultat suivant (cf. [4])

Proposition 1. *La part A_0, de l'opérateur A, défini par*

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}, \qquad A_0 x = Ax \quad \text{pour } x \in D(A_0),$$

engendre dans X_0 un C_0-semi-groupe $(T_0(t))_{t\geq 0}$. De plus $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A_0)^{-1}$ est la restriction de $(\lambda I - A)^{-1}$ dans X_0; ($\rho(A)$ étant l'ensemble résolvent de A).

Pour simplifier la présentation de cette notion d'extrapolation, on suppose que $\rho(A)$ contient 0. On peut toujours se ramener à un tel cas, en considérant l'opérateur $(A - \lambda I)$, $\lambda \in \rho(A)$. On munit X_0 de la norme suivante : $\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1}x\|$.

Définition 2. On appelle espace d'extrapolation associé à A_0, noté X_{-1}, le complété de l'espace $(X_0, \|.\|_{-1})$.

L'espace $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$ est dense dans X_{-1}, et on a pour tout $t \geq 0$, l'estimation

$$\|T_0(t)x\|_{-1} = \|A_0^{-1}T_0(t)x\| = \|T_0(t)A_0^{-1}x\| \leq M \|x\|_{-1};$$

donc, pour tout $t \geq 0$, $T_0(t)$ se prolonge d'une façon unique sur X_{-1}, en un opérateur linéaire borné noté $T_{-1}(t)$. On a alors le théorème important suivant (cf.[6]).

Théorème 3. *La famille d'opérateurs $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe dans X_{-1}. Soit A_{-1} son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) $\|T_{-1}(t)x\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \|T_0(t)x\|_{\mathcal{L}(X_0)}, \quad t \geq 0.$

(ii) $D(A_{-1}) = (X_0, \|.\|_{-1})$.

(iii) *A_{-1} est le prolongement unique de A_0 dans X_0, de plus ce prolongement est une isométrie de X_0 dans X_{-1}.*

(iv) $(A_{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1})$.

Définition 4. Le C_0-semi-groupe $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe d'extrapolation de $(T_0(t))_{t\geq 0}$.

En munissant X de la norme $\|x\|_{-1} = \|A^{-1}x\|$, le résultat suivant montre que l'espace X est un espace intermédiaire entre X_0 et X_{-1}.

PROPOSITION 5. *X_0 est un sous-espace dense de $(X, \|\cdot\|_{-1})$ et l'injection de X dans X_{-1} est continue. De plus A_{-1} est une extension de A, et $(A_{-1})^{-1}X = D(A)$.*

Preuve. En effet, soit $x \in X$, alors $A^{-1}x \in D(A)$. Pour $\varepsilon \succ 0$ il existe $x_\varepsilon \in D(A_0)$ tel que $\|x_\varepsilon - A^{-1}x\| \leq \varepsilon$. On a $\|x_\varepsilon - A^{-1}x\| = \|Ax_\varepsilon - x\|_{-1}$, et $Ax_\varepsilon \in X_0$, d'où X_0 est dense dans $(X, \|\cdot\|_{-1})$. On déduit que l'espace d'extrapolation X_{-1} est aussi le complété de $(X, \|\cdot\|_{-1})$, par suite X s'injecte d'une façon continue dans X_{-1}.

D'autre part, soit $x \in D(A)$, A_0 étant générateur d'un C_0-semi-groupe dans X_0, il existe une suite $(x_n)_n \subset D(A_0)$ telle que $\| x_n - x\| \to 0$;mais $\|x_n - x\| = \|A_{-1}x_n - Ax\|_{-1}$ (A_{-1} est une isométrie de X_0 dans X_{-1}), et comme A_{-1} est fermé, on a $A_{-1}x = Ax$; d'où $x \in (A_{-1})^{-1}X$. ∎

Soit B un opérateur borné de X_0 dans X. Le résultat important suivant (cf. [6],[7]) est une généralisation du théorème de perturbation bornée d'un opérateur générateur d'un C_0-semi-groupe :

