EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 3, 327 – 333 (1998)

Sur le Spectre d'un Shift à Poids Opérateurs

M. Houimdi and M. Ouali

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Dépt. de Math., BP S 15, 40000-*Marrakech, Maroc*
e-mail: fssm.math@cybernet.net.ma

(Research paper presented by M. González)

AMS *Subject Class.* (1991): 47A10, 47B37 *Received March* 9, 1998

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert séparable complexe, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H et $H^{(\infty)}$ la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de H. Rappelons que

$$H^{(\infty)} = \{(x_n)_{n\geq 0} : x_n \in H, \forall n, \textstyle\sum_{n\geq 0}\|x_n\|^2 < \infty\}.$$

et que tout opérateur linéaire borné T sur $H^{(\infty)}$ est représenté par une matrice carrée infinie $(T_{n,m})_{n,m\geq 0}$ à coefficients dans $\mathcal{L}(H)$ et on convient d'écrire $T = (T_{n,m})_{n,m\geq 0}$.

On dit qu'un opérateur T sur $H^{(\infty)}$ est un shift à poids opérateurs, si T est représenté par une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ T_0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & T_n & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

où $\sup_{n\geq 0}\|T_n\| < \infty$. Les T_n, $n = 0, 1, \ldots$, s'appellent les poids de l'opérateur T. Par suite, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in H^{(\infty)}$, on a

$$Tx = (0, T_0x_0, T_1x_1, \ldots , T_nx_n, \ldots).$$

Soit T un shift à poids opérateurs, de poids $(T_n)_{n\geq 0}$, on désigne par $\sigma(T)$ et $r(T)$ respectivement le spectre et le rayon spectral de T, et par $G(H)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H)$.

Dans [3] l'auteur a montré que si les poids sont tous inversibles, alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$, tandis que dans [4] l'auteur a montré que si $T_n = \alpha_n A$ pour tout $n \geq 0$, où $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes bornée et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$.

Dans cet article, on se propose de montrer que s'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, T_n est une limite d'opérateurs inversibles, alors

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$$

et on montre aussi que si $\lim_{n\to\infty} T_n = A$, alors

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(A)\}.$$

Dans les deux propositions suivantes on va regrouper quelques propriétés essentielles de l'opérateur T.

PROPOSITION 1.1. ([3]) i) $\|T\| = \sup\limits_{n\geq 0}\|T_n\|$.

ii) $r(T) = \inf\limits_{k\geq 1}(\sup\limits_{n\geq 0}\|T_{n+k-1}\dots T_n\|)^{\frac{1}{k}}$.

iii) *Si* $|\lambda| = 1$, *alors* T *et* λT *sont unitairement équivalents, ce qui entraîne que* $\sigma(T)$ *admet la symétrie circulaire.*

iv) $0 \in \sigma(T)$ *et* $r(T) \in \sigma(T)$.

v) *Si pour tout* $n \geq 0$, T_n *est inversible, alors* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$.

PROPOSITION 1.2. ([1]) i) *T est compact si, et seulement si, pour tout $n \geq 0$, T_n est compact et* $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\| = 0$.

ii) *T est de classe $\mathcal{C}_p$ si, et seulement si, pour tout $n \geq 0$, T_n est de classe $\mathcal{C}_p$ et* $\sum\limits_{n\geq 0}\|T_n\|_p^p < \infty$, *où* $\|\cdot\|_p$ *désigne la* $\mathcal{C}_p$*-norme.*

Remarque 1.1. Si T est compact, alors $\sigma(T) = \{0\}$, car $\sigma(T)$ admet une symétrie circulaire.

