EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **13**, Núm. 3, 359 – 369 (1998)

Sur les Vitesses de Convergence en Theorie des Valeurs Extremes

BELBACHIR MOHAMMADINE

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, B.P. 1014-Rabat, Morocco

(Research paper presented by M. Molina)

AMS *Subject Class.* (1991): 60F05, 62G30 *Received November* 3, 1997

1. Introduction

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de fonction de répartition commune $F(x) = P(X_1 \leq x)$. Soient $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ les statistiques d'ordre correspondantes. Gnedenko [8] a montré qu'il existe des constantes de normalisation $a_n > 0$ et b_n telles que, lorsque $n \to \infty$, $(X_{(n)} - b_n)/a_n$ ait une loi limite de fonction de répartition $G \in \{\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda\}$ où

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp -x^{-\alpha} & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp -(-x)^\alpha & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$ si $x \in \mathbb{R}$, α étant un réel strictement positif. Ainsi lorsque $n \to \infty$,

$$P(X_{(n)} \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \to G(x). \tag{1}$$

Notons $S_n(x) = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > a_n x + b_n\}}$ où 1_A est la fonction indicatrice de l'évènement A. La suite $S_n(x)$ suit une loi binomiale $B(n, 1 - F(a_n x + b_n))$. Les événements $\{X_{(n-k+1)} \leq a_n x + b_n\}$ et $\{S_n(x) \leq k-1\}$ sont identiques puisque si le premier est réalisé la $(n-k+1)$-ème statistique d'ordre $X_{(n-k+1)}$ ne doit pas dépasser $a_n x + b_n$, donc au plus $k-1$ variables parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ peuvent dépasser $a_n x + b_n$ et vice versa. On en déduit que

$$P(X_{(n)} \leq a_n x + b_n) = P(S_n(x) \leq k-1). \tag{2}$$

Nous avons (1) si, et seulement si, $n \ln(1-(1-F(a_nx+b_n))) \to \ln G(x)$ qui équivaut à

$$n(1-F(a_nx+b_n)) \to -\ln G(x), \tag{3}$$

puisque $\lim_{n\to\infty} F(a_nx+b_n)=1$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n(x)\le k-1) = G(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-\ln G(x))^j}{j!}$$

par l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. D'où, en utilisant (2),

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{(n-k+1)}\le a_nx+b_n) = G(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-\ln G(x))^j}{j!}. \tag{4}$$

La détermination de la vitesse dans (1) a fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de Gallambos [7, Theorem 2.10.1], Hall [9], Omey et Rachev [12] et Zolotarev [17]. Le problème d'évaluation de la vitesse de convergence dans (4) a été étudié par Reiss [13], Hall [10] et Smith [16]. Notre but est d'évaluer cette vitesse en utilisant l'approximation de Poisson. Nous donnerons aussi un résultat sur la vitesse de convergence pour la limite de la loi jointe des k dernières statistiques d'ordre dans le cas i.i.d. Par la suite lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrétes à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour comparer leurs lois, nous utiliserons la distance de la variation totale définie par $d(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}|P(X=k)-P(Y=k)|$.

Dans le cas particulier de deux variables aléatoires de Poisson, nous avons le résultat suivant de Freedman [6].

LEMME 1. *Soient $Y(\lambda_1)$ et $Y(\lambda_2)$ deux variables aléatoires de Poisson de moyennes λ_1 et λ_2, deux réels strictement positifs, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Alors*

$$d(Y(\lambda_1),Y(\lambda_2)) \le |\lambda_1-\lambda_2|.$$

2. Résultats principaux

Dans ce qui suit nous donnons une série de résultats sur la vitesse de convergence de la loi de la $(n-k+1)$-ème statistique d'ordre vers sa loi limite. $Y(\lambda)$ désignera désormais une loi de Poisson de moyenne λ.