THÉORÈME 6. *L'opérateur $A + B$, avec $D(A + B) = \{x \in D(A) \colon Ax + Bx \in X_0\}$, est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans X_0, donné par la série de Dyson-Phillips*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(V_A^B)^n T_0\right](t)$$

ou par la formule de Duhamel

$$S(t) = T_0(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s)BS(s)ds$$

où $(V_A^B T_0)(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)BT_0(s)ds$, $(T_0(t))_{t\geq 0}$ étant le C_0-semi-groupe généré par A_0 et $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ son semi-groupe d'extrapolation.

Pour la démonstration on peut voir [6].

3. Résolution d'une équation différentielle à retard homogène par extrapolation

Considérons les équations différentielles à retard homogènes (1) et (2) de la section 1; la solution de l'équation (2) est connue explicitement, son semi-groupe solution $(T_0(t))_{t\geq 0}$ est donné par (cf. [3])

$$T_0(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta \leq 0 \\ \varphi(0) & \text{si} \quad t+\theta \geq 0 \end{cases}$$

de générateur infinitésimal A_0 défini par

$$D(A_0) = \left\{\varphi \in C^1, \varphi'(0) = 0\right\}, \quad A_0(\varphi) = \varphi'$$

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe solution de (1) (cf. [3]).

L'équation (1) peut être considérée comme "perturbation" de l'équation "triviale" (2), de la manière suivante :

On se place dans l'espace de Banach $X = \mathbb{R}^n \times C$ muni de la norme $\|(\cdot,\cdot)\|_X = |\cdot| + \|\cdot\|_\infty$; le problème de Cauchy associé à l'équation (1) est donné, dans X, par :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_L \begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u(0)(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in C, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & \dfrac{d}{d\tau} \end{pmatrix}, \; D(\mathcal{A}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} \in X, \psi \in C^1 \right\}.$$

On remarque que $\mathcal{A}_L$ s'écrit dans son domaine sous la forme :

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ est l'opérateur borné donné par

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d}{d\tau} \end{pmatrix}, \; D(\mathcal{A}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} ; \psi \in C^1 \right\}.$$

PROPOSITION 7. *Les opérateurs $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_L$ sont des opérateurs de Hille-Yosida.*

Preuve. En effet, on montre par une récurrence sur n, que pour tout $\lambda \succ 0$ et pour tout $(c, g) \in X$

$$((\lambda I - \mathcal{A}_1)^{-1})^n (c, g) = (\frac{c}{\lambda^n}, \varphi_n), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

où

$$\varphi_n(\theta) = ce^{\lambda\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} + \int_\theta^0 \int_{s_1}^0 ... \int_{s_{n-1}}^0 e^{\lambda(\theta-\tau)} g(\tau) d\tau ds_{n-1} ... ds_1.$$

On a

$$\left\| ((\lambda I - \mathcal{A}_1)^{-1})^n (c, g) \right\|_X \leq \frac{|c|}{\lambda^n} + |c| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} + \|g\|_\infty \cdot F(\theta)$$

avec

$$F(\theta) = \int_\theta^0 \int_{s_1}^0 ... \int_{s_{n-1}}^0 e^{\lambda(\theta-\tau)} g(\tau) d\tau ds_{n-1} ... ds_1.$$

En calculant $F(\theta)$ on trouve

$$F(\theta) = e^{\lambda\theta} \left(\frac{1}{\lambda^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} \right),$$

on a alors l'estimation

$$\left\| ((\lambda I - \mathcal{A}_1)^{-1})^n (c, g) \right\|_X \quad \leq \quad \frac{2}{\lambda^n} (|c| + \|g\|_\infty).$$

On conclut que $\mathcal{A}_1$ est un opérateur de Hille-Yosida, comme $\mathcal{A}_L$ est une perturbation bornée de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_L$ est aussi de Hille-Yosida (cf.[4]). ∎

