EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **14**, Núm. 1, 1 – 8 (1999)

Periodicite des Solutions d'Equations Differentielles dans les Espaces de Banach

Mohamed Bahaj

Faculty of Sciences and Technology, BP 577, *Settat, Marroc*

(Research paper presented by Juan J. Nieto)

AMS *Subject Class.* (1991): 34C, 34G

Received August 21, 1997

1. Introduction

Nous étudions dans ce papier une classe d'équations différentielles non linéaires du type:

$$x'(t) + g(x(t))\,x(t) = h(t) \tag{1}$$

dans laquelle h est une fonction continue périodique à valeurs dans un espace de Banach quelconque X; muni d'une norme notée $|\,.\,|$, et g est une fonction de X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les hypothèses suivantes:

(A1) $g : X \to \mathbb{R}^+$, $g(x) > 0$, si $x \neq 0$;

(A2) g est continue et bornante c'est à dire applique les ensembles fermés bornés dans les ensembles bornés;

(A3) g est coercive (i.e, $g(x) \to +\infty$, quand $|x| \to +\infty$);

(A4) pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\inf\limits_{|x|\geq\varepsilon} g(x) > 0$;

(A5) $x \to g(x)\,x$ est localement lipschitzienne.

Un cas particulier auquel s'appliquent nos résultats est l'équation:

$$x'(t) + |x(t)|^{\alpha}\,x(t) = h(t) \qquad (\alpha > 0)\ . \tag{2}$$

L'objectif premier de ce papier est de généraliser les résultats de Arino et Hanebaly [2, 5] sur l'existence de solutions périodiques de l'équation (2).

Les résultats de Arino et Hanebaly [2, 5] sont une extension de ceux établis par Bayliss [3] dans le cas où X est un espace de Hilbert, et $\alpha = 1$. La généralisation faite dans [2] s'appuie sur la notion de semi-produit scalaire, à travers laquelle il est possible de montrer que pour $\alpha < 1$, l'opérateur $x \to -|x|^{\alpha} x$ est fortement dissipatif. Des résultats de périodicité et presque-périodicité de l'équation (2) dans un espace de Banach strictement convexe ont été établis par Arino et Bahaj dans [1]. De nombreux travaux ont été élaborés dans cette direction notamment par Lakshmikantham et Leela [6], et Zaidman dans [8]. Dans ce travail nous prouvons l'existence de solutions périodiques de l'équation (2) sans aucune restriction sur α, et dans un espace de Banach quelconque. En dimension infinie Nous montrons ce résultat dans un premier temps sous l'hypothèse $0 \notin \overline{co}(h(\mathbb{R}))$, qui permet d'établir l'existence d'un compact convexe positivement invariant par l'opérateur de Poincaré associé à l'équation (1). Enfin nous établirons ce résultat dans le cas général.

2. Existence Globale des Solutions

Pour toute fonction bornée $h : \mathbb{R} \to X$ notons $|h|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|$.

Théorème 2.1. *Supposons vérifiées les hypothèses* (A1)-(A5), *alors pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$, *l'équation* (1) *a une solution unique,* x *définie sur* $[t_0, +\infty[$, *telle que:* $x(t_0) = x_0$. *De plus, on a l'estimation*

$$|x(t)| \leq \max(R_h, |x_0|) ,$$

où $R_h = \inf\{\rho > 0 : -g(x)|x| + |h|_{\infty} < 0; |x| > \rho\}$.