THÉORÈME 1. *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n *variables aléatoires (i.i.d.) de fonction de répartition commune* $F(x) = P(X_1 \leq x)$ *telles que* $F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$ *lorsque* $n \to \infty$, *où* $G \in \{\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda\}$. *Alors*

(i) *si* $0 < -\ln G(x) < 1$ *nous avons:*

$$\begin{aligned}\Big|P(X_{(n-k+1)} \leq a_n x + b_n) - G(x) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\ln G(x))^j}{j!}\Big| \\ \leq \frac{(-\ln G(x))^2}{n} + |n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)|;\end{aligned} \tag{5}$$

(ii) *si* $-\ln G(x) \geq 1$ *nous avons:*

$$\begin{aligned}\Big|P(X_{(n-k+1)} \leq a_n x + b_n) - G(x) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-\ln G(x))^j}{j!}\Big| \\ \leq \frac{-\ln G(x)}{n} + |n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)|.\end{aligned} \tag{6}$$

Démonstration. Le résultat de [11] (voir [14, lemma 1]) appliqué, ici, avec $p = 1 - F(a_n x + b_n)$, nous donne

$$d\Big(S_n(x), Y\big(n(1 - F(a_n x + b_n))\big)\Big) \leq n(1 - F(a_n x + b_n))^2.$$

Puisque (1) équivaut à (3) nous avons lorsque n est assez grand

$$n(1 - F(a_n x + b_n))^2 = \frac{1}{n}[n(1 - F(a_n x + b_n))]^2 \simeq \frac{(-\ln G(x))^2}{n}.$$

Donc

$$d\Big(S_n(x), Y\big(n(1 - F(a_n x + b_n))\big)\Big) \simeq \frac{(-\ln G(x))^2}{n}. \tag{7}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}d\Big(S_n(x), Y(-\ln G(x))\Big) \leq d\Big(S_n(x), Y\big(n(1 - F(a_n x + b_n))\big)\Big) \\ + d\Big(Y\big(n(1 - F(a_n x + b_n))\big), Y(-\ln G(x))\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

D'après le lemme de Freedman

$$d\Big(Y(n(1-F(a_nx+b_n))),Y(-\ln G(x))\Big) \\ \leq |n(1-F(a_nx+b_n))+\ln G(x)|. \tag{9}$$

En combinant (7), (8) et (9), nous obtenons

$$d\Big(S_n(x),Y(-\ln G(x))\Big) \leq \frac{(-\ln G(x))^2}{n} \\ +|n(1-F(a_nx+b_n))+\ln G(x)|. \tag{10}$$

La partie (5) est une conséquence de (10) puisque

$$\left|P(X_{(n-k+1)} \leq a_nx+b_n)-G(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-\ln G(x))^j}{j!}\right| = \\ \left|P(S_n(x)\leq k-1)-G(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-\ln G(x))^j}{j!}\right| \\ \leq d\Big(S_n(x),Y(-\ln G(x))\Big). \tag{11}$$

De la même façon, le principal résultat de Romanowska [14] permet d'obtenir

$$d\Big(S_n(x),Y(n(1-F(a_nx+b_n)))\Big) \leq \frac{1-F(a_nx+b_n)}{\sqrt{F(a_nx+b_n)}} \\ = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{n(1-F(a_nx+b_n))}{\sqrt{nF(a_nx+b_n)}}.$$

Ce dernier terme s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{n(1-F(a_nx+b_n))}{\sqrt{n-n(1-F(a_nx+b_n))}} \simeq \frac{1}{n}\frac{-\ln G(x)}{\sqrt{1+\dfrac{\ln G(x)}{n}}} \simeq \frac{-\ln G(x)}{n}.$$

Nous avons donc

$$d\Big(S_n(x),Y(n(1-F(a_nx+b_n)))\Big) \leq -\ln G(x). \tag{12}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme de Freedman, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\Big(S_n(x), Y(-\ln G(x))\Big) \leq & \frac{-\ln G(x)}{n} \\ & + \big|n(1-F(a_n x+b_n)) + \ln G(x)\big|. \end{aligned} \tag{13}$$

La partie (6) est déduite de (13) en utilisant (11). ∎

Les résultats (5), (6), sont valables pour tout x fixé tel que $0 < G(x) < 1$. Le choix de x vérifiant $0 < -\ln G(x) < 1$ pour (5) et $-\ln G(x) > 1$ pour (6) est fait pour améliorer les bornes puisque $(-\ln G(x))^2 \leq -\ln G(x)$ dans le premier cas et $-\ln G(x) \leq (-\ln G(x))^2$ dans le second cas.