Posons

$$X_0 = \overline{D(\mathcal{A}_1)},$$

alors

$$X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix}, \psi \in C \right\}.$$

Notons $\mathcal{A}_0$ la part de $\mathcal{A}_1$ dans X_0 et $\mathcal{A}_{L,0}$ celle de $\mathcal{A}_L$. On a

$$D(\mathcal{A}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} \in X : \psi'(0) = 0 \right\}$$

$$\mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi' \end{pmatrix}$$

et

$$D(\mathcal{A}_{L,0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} \in X, \psi \in C^1, \psi'(0) = L\psi \right\}$$

$$\mathcal{A}_{L,0} \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(0) \\ \psi' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_{L,0}).$$

Le résultat classique concernant la perturbation bornée d'un opérateur générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe ne peut pas être appliqué puisque $\mathcal{A}_1$ n'est pas à domaine dense dans X. Cependant on a le résultat suivant :

PROPOSITION 8. *Les opérateurs $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_{L,0}$ engendrent dans X_0 des C_0-semi-groupes, qu'on note respectivement $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$, donnés par*

$$\mathcal{T}_0(t) \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_0(t)\psi)(0) \\ T_0(t)\psi \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{T}(t) \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T(t)\psi)(0) \\ T(t)\psi \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Preuve. En effet, d'après la proposition 1 du paragraphe précédent, $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_{L,0}$ sont générateurs de C_0-semi-groupes.

Soit le semi-groupe $(\mathcal{S}_0(t))_{t\geq 0}$ défini sur X_0 par

$$\mathcal{S}_0(t) \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_0(t)\psi)(0) \\ T_0(t)\psi \end{pmatrix},$$

On a :

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\left(\mathcal{S}_0(t)\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \psi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \psi\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\ \lim_{t\searrow 0}(T_0(t)\psi-\psi)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\ \psi'\end{pmatrix}\in X_0.$$

On conclut que $(\mathcal{S}_0(t))_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$ ont le même générateur $\mathcal{A}_0$ donc coincident. De la même manière, on montre que le semi-groupe $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ et le semi-groupe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ défini sur X_0 par

$$\mathcal{S}(t)\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T(t)\psi)(0)\\ T(t)\psi\end{pmatrix}$$

coincident. ∎

Le lemme suivant est une conséquence du théorème 6 de la section précédente:

LEMME 9. *Soit $(\mathcal{T}_{0,-1}(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe d'extrapolation de $(\mathcal{T}_0(t))_{t\geq 0}$, le semi-groupe $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ est donné par la formule de Duhamel suivante (cf.* [5], [7])

$$\mathcal{T}(t)\Psi=\mathcal{T}_0(t)\Psi+\int_0^t\mathcal{T}_{0,-1}(t-s)\mathcal{B}\mathcal{T}(s)ds \tag{4}$$

où $\Psi=\begin{pmatrix}\psi(0)\\ \psi\end{pmatrix}\in X_0$.

La formule (4) s'écrit

$$\begin{pmatrix}(T(t)\psi)(0)\\ T(t)\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T_0(t)\psi)(0)\\ T_0(t)\psi\end{pmatrix}+\int_0^t\mathcal{T}_{0,-1}(t-s)\begin{pmatrix}LT(s)\psi\\ 0\end{pmatrix}ds.$$

Ainsi on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 10. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe solution de l'équation (1) et $(T_0(t))_{t\geq 0}$ celui de l'équation "triviale"(2), alors, pour tout $t\geq 0$ et tout $\lambda\succ 0$ on a*

$$T(t)\varphi=T_0(t)\varphi+(\lambda I-A_0)\int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\cdot}L(T(s)\varphi))ds,\quad \varphi\in C$$

où A_0 est le générateur infinitésimal de $(T_0(t))_{t\geq 0}$.

