EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **14**, Núm. 3, 333 – 347 (1999)

Sur les Suranneaux Minimaux

M. Oukessou and A. Miri

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 1014-*Rabat, Maroc*

(Research paper presented by J.A. Navarro)

AMS *Subject Class.* (1991): 13B02, 13G05 *Received May* 30, 1998

1. Introduction

Soient R un domaine et T un domaine contenant strictement R, si l'extension $R \subset T$ n'admet pas un anneau intermédiaire propre, et R n'est pas un corps, on dit que T est un suranneau minimal de R; on dira aussi que l'extension $R \subset T$ est minimale. J. Sato et K.I. Yoshida ont montré dans [14] qu'un domaine noethérien R admet un suranneau minimal s'il satisfait l'une des conditions suivantes:

(a) $\dim R = 1$,

(b) $\dim R \geq 2$ et R admet un idéal maximal η, avec $G(\eta) = 1$ tel que $\overline{R}$ est un R-module de type fini ou bien $\forall M \in \operatorname{spec}(\overline{R})$ avec $M \cap R = \eta$ et $p \subset \eta$ avec $p \in \operatorname{spec}(R)$, il existe $Q \in \operatorname{spec}(\overline{R})$ tel que $Q \subset M$ et $Q \cap R = p$.

Ils ont aussi montré que sous certaines conditions, un domaine noethérien ne peut pas admettre un suranneau minimal. Dans la première section de ce papier, on déterminera les suranneaux minimaux d'un anneau de Dedekind, et on va montrer que les suranneaux minimaux d'anneau principal sont principaux de la forme $R[1/q]$ où q est un élément premier de R, et que si R est un domaine réflexif local d'idéal maximal non principal, alors R admet un suranneau minimal T local entier sur R. Si T est un suranneau minimal de R, alors ou bien T est entier sur R, ou bien T est R-plat. On va ensuite examiner le transfert de minimalité dans les extensions $R[X] \subset T[X]$, $R_S \subset T_S$ et $R/Q \cap R \subset T/Q$ où S est une partie multiplicative de R et $Q \in \operatorname{spec}(T)$. Dans la deuxième section, on étudiera certaines propriétés de l'extension $R \subset T$. Un résultat fondamental indique que ou bien T est entier sur R ou bien T est R-plat. Si T est R-plat, alors tous les idéaux premiers de R se relèvent à T sauf un seul, et si R est local, alors T est local. Dans le cas où T est

R-plat et $(R : T) = 0$, alors $\dim R = \dim T$ et pour tout idéal Q de T, Q est premier (resp. maximal) de T si et seulement si $Q \cap R$ est premier(resp. maximal) de R, de plus T/R est un R-module divisible. On achévera ce travail par l'examen de certains caractères de $R \subset T$ dans le cas où R est noethérien, on va montrer en particulier que si R est de Macaulay, alors T est aussi de Macaulay.

Définition 1.1. Soient R un anneau intègre, et T un domaine contenant strictement R. Si R n'est pas un corps, et l'extension $R \subset T$ n'admet pas d'anneaux intermédiaires propres, on dit que T est un suranneau minimal de R.

Lorsque un tel suranneau minimal T existe, alors $T \subseteq K$ [14].

2. Caractérisation des suranneaux minimaux d'un anneau de Dedekind

D'après [14, Th. 3], un anneau de Dedekind admet un suranneau minimal; on se propose donc de déterminer ses suranneaux minimaux .

Théorème 2.1. *Soit R un anneau de Dedekind, les suranneaux minimaux de R sont les $T_{(\eta)}$ où $T_{(\eta)} = \cap\{R_P : p \in \mathrm{spec}(R), p \neq \eta\}$ et η décrit l'ensemble des idéaux maximaux de R.*

Démonstration. Soit η un idéal maximal de R, et posons $A = \cap\{R_P : p \in \mathrm{spec}(R), p \neq \eta\}$; comme R est un anneau de Krull et R_P est un anneau de valuation discrète $\forall p \in \mathrm{spec}(R)$, alors d'après [8, p. 82] $R \neq A$. Montrons que A est un suranneau minimal de R . Pour cela considérons un anneau B tel que $R \subset B \subseteq A$, et vérifions que $B = A$ c'est à dire $B_p = A_p$ $\forall p \in \mathrm{spec(R)}$. Soit $p \in \mathrm{spec}(R)$ tel que $p \neq 0$ et $p \neq \eta$, alors $R_p \subseteq B_p \subseteq A_p \subset K$, comme R_p est un anneau de valuation discrète, alors $R_p = B_p = A_p$. Si $p = 0$, alors $R_{(0)} = B_{(0)} = A_{(0)} = K$, et si $p = \eta$, alors $R_\eta \neq B_\eta$ car $R \neq B$, parsuite $B_\eta = K$; ce qui entraîne que $B_\eta = A_\eta = K$. Finalement $\forall p \in \mathrm{spec}(R)$, on a $B_p = A_p$. Soit maintenant T un suranneau minimal de R, donc $R \subset T \subseteq K$, et d'après [7, Prop. 3.32], il existe un unique sous ensemble $\triangle$ de l'ensemble des idéaux maximaux de R noté $\sum$, tel que:

$T = \cap\{R_p : p \in \triangle\}$. Si $\triangle = \sum$, on aura $R = T$, donc il existe $\eta \in \sum$ et $\eta \notin \triangle$.