Dans le théorème suivant nous désignons par $[x]$ la partie entière de x.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1, *nous avons*

$$\begin{aligned} & \left|P(X_{(n-k+1)} \leq a_n x + b_n) - G(x)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-\ln G(x))^j}{j!}\right| \\ & \qquad \leq \frac{1}{2n}G(x)\frac{(-\ln G(x))^{[-\ln G(x)]+2}}{[-\ln G(x)]!} \\ & \qquad\quad + |n(1-F(a_n x+b_n)) + \ln G(x)| + O(1/n). \end{aligned} \tag{14}$$

Démonstration. En prenant $p_i = p = 1 - F(a_n x + b_n)$ pour tout $1 \leq i \leq n$ dans [3, Theorem 1.3] et en tenant compte de (3) et du fait que $1 - F(a_n x + b_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & d\Big(S_n(x), Y(-n\ln F(a_n x+b_n))\Big) \\ & \qquad \simeq \frac{n}{2}\frac{(1-F(a_n x+b_n))^2(-\ln G(x))^{[-\ln G(x)]}}{[-\ln G(x)]!}G(x) \\ & \qquad = \frac{(n(1-F(a_n x+b_n)))^2}{2n}\frac{(-\ln G(x))^{[-\ln G(x)]}}{[-\ln G(x)]!}G(x) \\ & \qquad \simeq \frac{1}{2n}\frac{G(x)(-\ln G(x))^{[-\ln G(x)]+2}}{[-\ln G(x)]!}. \end{aligned} \tag{15}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} d\Big(S_n(x), Y(-n\ln G(x))\Big) \leq & \, d\Big(S_n(x), Y(-n\ln F(a_n x+b_n))\Big) \\ & + d\Big(Y(-n\ln F(a_n x+b_n)), Y(-n\ln G(x))\Big). \end{aligned} \tag{16}$$

En combinant (15), (16) et le lemme de Freedman nous obtenons

$$d\Big(S_n(x), Y\big(-\ln G(x)\big)\Big) \le \frac{1}{2n} G(x) \frac{\big(-\ln G(x)\big)^{[-\ln G(x)]+2}}{[-\ln G(x)]!} + \big| -n\ln F(a_n x + b_n) + \ln G(x)\big|.$$

Mais $-n\ln F(a_n x + b_n) + \ln G(x) = n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x) + O(1/n)$ pour n assez grand. Donc:

$$d\Big(S_n(x), Y\big(-\ln G(x)\big)\Big) \le \frac{1}{2n} \frac{G(x)\big(-\ln G(x)\big)^{[-\ln G(x)]+2}}{[-\ln G(x)]!} + |n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)| + O(1/n). \tag{17}$$

La partie (14) du Théorème 2 se déduit de (17) en utilisant (11). ∎

3. Remarques

3.1. Sous les hypothèses du Théorème 1, le résultat de Barbour et Hall [1] permet de donner une borne pour (14). Nous avons

$$\left| P(X_{(n-k+1)} \le a_n x + b_n) - G(x) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\big(-\ln G(x)\big)^j}{j!} \right| \le \frac{(1 - G(x))\big(-\ln G(x)\big)}{n} + |n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)|, \tag{18}$$

en utilisant les techniques des Théorèmes 1 et 2.