Preuve. On a

$$\begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_0(t)\varphi)(0) \\ T_0(t)\varphi \end{pmatrix}$$
$$+ \int_0^t \mathcal{T}_{0,-1}(t-s)(\lambda I - \mathcal{A}_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} LT(s)\varphi \\ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} LT(s)\varphi \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} (T_0(t)\varphi)(0) \\ T_0(t)\varphi \end{pmatrix} + (\lambda I - \mathcal{A}_1)_{-1} \int_0^t \mathcal{T}_{0,-1}(t-s) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} LT(s)\varphi \\ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} LT(s)\varphi \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} (T_0(t)\varphi)(0) \\ T_0(t)\varphi \end{pmatrix} + (\lambda I - \mathcal{A}_1)_{-1} \begin{pmatrix} \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L(T(s)\varphi))(0) ds \\ \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L(T(s)\varphi)) ds \end{pmatrix}.$$

Posons

$$h(t,\tau) = \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L(T(s)\varphi))(\tau) ds,$$

et montrons que

$$\begin{pmatrix} h(t,0) \\ h(t,.) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_0) :$$

On a :

$$h(t,\tau) = \int_0^{t+\tau} T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L(T(s)\varphi))(\tau) ds$$
$$+ \int_{t+\tau}^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L(T(s)\varphi))(\tau) ds$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \int_0^{t+\tau} L(T(s)\varphi)) ds + \frac{1}{\lambda} \int_{t+\tau}^t e^{\lambda(t-s+\tau)} L(T(s)\varphi)) ds & \text{si} \quad t+\tau \geq 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s+\tau)} L(T(s)\varphi)) ds & \text{si} \quad t+\tau \leq 0, \end{cases}$$

$h(t,.)$ est alors de classe C^1 sur $[-r,0]$ et

$$\frac{d}{d\tau} h(t,\tau) = \begin{cases} \int_{t+\tau}^t e^{\lambda(t-s+\tau)} L(T(s)\varphi)) ds & \text{si} \quad t+\tau \geq 0 \\ \int_0^t e^{\lambda(t-s+\tau)} L(T(s)\varphi)) ds & \text{si} \quad t+\tau \leq 0. \end{cases}$$

De plus

$$\frac{d}{d\tau}h(t,0)=0,$$

par suite

$$h(t,\cdot)\in D(A_0)$$

On déduit que

$$\begin{pmatrix}(T(t)\varphi)(0)\\ T(t)\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(T_0(t)\varphi)(0)\\ T_0(t)\varphi\end{pmatrix}+(\lambda I-\mathcal{A}_0)\begin{pmatrix}h(t,0)\\ h(t,.)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(T_0(t)\varphi)(0)\\ T_0(t)\varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda-A_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h(t,0)\\ h(t,.)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(T_0(t)\varphi)(0)\\ \\ T_0(t)\varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\int_0^t T_0(t-s)(e^{\lambda\cdot}L(T(s)\varphi))(0)ds\\ \\ (\lambda-A_0)\int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\cdot}L(T(s)\varphi))ds\end{pmatrix}$$

et

$$T(t)\varphi=T_0(t)\varphi+(\lambda I-A_0)\int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\cdot}L(T(s)\varphi))ds.$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

Términons ce paragraphe par un résultat important, qui consiste à construire le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ par approximations successives à partir de $(T_0(t))_{t\geq 0}$, en utilisant la série de Dyson-Phillips suivante

$$\mathcal{T}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(V_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{B}}\right)^n\mathcal{T}_0\right](t),\tag{5}$$

où

$$\left[V_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{B}}\widetilde{F}\right](t):=\int_0^t\mathcal{T}_{0,-1}(t-s)\mathcal{B}\widetilde{F}(s)ds,\quad \text{pour } \widetilde{F}\in C\left([0,+\infty[\,,\mathcal{L}\left(X_0\right)\right).$$

(cf. Théorème 6).