Preuve. L'hypothèse (A5) entraîne l'existence et l'unicité d'une solution locale de l'équation (1), et qui vérifie: $x(t_0) = x_0$. Notons $x(t)$ la solution maximale, qu'elle est définie sur $[t_0, T^*[$. La fonction $F(t, x) = -g(x)x + h(t)$ est continue en (t, x) et localement lipschitzienne en x. Il est immédiat de constater que l'image par F de tout ensemble fermé, borné de X est un ensemble borné dans X. Nous avons donc:

$$\limsup_{t \to T^*} |x(t)| = +\infty . \tag{3}$$

Donc pour conclure, nous allons démontrer que x est uniformément bornée sur $[t_0, T^*[$. On dénote par $(\cdot, \cdot)_{\pm}$ les semi-produits scalaires associés à l'application de dualité de l'espace X [4, 7]. On a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^-}{dt}\left(|x(t)|^2\right) &= \left(x'(t), x(t)\right)_- \\ &\le \left(-g(x(t))\,x(t), x(t)\right)_- + \left(h(t), x(t)\right)_+ \\ &\le -g(x(t))\,|x(t)|^2 + |h|_\infty |x(t)| \ .\end{aligned}$$

On en conclut:

$$\frac{d^-}{dt}|x(t)| \le -g(x(t))\,|x(t)| + |h|_\infty \ . \tag{4}$$

Soit donc $\frac{d^-}{dt}|x(t)| \le |h|_\infty$. Par intégration entre t_0 et t, avec $t \in [t_0, T^*[$, on obtient l'estimation suivante:

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + |h|_\infty (t - t_0) \ .$$

Ceci entraîne une contradiction avec l'égalité (3). Remarquons que l'hypothèse (A3) de coercivité de g implique que R_h est fini. D'après l'estimation (4), on a:

$$|x(t)| \le \max(R_h, |x_0|) \ .$$

∎

3. Existence de Solutions Périodiques

Notons $R_h = \inf\{\rho > 0 : -g(x)\,|x| + |h|_\infty < 0; |x| > \rho\}$.

Nous allons tout d'abord montrer l'existence de solutions périodiques dans le cas où l'espace X est de dimension finie.

Théorème 3.1. *Supposons en outre les hypothèses suivantes que l'espace X est de dimension finie et h est ω-périodique. Alors, l'équation* (1) *possède une solution ω-périodique.*

Preuve. D'après le théorème 2.1 on a: $|x(t)| \le \max(R_h, |x_0|)$, donc, $\overline{B}(0, R_h)$ est stable par l'opérateur de Poincaré. Par le théorème de point fixe de Brouwer, T possède un point fixe. ∎

Nous supposons maintenant que l'espace de Banach X est de dimension infinie. Nous allons établir la

Proposition 3.2. *Supposons en outre les hypothèses suivantes: l'espace X est de dimension infinie, et*

$$0 \notin \overline{co}\left(h\left(\mathbb{R}\right)\right).$$

Alors, il existe un compact $\widetilde{K}$ contenant $K = \overline{co}\left(h\left(\mathbb{R}\right)\right)$ tel que pour toute solution de l'équation (1) *issue de $\widetilde{K}$ demeure dans $\widetilde{K}$.*

Preuve. Il existe un hyperplan fermé (H); séparant strictement K et 0, c'est à dire qu'il existe une forme linéaire continue x^* et une constante $a >$ 0(qui dépend de h) telle que: $x^*\left(h\left(t\right)\right) = \left(x^*, h\left(t\right)\right) \geq a > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, et on peut supposer $|x^*| = 1$ (par exemple).

Donc on a:

$$\frac{d}{dt}\left(x^*, x\left(t\right)\right) \geq -g\left(x\left(t\right)\right)\left(x^*, x\left(t\right)\right) + a$$

où $x\left(t\right)$ est la solution de l'équation (1), telle que $x\left(0\right) = x_0$. D'où, il résulte que

$$\begin{aligned}(x^*, x(t)) \geq (x^*, x(0)) \exp\left(-\int_0^t g(x(s))ds\right) \\ + a\int_0^t \exp\left(\int_s^t -g(x(u))du\right) ds\end{aligned} \tag{5}$$