3.2. L'approximation $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(a_n x + b_n)) = -\ln G(x)$ est réalisée pour les constantes réelles $a_n > 0$ et b_n. Elle reste toujours valable si ces constantes sont remplacées par $\alpha_n > 0$ et β_n qui leur sont liées par les relations $\alpha_n/a_n \to 1$ et $(\beta_n - b_n)/a_n \to 0$.

3.3. Dans les Théorèmes 1 et 2 et dans (18),nous avons l'approximation

$$\left| P(X_{(n-k+1)} \le a_n x + b_n) - G(x) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\big(-\ln G(x)\big)^j}{j!} \right| = O(1/n) + |n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)|.$$

La vitesse de convergence dans (4) va ainsi dépendre de la vitesse de convergence de $n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x)$ vers 0, donc du choix adéquat des constantes de normalisation a_n et b_n. En outre, même lorsque le "bon choix" de ces constantes est fait, les vitesses de convergence peuvent être complétement différentes pour des lois différentes. Ainsi dans le cas $k = 1$ pour la loi normale, en choisissant $a_n = \sqrt{2 \ln n}$ et $b_n = a_n - (\ln \ln n + \ln 4\pi)/2a_n$, nous savons que

$$n(1 - F(a_n x + b_n)) + \ln G(x) \simeq \frac{e^{-x}}{16} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$$

et

$$P(X_{(n)} \leq a_n x + b_n) - e^{-e^{-x}} \simeq \frac{e^{-x} e^{-e^{-x}}}{16} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = O\left(\frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}\right),$$

qui est une vitesse trés lente comparée à $O(1/n)$, obtenue pour la loi exponentielle avec $a_n = 1$ et $b_n = \ln n$ (voir Section 5).

4. Loi jointe des k dernières statistiques d'ordre

Dwass [5] avait obtenu, pour le cas de variables i.i.d., la loi limite jointe des k dernières statistiques d'ordre soit

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} P\Big(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} > u_1, \frac{X_{(n-1)} - b_n}{a_n} \in (u_2, u_1],& \\ \ldots, \frac{X_{(n-k+1)} - b_n}{a_n} \in (u_k, u_{k-1}]\Big)& \\ = \Big[G(u_{k-1}) - G(u_k)\Big] \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\ln \frac{G(u_j)}{G(u_{j-1})}\right),&\end{aligned}$$

où $G \in \{\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda\}$ tel que $F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$, lorsque $n \to \infty$, et $u_k < \cdots < u_1 < u_0 = \infty$.

Dans le théorème suivant, nous allons donner une vitesse de convergence pour cette limite.

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus nous avons:*

$$\begin{aligned}\Big|P\Big(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} > u_1, \frac{X_{(n-1)} - b_n}{a_n} \in (u_2, u_1],& \\ \ldots, \frac{X_{(n-k+1)} - b_n}{a_n} \in (u_k, u_{k-1}]\Big)& \qquad (19) \\ - (G(u_{k-1}) - G(u_k)) \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\ln \frac{G(u_j)}{G(u_{j-1})}\right)\Big| = O(1/n).&\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $Z_i(j) = 1_{\{\frac{X_i - b_n}{a_n} \in (u_j, u_{j-1}]\}}$ et

$$p_i(j) = P\left(\frac{X_i - b_n}{a_n} \in (u_j, u_{j-1}]\right),$$

alors nous avons:

$$p_i(j) = p_j = F(a_n u_{j-1} + b_n) - F(a_n u_j + b_n), \tag{20}$$

expression indépendante de i pour tout $1 \leq j \leq k$. Soient

$$S_n = (S_n(1), S_n(2), \dots, S_n(k)),$$

où $S_n(j) = \sum_{i=1}^{k} Z_i(j)$ avec $1 \leq j \leq k$ et

$$T_n = (T_n(1), T_n(2), \dots, T_n(k)),$$

où les variables aléatoires $T_n(j)$, $1 \leq j \leq k$, sont indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de moyenne $\lambda_j = np_j$. Notons

$$\Delta_n = d(S_n, T_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |P(S_n = k) - P(T_n = k)|.$$