Ce résultat est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME 11. *Nous avons :*

$$T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(V_{A_0})^n T_0](t), \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

où, pour tout $F \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(C))$,

$$[V_{A_0} F](t) := (\lambda I - A_0) \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L F(s)) ds.$$

Preuve. Pour montrer le théorème précédent, les mêmes calculs effectués pour démontrer le théorème 10, nous permettent d'avoir, pour tout $F \in C([0, +\infty[, \mathcal{L}(C))$

$$\int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L F(s)\varphi) ds \in D(A_0), \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \varphi \in C.$$

Donc l'opérateur V_{A_0} est bien défini de $C([0, +\infty[, \mathcal{L}(C))$ à valeurs dans $C([0, +\infty[, \mathcal{L}(C))$.

Par suite, nous avons en particulier, pour tout $\varphi \in C$,

$$\begin{pmatrix} \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi)(0)\, ds \\ \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi) ds \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_0), \quad \forall t \geq 0,$$

et alors, pour $\widetilde{F}(s) := \mathcal{T}_0(s), \;\; s \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left[V_{A_L}^{\mathcal{B}} \widetilde{F}\right](t) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} &:= \int_0^t \mathcal{T}_{0,-1}(t-s) \mathcal{B} \mathcal{T}_0(s) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} ds \\
&= \left(\lambda I - (\mathcal{A}_1)_{-1}\right) \begin{pmatrix} \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi)(0)\, ds \\ \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi) ds \end{pmatrix} \\
&= (\lambda I - \mathcal{A}_1) \begin{pmatrix} \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi)(0)\, ds \\ \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi) ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_0^t T_0(t-s)(e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi)(0)\, ds \\ (\lambda I - A_0) \int_0^t T_0(t-s)(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot} L T_0(s)\varphi) ds \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ([V_{A_0} T_0](t)\varphi)(0) \\ [V_{A_0} T_0](t)\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par itérations successives, nous montrons facilement que

$$\left[\left(V_{A_1}^{\mathcal{B}}\right)^n \mathcal{T}_0\right](t)\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[(V_{A_0})^n T_0](t)\,\varphi(0)\\ [(V_{A_0})^n T_0](t)\,\varphi\end{pmatrix}$$

Par suite la série de Dyson-Phillips (5) devient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(T(t)\varphi)(0)\\ T(t)\varphi\end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(V_{A_1}^{\mathcal{B}}\right)^n \mathcal{T}_0\right](t)\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi\end{pmatrix}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\begin{pmatrix}[(V_{A_0})^n T_0](t)\,\varphi(0)\\ \\ [(V_{A_0})^n T_0](t)\,\varphi\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$T(t)\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty}[(V_{A_0})^n T_0](t)\,\varphi, \qquad t \geq 0.$$

D'où le résultat du théorème. ∎

RÉFÉRENCES

[1] AMANN, H., Parabolic evolution equations in interpolation and extrapolation spaces, *J. Functional Analysis,* **78** (1988), 233-270.

[2] DA PRATO, G., GRISVARD, P., Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation, *J. Functional Analysis,* **58** (1984), 107-124.

[3] HALE, E., VERDUYN LUMEL, S.M., "Theory of Functional Differential Equations", Springer-Verlag, 1977.

[4] HILLE, E., PHILLIPS, R.S., "Functional Analysis and Semigroups", Amer. Math. Soc. Colloq. publ. 31, Providence R.I., 1975.

[5] NAGEL, R., "Sobolev Spaces and Semigroups", Semesterbericht Fonktionalanalysis Sommersemester, Tübingen, Germany, 1983.

[6] NAGEL, R., SINESTRARI, E., Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators, in "Lect. Notes Pure Appl. Math. 150", Marcel Dekker, 1994, 51-70.

[7] NICKEL, G., RHANDI, A., On the essential spectral radius of semigroups generated by perturbations of Hille-Yosida operators, *Preprint,* Tübingen, Germany, (1995),.

[8] PAZY, A., "Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations", Springer-Verlag, 1983.

[9] WALTHER, TH., "Abstrakte Sobolev-Räume und ihre Anwendung auf die Störungstheorie für Generatoren von C_0-Halbgruppen", Dissertation, Tübingen, Germany, 1986.