Soit $R^* > R_h$, assez grand pour que $K\left(= \overline{co}\left(h\left(\mathbb{R}\right)\right)\right) \subset \overline{B}\left(0, R^*\right)$ et choisissons un réel $b \geq \max\{1, \sup_{|x| \leq R^*} g\left(x\right)\}$. Pour $x\left(0\right)\left(= x_0\right) \in K$, on sait (théorème 2.1) que $\left|x\left(t\right)\right| \leq \max\left(R_h, |x_0|\right) \leq R^*$, et donc $g\left(x\left(t\right)\right) \leq b$. Reportons cette estimation dans (5), on obtient

$$\left(x^*, x\left(t\right)\right) \geq \left(x^*, x_0\right)e^{-bt} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right),\ \ \forall t > 0\,;$$

ainsi $\left(x^*, x\left(t\right)\right) \geq \min\left(a, \frac{a}{b}\right) \geq \frac{a}{b}$, soit alors $\left|x\left(t\right)\right| \geq \frac{a}{b}$, $\forall t > 0$, et compte de l'hypothèse (A4), il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que : $\varepsilon \leq g\left(x\left(t\right)\right),\ \forall t > 0$. D'autre part, nous introduisons le changement de variable temps suivant:

$$\tau\left(t\right) = \int_0^t g\left(x\left(s\right)\right)ds\,.$$

Notons: $y\left(\tau\left(t\right)\right) = x\left(t\right)$. L'équation (1) peut s'écrire en fonction de y et τ, comme suit:

$$y'\left(\tau\right) + y\left(\tau\right) = \widetilde{h}\left(\tau\right) \tag{6}$$

où $\widetilde{h}(\tau) = \frac{h(t(\tau))}{g(x(t(\tau)))}$. L'équation (6) peut être mise sous forme intégrale:

$$y(\tau) = \exp(-\tau)\, y(0) + \int_0^\tau \exp(-(\tau - s))\, \widetilde{h}(s)\, ds\,.$$

Donc, $x(t) \in \overline{co}\left(x(0), \left\{rk; b^{-1} \le r \le \varepsilon^{-1}, k \in K\right\}\right)$, et compte tenu des choix de ε et b : $x(0) \in \left\{rk; b^{-1} \le r \le \varepsilon^{-1}, k \in K\right\}$. D'où:

$$\begin{cases} x(t) \in \widetilde{K},\ \forall t \ge 0\,, \\ \text{avec } \widetilde{K} = \left\{rk; b^{-1} \le r \le \varepsilon^{-1}, k \in K\right\} \cap \overline{B}(0, R^*)\ , \end{cases}$$

on a donc: $\widetilde{K}$ est un compact convexe, et positivement invariant pour l'équation (1), c'est à dire, si $x(0) \in \widetilde{K}$, alors $x(t) \in \widetilde{K}$, $\forall t > 0$.

Nous allons énoncer le résultat principal de ce papier en dimension infinie.

Théorème 3.3. *Supposons vérifiées les hypothèses* (A1)-(A5). *On suppose de plus que h est ω-périodique. Alors l'équation* (1) *possède une solution ω-périodique.*

Preuve. Nous allons distinguer deux cas. 1^er^cas: $0 \notin \overline{co}(h(\mathbb{R}))$. Soit $x_0 \in \widetilde{K}$ $\left(\widetilde{K} = \left\{rk; b^{-1} \le r \le \varepsilon^{-1}, k \in K\right\} \cap \overline{B}(0, R^*)\right)$, et $t \to x(t)$ est la solution de l'équation (1) définie sur $[0, +\infty[$ telle que $x(0) = x_0$. On sait que $x(t) \in \widetilde{K}$, $\forall t \ge 0$. L'unicité de la solution par rapport aux conditions initiales permet de définir l'opérateur de Poincaré associé à l'équation (1).

$$T : \widetilde{K} \to \widetilde{K}; x_0 \to x(\omega)\,.$$

T est continu, $\widetilde{K}$ est un compact convexe, donc par le théorème de Schauder T admet un point fixe. D'où, l'existence d'une solution ω-périodique.