Notons aussi $P = \sum_{i=1}^{k} p_j$, $\theta = nP$ et

$$D(\theta) = 2\theta \left(\frac{\theta^{\alpha-1}(\alpha - \theta)}{\alpha!} - \frac{\theta^{\beta-1}(\beta - \theta)}{\beta!}\right) e^{-\theta},$$

avec $\alpha = [\theta + 1/2 + (\theta + 1/4)^{1/2}]$ et $\beta = [\theta + 1/2 - (\theta + 1/4)^{1/2}]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

En tenant compte de (20) les hypothèses du Théorème 2-1 de [4] sont satisfaites et nous obtenons:

$$\theta = nP = \sum_{i=1}^{k} \Big(n(1 - F(a_n u_j + b_n)) - n(1 - F(a_n u_{j-1} + b_n)) \Big)$$
$$\to \sum_{i=1}^{k} \left(- \ln \frac{G(u_j)}{G(u_{j-1})} \right) = - \ln G(u_k).$$

Nous avons aussi:

$$\alpha = \left[\theta + \frac{1}{2} + \left(\theta + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right] \to \left[- \ln G(u_k) + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \ln G(u_k)\right)^{1/2}\right] = \alpha_c,$$

et

$$\beta = \left[\theta + \frac{1}{2} - \left(\theta + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\right] \to \left[-\ln G(u_k) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \ln G(u_k)\right)^{1/2}\right] = \beta_c,$$

lorsque $n \to \infty$, où α_c et β_c sont des constantes.

Ainsi

$$\begin{aligned} D(\theta) &= 2\theta\left(\frac{\theta^{\alpha-1}(\alpha-\theta)}{\alpha!} - \frac{\theta^{\beta-1}(\beta-\theta)}{\beta!}\right)e^{-\theta} \\ &\longrightarrow -2\ln G(u_k)\Big(\big(-\ln G(u_k)\big)^{\alpha_c-1}(\alpha_c + \ln G(u_k))\frac{1}{\alpha_c!} \\ &\qquad - \big(-\ln G(u_k)\big)^{\beta_c-1}(\beta_c + \ln G(u_k))\frac{1}{\beta_c!}\Big)G(u_k) = A, \end{aligned}$$

A étant une constante qui dépend de α_c, β_c et $G(u_k)$.

Nous obtenons alors $(P/4)D(\theta) = (\theta/4n)D(\theta) = O(1/n)$ et $R_n = O(1/n^2)$ puisque $5nP^3 = 5\theta^3/n^2 = O(1/n^2)$. Nous en concluons que $\Delta_n = (P/4)D(\theta) + R_n = O(1/n)$ qui est (19). ∎

5. Exemples

Les exemples suivants illustrent les résultats de la Section 2 (cas $k = 1$).

Exemple 1. Considérons la loi de Pareto de fonction de répartition $F(x) = 1 - x^{-\beta}$, $x \geq 1$, $\beta > 0$ étant un réel. F appartient au domaine d'attraction de Φ_β. Comme dans [16], nous choisissons $b_n = 0$ et a_n est définie par $-\ln F(a_n) \simeq 1/n$. Mais

$$-\ln F(a_n) \simeq \frac{1}{n} \iff -\ln(1 - n^{-\beta}) \simeq \frac{1}{n} \iff a_n \simeq n^{1/\beta}.$$

Notons $L(x) = -x^\beta \ln F(x)$. Lorsque $t \to \infty$,

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \simeq 1 + \frac{t^{-\beta}(x^{-\beta} - 1)}{2 + t^{-\beta}} + o(t^{-2\beta}).$$

Ainsi $L(tx)/L(t) - 1 \sim v(x)g(t)$ où $v(x) = x^{-\beta} - 1$ et $g(t) = t^{-\beta}/(2 + t^{-\beta}) \to 0$, lorsque $t \to \infty$.