2. Le résultat principal

Soit T un shift à poids opérateurs, de poids $(T_n)_{n\geq 0}$. Pour tout entier $N \geq 0$ on considère l'opérateur $T^{(N)}$ défini par la matrice suivante:

$$T^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & T_{N+1} & 0 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & 0 & T_{N+2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & T_{N+3} & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & \\ T_0 & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & T_N & 0 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + T^{(N)}$$

Lemme 2.1. *Pour tout $N \geq 0$, on a $\sigma(T) = \sigma(T^{(N)})$.*

Preuve. Posons:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & \\ T_0 & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & T_N & 0 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = T^{(N)}$$

Puisque $0 \in \sigma(T) \cap \sigma(B)$, alors le résultat découle de l'égalité

$$T - \lambda I = (I - \frac{1}{\lambda}A)(B - \lambda I) \ (\lambda \neq 0)\,;$$

qui est une conséquence immédiate du fait que $AB = 0$ et $T = A + B$. ∎

THÉORÈME 2.1. *Soient T et B deux shifts à poids, de poids respectivement $(T_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \|B_n\| = 0$, alors*

$$\sigma(T + B) = \sigma(T).$$

Preuve. Soit $\lambda \notin \sigma(T)$. $\lim_{n\to\infty} \|B_n\| = 0$, donc il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $\|B_n\| \leq \frac{1}{2\|(T-\lambda)^{-1}\|}$. Or $\|B^{(N)}\| = \sup_{n\geq N+1} \|B_n\|$, donc

$$\|B^{(N)}\| < \frac{1}{\|(T - \lambda)^{-1}\|}.$$

Par suite $T - \lambda + B^{(N)}$ est inversible, donc $\lambda \notin \sigma(T + B^{(N)})$. Or d'après le lemme précédent, on a

$$\sigma(T + B^{(N)}) = \sigma(T + B).$$

Donc $\lambda \notin \sigma(T + B)$. L'autre inclusion se démontre de la même manière. ∎

COROLLAIRE 2.1. *Si à partir d'un certain rang N, $T_n \in \overline{G(H)}$, alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}.$$

Preuve. $T_n \in \overline{G(H)}$, entraîne qu'il existe $A_n \in G(H)$ tel que $\|T_n - A_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Posons $B_n = T_n - A_n$, donc $\lim_{n\to\infty} \|B_n\| = 0$. On a $T_n = B_n + A_n$ donc $T = B + A$, où A et B désignent les shifts à poids opérateurs, de poids respectivement $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$, par suite $T^{(N)} = B^{(N)} + A^{(N)}$. On en déduit alors d'après le théorème précédent que $\sigma(T^{(N)}) = \sigma(A^{(N)})$ et le lemme 2.1 implique que $\sigma(T) = \sigma(A)$. D'après [3] $\sigma(A)$ est un disque de centre 0 et de rayon $r(A) = r(T)$, donc $\sigma(T)$ l'est aussi. D'où le résultat. ∎

Remarque 2.1. Si à partir d'un certain rang N, $0 \notin \mathrm{Int}(\sigma(T_n))$, (Int désigne l'intérieur), alors

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}.$$

En effet, soit $n_0 \geq N$, $0 \notin Int(\sigma(T_{n_0}))$ donc pour tout $m \geq 1$ il existe $\lambda_m \in B(0, \frac{1}{2^m})$ et $\lambda_m \notin \sigma(T_{n_0})$. $T_{n_0} - \lambda_m$ est inversible et $T_{n_0} = \lim_{m\to\infty}(T_{n_0} - \lambda_m)$, donc d'après le corollaire précédent on obtient cette remarque.

COROLLAIRE 2.2. *Si* $\lim_{n\to\infty} d(0, \partial\sigma(T_n)) = 0$, *alors* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$.

Preuve. Pour tout $n \geq 0$, $\partial\sigma(T_n)$ est compact, donc pour tout $n \geq 0$ il existe $\lambda_n \in \partial\sigma(T_n)$ tel que:

$$d(0, \partial\sigma(T_n)) = d(0, \lambda_n) = |\lambda_n|.$$

$\lambda_n \in \partial\sigma(T_n)$ donc $\lambda_n \notin \mathrm{Int}(\sigma(T_n))$, ceci montre que $0 \notin \mathrm{Int}(\sigma(T_n - \lambda_n))$ et de même que dans la remarque 2.1 on a $T_n - \lambda_n \in \overline{G(H)}$.

On a $T_n = (T_n - \lambda_n) + \lambda_n = B_n + C_n$, où $B_n = T_n - \lambda_n$ et $C_n = \lambda_n I$.