2$^{\text{me}}$cas: $0 \in \overline{co}(h(\mathbb{R}))$. 1$^{\text{re}}$ étape: On considère une suite d'équations régularisées:

$$x'(t) + g(x(t))\, x(t) = h_n(t) \tag{7}$$

où $0 \notin \overline{co}(h_n(\mathbb{R}))$, et $\overline{co}(h_n(\mathbb{R}))$ est un compact; en effet: $K = \overline{co}(h(\mathbb{R}))$ est un compact dans un espace vectoriel de dimension infinie, par conséquent, 0 ne peut être intérieur à K. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \neq 0$ tel que: $|x| = \varepsilon$, et $0 \notin x + K$. On prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$, alors il existe $z_n \in X$, tel que $|z_n| = \frac{1}{n}$, et $0 \notin z_n + K$. On pose $h_n(t) = z_n + h(t)$, on a donc $0 \notin \overline{co}(h_n(\mathbb{R})) = z_n + K$.

Désignons par $x_n(\cdot)$ une solution ω-périodique de l'équation différentielle (7), qui existe d'après le premier cas.

2^{me} étape: Notons $\|K\| = \max\{|k|, k \in K\}$. Et choisissons un réel R^* tel que: $R^* > \max(R_{h+1}, \|K\| + 1)$. Il résulte du preuve du théorème 2.1 que:

- la suite (x_n) est équibornée, plus précisément on a $|x_n|_\infty < R^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- la suite (x_n) est équicontinue, du fait qu'on a l'estimation suivante $\frac{d^-}{dt}|x_n(t)| \leq |h|_\infty + 1$.

Nous allons maintenant établir, en vue d'utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela, que le sous-ensemble de X :

$$K(t) = \{x_n(t)\,; n \in \mathbb{N}\}$$

est relativement compact pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$. Choisissons un réel ρ tel que $0 < \rho < R^*$, et destiné à tendre vers 0, on peut décomposer l'ensemble $K(t)$ en trois parties:
$K_1(t) = \{x_n(t)\,; |x_n(t)| \leq \rho\}$,
$K_2(t) = \{x_n(t)\,; |x_n(s)| > \rho,$ pour tout $0 \leq s \leq t\}$,
$K_3(t) = \{x_n(t)\,; |x_n(t)| > \rho,$ et il existe $t' < t$, tel que $|x_n(t')| \leq \rho\}$.
On choisit ρ assez petit pour que $K_2(t)$ et $K_3(t)$ ne soient pas vides.

Nous allons étudier la mesure de non-compacité de l'ensemble $K(t) = K_1(t) \cup K_2(t) \cup K_3(t)$, plus précisément nous montrons que $\alpha(K_1(t)) \leq \rho, \alpha(K_2(t)) = 0$, et $\alpha(K_3(t)) = 0$. Par définition de la mesure de non-compacité (voir [4.7]) on a immédiatement: $\alpha(K_1(t)) \leq \rho$.

Montrons maintenant que $\alpha(K_2(t)) = 0$. Posons $a = \inf\limits_{|x| \geq \rho} g(x)$, $b = \sup\limits_{|x| \leq R^*} g(x)$; a est strictement positif d'après (A4). Soit $x_n(\cdot)$ une solution périodique de l'équation (7). En utilisant le changement de variables

$$\tau(t) = \int_0^t g(x_n(s))\,ds, \qquad y_n(\tau(t)) = x_n(t)\ ,$$

on en déduit que y_n est solution de l'équation intégrale

$$y_n(\tau) = \exp(-\tau)\,y_n(0) + \int_0^\tau \exp(-(\tau - s))\,\widetilde{h}_n(s)\,ds\,,$$

où $\widetilde{h}_n(s) = \frac{h_n(t(s))}{g(x_n(t(s)))}$, on en déduit que

$$x_n(t) \in \overline{co}\left(x_n(0), \overline{co}\left(\widetilde{h}_n(\mathbb{R})\right)\right)\ .$$