Il s'ensuit que les hypothèses de [16, Theorem 2] sont satisfaites et par conséquent

$$\sup_x |F^n(n^{1/\beta}x) - \Phi_\beta(x)| = \frac{1-x^{-\beta}}{2n} x^{-\beta}\Phi_\beta(x) + o(1/n) = O(1/n).$$

Comparons avec notre méthode:

$$|P(X_{(n)} \leq n^{1/\beta}x) - \Phi_\beta(x)| = O(1/n) + |n(1 - F(n^{1/\beta}x)) + \ln \Phi_\beta(x)|.$$

Mais

$$n(1 - F(n^{1/\beta}x)) + \ln \Phi_\beta(x) = n(n^{1/\beta}x)^{-\beta} - x^{-\beta} = 0,$$

d'où

$$|P(X_{(n)} \leq n^{1/\beta}x) - \Phi_\beta(x)| = O(1/n).$$

EXEMPLE 2. Considérons $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$. Puisque F appartient au domaine d'attraction de $\Lambda(x)$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $a_n = 1$ et $b_n = \ln n$ tels que $F^n(x + \ln n) \to \Lambda(x)$ (lorsque $n \to \infty$), nous avons d'après les résultats de la section 2, pour $k = n$:

$$|F^n(x + \ln n) - \Lambda(x)| = O(1/n) + n(1 - F(a_n x + b_n)) - e^{-x} = O(1/n).$$

Cette vitesse a été obtenue par Cohen [2, p. 853] dans la quatrième colonne de son tableau.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le rapporteur pour ses remarques pertinentes qui nous ont aidé à améliorer notre article.

RÉFÉRENCES

[1] BARBOUR, A.D., HALL, P., On the rate of Poisson convergence, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **95** (1984), 473–480.

[2] COHEN, J.P., Convergence rates for the ultimate and penultimate approximations in extreme value theory, *Adv. Appl. Prob.,* **14** (1982), 833–854.

[3] DEHEUVELS, P., PFEIFER, D., A semi group approach to Poisson approximation, *Ann. Prob.,* **14** (1986), 663–676.

[4] DEHEUVELS, P., PFEIFER, D., Poisson approximation of multinomial distributions and point processes, *J. Multivariate Analysis,* **25** (1988), 65–89.

[5] DWASS, M., Extremal processes,II, *Illinois J. Math.,* **10** (1966), 381–391.

[6] FREEDMAN, D., The Poisson approximation for dependent events, *Ann. Probab.,* **2** (1974), 256–269.

[7] GALAMBOS, J., "The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics", Wiley, New-York, 1978.
[8] GNEDENKO, B.V., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.,* **44** (1943), 423–453.
[9] HALL, P., On the rate of convergence of normal extremes, *J. Appl. Probab.,* **16** (1979), 433–439.
[10] HALL, P., Estimating probabilities for normal extremes, *Adv. Appl. Prob.,* **12** (1980), 491–500.
[11] LECAM, L., An approximation theorem for the Poisson binomial distributions, *Pacific J. Math.,* **10** (1981), 533–547.
[12] OMEY, E., RACHEV, S.T., On the rate of convergence in extreme value theory, *Theory Probab. Appl.,* **33** (1988), 168–177.
[13] REISS, R.D., Uniform approximation to distributions of extreme order statistics, *Adv. Appl. Prob.,* **13** (1981), 533–547.
[14] ROMANOWSKA, M., A note of the upper bound for the distance in total variation between the binomial and the Poisson distributions, *Statistica Neerlandica.,* (1979), 127–130.
[15] SERFLING, R.J., A general Poisson approximation theorem, *Ann. Prob.,* **3** (1975), 726–731.
[16] SMITH, R.L., Uniform rates of convergence in extreme value theory, *Adv. Appl. Prob.,* **14** (1982), 600–622.
[17] ZOLOTAREV, V.M., "Foreword, Stability Problemes for Stochastic Models", Lect. Notes Math. 982, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.