$B = \cap\{R_P : p \in \sum, p \neq \eta\}$. D'après ce qui précède on a $B \neq R$, donc $R \subset B \subseteq T$ parsuite $T = B = T_{(\eta)}$. ∎

Remarque 2.1. Soient η et η' deux idéaux maximaux de R tel que $\eta \neq \eta'$, d'après [7, Prop. 3.32] $T_{(\eta)} \neq T_{(\eta')}$ autrement dit, si R admet une infinité d'idéaux maximaux, alors R admettra une infinité de suranneaux minimaux.

Comme conséquence du théorème précédent, on va déterminer une forme plus simple des suranneaux minimaux d'un anneau principal.

PROPOSITION 2.1. *Soit R un anneau principal.*

(a) *Les suranneaux minimaux de R, sont les $R[1/q]$, où q décrit l'ensemble des éléments premiers de R.*
(b) *Les $R[1/q]$ sont aussi principaux.*

Démonstration. (a) D'après le théorème précédent, les suranneaux minimaux de R sont les $T_{(\eta)} = \cap\{R_p : p \in \operatorname{spec}(R),\ p \neq \eta\}$; or R est principal, donc $p = (p)$ et $\eta = (q)$ où p et q sont deux éléments premiers de R non associés. D'autre part, $(p) \neq (q) \Longrightarrow 1/q \in R_{(p)}$ c'est à dire que $R[1/q] \subseteq R_{(p)}$, parsuite $R[1/q] \subseteq T_{(\eta)}$; et comme $T_{(\eta)}$ est minimal sur R et $R \neq R[1/q]$, alors $T_{(\eta)} = R[1/q]$.

(b) Soit U un idéal non nul de $R[1/q]$. Considérons I l'ensemble des numérateurs des fractions de U; I est un idéal de R, donc $I = aR$ avec $a \in I$ parsuite $U = aR[1/q]$, ce qui montre que $R[1/q]$ est un anneau principal. ∎

EXEMPLE 2.1. Les suranneaux minimaux de Z, $K[X]$, où K est un corps et Z l'ensemble des entiers relatifs, sont respectivement $Z[1/p]$, $K[X][1/\mu]$ oú p est un entier premier de Z et μ est un irréductible de $K[X]$.

Remarque 2.2. Soient R un domaine et $(T_i)_{i \in I}$ une famille de suranneaux minimaux de R, alors $R = \cap_{i \in J} T_i$ où $J \subseteq N$. En particulier, si R est principal, alors $\cap_q R[1/q] = R$, q décrit l'ensemble des éléments premiers de R.

DÉFINITION 2.1. soient R un domaine, et I un idéal fractionnaire de R; on dit que I est divisoriel si $(I^{-1})^{-1} = I$ avec $I^{-1} = (R : I)_K = \{x \in K : xI \subseteq R\}$. On dit que R est réflexif, si tous ses idéaux fractionnaires sont divisoriels.

Théorème 2.2. *Soit* (R,η) *un domaine réflexif local d'idéal maximal* η. *On suppose que* η *est non principal, alors :*

(a) R *admet un suranneau minimal* T *entier sur* R.

(b) T *est local et* T/R *est un* R*-module simple.*

Démonstration. (a) On a $\eta \subseteq \eta\eta^{-1} \subseteq R$, ceci entraîne que $\eta\eta^{-1} = \eta$ ou $\eta\eta^{-1} = R$, or si $\eta\eta^{-1} = R$ alors η serai principal [12, Th. 1, p. 193], d'où $\eta\eta^{-1} = \eta$. Posons $T = \eta^{-1} = (K : \eta)_K$, donc $R \subseteq T$. Si $T = R$ ceci entraîne que $\eta\eta^{-1} = R$, donc $R \subset T$. Montrons que T est un suranneau minimal de R. Pour cela considérons un anneau S tel que $R \subset S \subseteq T$, ceci entraîne que $(R : T)_K \subseteq (R : S)_K$, et comme R est réflexif alors $(R : T)_K = \eta\eta^{-1} = \eta$. D'autre part $(R : S)_K$ est un idéal de R, donc $\eta \subseteq (R : S)_K \subseteq R$, parsuite $(R : S)_K = \eta$ ou $R = (R : S)_K$; or ce dernier cas ne peut pas exister car $S \neq R$, d'où: $(R : S)_K = \eta \Rightarrow (R : (R : S)_K)_K = (R : \eta)_K$ ie $S = T$, parsuite T est minimal sur R. Vérifions que T est entier sur R. On sait que $T = R[z]$ avec $z \in T\backslash R$; soit $m \in \eta \Rightarrow zm \in R$ ie $m \in Rz^{-1} \cap R$, d'où $\eta = Rz^{-1} \cap R = (R : R+Rz)_K$. D'autre part, $T = (R : \eta)_K = (R : (R : R+Rz)_K)_K = R+Rz$, car $R + Rz$ est un idéal fractionnaire de R, donc T est un R-module de type fini ie T est entier sur R.