D'autre part on a $g(x_n(t)) \in [a,b]$, pour tout $x_n(t) \in K_2(t)$. L'ensemble $\left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K\right\} \cap \overline{B}(0,R^*)$ est un compact convexe, de plus, grâce aux choix de a et $b\,(a<1, b>1)$, $x_n(0)$ appartient à cet ensemble. Ainsi $x_n(t) \in \left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K\right\} \cap \overline{B}(0,R^*)$,
donc on a

$$K_2(t) \subset \left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K, \text{et } n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Montrons que $\alpha\left(\left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K, \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 0$. On sait que la suite (z_n) converge vers 0, d'autre part

$$\begin{aligned}&\left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K, \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\right\}\\ &\qquad\subset \left\{rz_n; b^{-1} \le r \le a^{-1}, n \in \mathbb{N}^*\right\} + \left\{rk; b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K\right\},\end{aligned}$$

donc on en déduit que $\alpha(K_2(t)) = 0$.

Enfin montrons que $\alpha(K_3(t)) = 0$. Soit $x_n(t) \in K_3(t)$. Il existe des parties de la trajectoire $x_n(\cdot)$ qui sont à l'intérieur de la boule $\overline{B}(0,\rho)$ et d'autre qui sont extérieur à $\overline{B}(0,\rho)$. Par conséquent, on peut trouver $\underline{t}$, qui dépend de n tel que $|x_n(\underline{t})| = \rho$, et $|x_n(s)| > \rho$, pour tout $s \in]\underline{t}, t]$.

Nous utilisons le même argument que précédemment on a

$$x_n(t) \in \overline{co}\left(x_n(\underline{t}), \overline{co}\left(\left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K\right\}\right)\right).$$

Grâce aux choix de a et $b\,(a<1, b>1)$ et au fait que $x_n(\cdot)$ est ω-périodique on a

$$x_n(t) \in \left\{r(z_n+k)\,;b^{-1} \le r \le a^{-1}, k \in K\right\} \cap \overline{B}(0,R^*).$$

Et on termine comme précédemment, pour conclure que $\alpha(K_3(t)) = 0$.
D'où le résultat. On fait ensuite tendre ρ vers 0, on en déduit que $\alpha(K(t)) = 0$. Donc pour tout $t \ge 0, \{x_n(t)\,; n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact.

On en conclut que la suite (x_n) vérifie les conditions du théorème d'Ascoli-Arzela, par conséquent, la suite (x_n) a des sous suites convergentes sur les compacts. Comme, dans le cas périodique la convergence uniforme sur $[0,\omega]$ est équivalente à la convergence sur $\mathbb{R}$, donc la fonction limite est bien solution ω-périodique de l'équation (1).

COROLLAIRE 3.4. *Supposons que h est ω-périodique, $(\omega > 0)$, alors l'équation (2) possède une solution ω-périodique.*

Références

[1] Arino, O. , Bahaj, M. , Periodic and almost-periodic solutions of differential equations in Banach spaces, *Non Linear Anal. Theo., Meth. & Appli.* **26** (2) (1996), 335 – 341.

[2] Arino, O. , Hanebaly, E. , Solutions presque-périodiques de: $(d/dt)x(t) + |x(t)|^\alpha x(t) = h(t)$ $(\alpha \geq 0)$ sur les espaces de Banach, *C.R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), 707 – 710.

[3] Bayliss, A. , Forced oscillations in quadratically damped systems, *Communs Pure Appl. Math.* **XXXI** (1978), 69 – 88.

[4] Deimling, K. , "Ordinary Differential Equations in Banach Space", LNM no. 596, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] Hanebaly, E. , "Contribution à l'Étude des Solutions Périodiques et Presque-périodiques d'Équations Différentielles non Linéaires sur les Espaces de Banach", Thèse d'état, Université de Pau, 1988.

[6] Lakshmikantham, V. , Leela, S. , "Non Linear Differential Equations in Abstract Spaces", Pergamon Press, New York, 1981.

[7] Martin, R.H. , "Non Linear Operators and Differential Equations in Banach Spaces", John Wiley, New York, 1976.

[8] Zaidman, S. , "Topics in Abstract Differential Equations", Longman Sci. Tech., New York, 1994.