Soient B et C les deux shifts à poids opérateurs, de poids respectivement $(B_n)_{n\geq 0}$ et $(C_n)_{n\geq 0}$.

On a $T = B + C$, comme $T_n - \lambda_n \in \overline{G(H)}$ et $\lim_{n\to\infty} \|C_n\| = 0$, alors le théorème 2.1 et le corollaire 2.1 entraînent le résultat. ∎

Remarque 2.2. En particulier si $\lim_{n\to\infty} r(T_n) = 0$, alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$.

En effet, pour tout $n \geq 0$ il existe $\lambda_n \in \partial\sigma(T_n)$ tel que $r(T_n) = |\lambda_n|$, comme $0 \leq d(0, \partial\sigma(T_n)) \leq |\lambda_n|$ alors le corollaire précédent entraîne cette remarque.

COROLLAIRE 2.3. *Si la dimension de H est finie, alors pour tout shift à poids opérateurs T on a*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}.$$

Preuve. Dans ce cas $\overline{G(H)} = \mathcal{L}(H)$, donc d'après le corollaire 2.1 on obtient le résultat. ∎

COROLLAIRE 2.4. *Si à partir d'un certain rang N, T_n est normal, alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}.$$

Preuve. On sait que pour tout $n \geq N$, T_n se décompose sous la forme $T_n = U_n P_n$, où U_n est unitaire et P_n positif. Or pour tout $n \geq N$, $P_n \in \overline{G(H)}$, donc pour tout $n \geq N$, $T_n \in \overline{G(H)}$ et le corollaire 2.1 entraîne le résultat. ∎

THÉORÈME 2.2. *Si* $\lim_{n\to\infty} T_n = A$, *alors* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(A)\}$.

Preuve. Posons $B_n = T_n - A$, donc $\lim_{n\to\infty} \|B_n\| = 0$.
On a $T_n = (T_n - A) + A$. Donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ B_0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & B_n & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ A & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & A & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On sait que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ A & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & A & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = A \otimes S.$$

où $S : l^2 \longrightarrow l^2$ est le shift unilateral sans poids et que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq 1\}$, donc d'après [2] on a

$$\sigma(A \otimes S) = \sigma(A)\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(A)\}.$$

∎

Remarque 2.3. En particulier si $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$, alors T est quasi-nilpotent.

Remarque 2.4. Dans [4] l'auteur a montré que si $T_n = \alpha_n A$, où $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes bornée et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}$. Ce résultat peut-être retrouvé facilement à l'aide du produit tensoriel. En effet, on a:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \\ \alpha_0 A & 0 & & & & \\ 0 & \alpha_1 A & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n A & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = A \otimes S_\alpha$$

où S_α est le shift à poids scalaires, de poids $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, donc :

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma(A)\sigma(S_\alpha) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(A)r(S_\alpha)\}. \end{aligned}$$

D'après les résultats précédents, il est naturel de poser la conjecture suivante:

CONJECTURE. Si T est un shift à poids opérateurs, de poids quelconques, alors

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq r(T)\}.$$

Enfin, nous remercions infiniment le referé pour ses remarques et ses suggestions.

RÉFÉRENCES

[1] ABOUFATIMA, M., HOUIMDI, M., Sur la compacité des shifts à poids opêrateurs, à paraître dans *Acta Mathematica Vietnamica.*

[2] BROWN, A., PEARCY, C.M., Spectra of tensor product of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **17** (1966), 162–169.

[3] HOUIMDI, M., "Propriétés Spectrales des Opérateurs Shifts. Modèles de Similitude et Phénomène d'Explosion du Spectre", Thèse de $3^{ème}$ cycle, Bordeaux, 1984. [4] KNYAZEV, P.N. , The spectrum of a unilateral shift with operator weights that are scalar-multiple to a fixed operator. (Russian. English summary) Dokl. Akad. Nauk BSSR, 29 (1985), no.4, 304-305, 380.

[4] KNYAZEV, P.N., The spectrum of a unilateral shift with operator weights that are scalar-multiple to a fixed operator, (Russian. English summary), *Dokl. Akacl. Nauk BSSR,* **29** (4) (1985), 304–305.