(b) Comme T est entier sur R, alors d'après [6, Lemme 2.3], T admet au plus deux idéaux maximaux. Supposons que T n'est pas local et soient M_1, M_2 les deux idéaux maximaux de T alors $M_1 \cap R = M_2 \cap R = \eta$. D'autre part, il n'existe aucun idéal propre entre η et M_1 ainsi qu'entre η et M_2. En effet: Soit J un idéal tel que $\eta \subset J \subset M_1$, donc $J \cap M_1 = M_1 \cap R = \eta$ [6, Lemme 2.1], d'où $J = \eta$, ceci est absurde. Puisque $M_1 \neq M_2$, alors ils existent $\alpha,\beta \in T$ tel que $\alpha \in M_1\backslash\eta$ et $\beta \in M_2\backslash\eta$, donc on a $\eta \subset \eta + \alpha T \subseteq M_1$ et $\eta \subset \eta + \beta T \subseteq M_2$, parsuite $\eta + \alpha T = M_1$ et $\eta + \beta T = M_2$. Soit $z \in M_1$ tel que $z \notin R$, donc $T = R[z] = R + Rz$. On a $\alpha \in T$, donc $\alpha = a + bz$ avec $a,b \in R$, parsuite $\eta \subseteq \eta + bzT \subseteq M_1 = \eta + aT + bzT$. Si $\eta = \eta + bzT$ alors $bz \in \eta$ d'où $a = \alpha - bz \in M_1\backslash\eta$ et $a \in R$ ie a est inversible, ceci est impossible, parsuite $M_1 = \eta + bzT \subseteq \eta + zT \subseteq M_1$ ie $M_1 = \eta + zT$. De mêmme $\beta = c + dz$ avec $c,d \in R$ et en raisonnant de la mêmme manière que précédement, on aura $M_2 \subseteq \eta + zT \subseteq T$. D'où $M_2 = \eta + zT$ ou $\eta + zT = T$. Supposons que $\eta + zT = T$, comme $\eta = \eta T$ [5, Th. 2.2] et T est un R-module de type fini, alors en utilisant Nakayama, on aura $zT = T$ c'est à dire que z est inversible dans T, ceci est en contradiction avec $z \in M_1$, d'où $M_2 = \eta + zT = M_1$; finalement T est local. Soit L un sous R-module de K tel que $R \subseteq L \subseteq T = \eta^{-1} \Rightarrow \eta \subseteq L^{-1} \subseteq R$ ie $\eta = L^{-1}$ ou $L^{-1} = R$ parsuite $L = T$ ou $L = R$, d'où les seuls sous R-modules de T/R sont 0 et T/R. ∎

Remarque 2.3. Avec les mêmes hypothèses du théorème précédent , on donnera une information supplémentaire sur l'extension $R \subset T$, dont la démonstration a été donnée dans [2, Th. 5.7].

Soit M l'idéal maximal de T.

(a) Si $\eta \subset M$, alors M/η est simple en tant que R-module ainsi que T-module; de plus $M^2 \subseteq \eta$ et $(R : M)_K = M$.

(b) Si $\eta = M$, alors T est un domaine de valuation.

Dans la proposition suivante, on va examiner la minimalité dans les extensions $R[X] \subset T[X]$, $R_S \subset T_S$ et $R/Q \cap R \subset T/Q$.

Proposition 2.2. *Soit $R \subset T$ une extension de domaines.*

(i) a) *Si $T[X]$ est un suranneau minimal de $R[X]$, alors T est minimal sur R.*

b) *Si T est minimal sur R, alors $T[X]$ n'est jamais minimal sur$R[X]$.*

(ii) *On suppose que T est un suranneau minimal de R.*

a) *Pour toute partie multiplicative S de R tel que $R_S \neq T_S$, T_S est un suranneau minimal de R_S.*

b) *Pour tout $Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $T/Q \neq R/Q \cap R$ et $Q \cap R$ est non maximal, alors T/Q est minimal sur $R/Q \cap R$.*

Démonstration. (i-a) Soit B un anneau tel que $R \subset B \subseteq T$, donc $R[X] \subset B[X] \subseteq T[X]$ parsuite $T[X] = B[X]$ ie $T = B$.

(i-b) Si T est minimal sur R, alors $R + XT[X]$ est un anneau tel que: $R[X] \subset R + XT[X] \subset T[X]$.

(ii-a) Soit B un anneau tel que $R_S \subset B_S \subseteq T_S$, donc $R \subseteq B \cap T \subseteq T$ ainsi $R = B \cap T$ ou $B \cap T = T$. Or il existe $z = y/s \in B$ avec $y \in T$ et $s \in S$, donc $sz = y \in B \cap T \backslash R$, d'où $B \cap T = T$. D'autre part $B = BR_S = B_S \subseteq T_S$ et $(B \cap T)_S = T_S \subseteq B$, on déduit que $B = T_S$, autrement dit T_S est un suranneau minimal de R_S.

(ii-b) On a $R/Q \cap R = (R + Q)/Q$, or $R + Q = T$ ou $R + Q = R$; l'hypothèse entraîne que $R + Q = R$ ie $Q \subseteq (R : T)$. Soit S un anneau tel que $R/Q \cap R = R/Q \subset S \subseteq T/Q$ donc $\Phi^{-1}(R/Q) \subset \Phi^{-1}(S) \subseteq \Phi^{-1}(T/Q)$ où $\Phi : T \longrightarrow T/Q$ est la surjection canonique, ce qui montre que $R \subset \Phi^{-1}(S) \subseteq T$ d'où $\Phi^{-1}(S) = T$ ie $S = T/Q$. ∎

Corollaire 2.1. *Soit $R \subset T$ une extension de domaines. On suppose que $(R : T) = I$ est un idéal premier de T et non maximal de R; alors T est minimal sur R, si est seulement si, T/I est minimal sur R/I.*

Démonstration. Supposons que T est minimal sur R, si $I = 0$ c'est évident et si $I \neq 0$, alors $T/I \neq R/I$ et d'après la proposition précédente, T est minimal sur R. Inversement: Soit S un anneau tel que $R \subset S \subseteq T$, donc $R/I \subset S/I \subseteq T/I$ ie $S/I = T/I$, parsuite $S = T$. ∎

Remarque 2.4. La minimalité n'est pas conservée par passage aux anneaux de polynômes, on peut illustrer ceci par un exemple déjà étudié: Soit $Z[1/2]$ un suranneau minimal de Z, alors on a $Z[X] \subset Z[X/2] \subset Z[1/2][X]$.

Si T est un suranneau minimal de R, alors pour tout idéal premier p de R tel que $R_p \neq T_p$, T_p est un suranneau minimal de R_p.

3. Quelques propriétés des suranneaux minimaux

Parmi ces propriétés la platitude qui est fondamentale puisqu'elle va servir à étudier certains caractères de l'extension $R \subset T$.

LEMME 3.1. *Soit $R \subset T$ une extension minimale, alors ou bien T est entier sur R ou bien R est intégralement fermé dans T.*

Démonstration. On a $R \subseteq \overline{R}$ et $R \subset T$, donc $R \subseteq \overline{R} \cap T \subseteq T$, et comme T est minimal sur R alors ou bien $R = \overline{R} \cap T$, i.e., R est intégralement fermé dans T, ou bien $T = \overline{R} \cap T$, i.e., T est entier sur R. ∎

THÉORÈME 3.1. *Soit $R \subset T$ une extension minimale alors:*

(a) *T est R-plat, si et seulement si, R est intégralement fermé dans T.*
(b) *T n'est jamais fidèlement R-plat.*
(c) *Si T est R-plat, alors $\overline{T}$ est $\overline{R}$-plat.*

Démonstration. (a) Supposons que T est R-plat. Si R n'est pas intégralement fermé dans T, alors le lemme précédent entraîne que T est entier sur R, et d'après [13, Prop. 2], $T = R$, ce qui est absurde. Inversement, supposons que R est intégralement fermé dans T. Tout d'abords l'injection $i : R \longrightarrow T$ est un homomorphisme minimal selon la définition de [5], et d'après [5, Th. 2.2], il existe un idéal maximal η de R tel que $R_p = T_p$ $\forall$ $p \in spec(R)$ et $p \neq \eta$; donc pour que T soit R-plat, il suffit d'après [12, Th. 2] que $\eta T = T$. Or, si $\eta T \neq T$, alors il existe un idéal maximal M de T tel que $\eta T \subseteq M$ ie $M \cap R = \eta$, et en utilisant [2, Th. 2.2] T serai entier sur R.

(b) Si T est fidèlement R-plat, alors $T = R$ [9, 4.A].

(c) Si $\overline{T} = \overline{R}$ c'est évident. Supposons que $\overline{R} \subset \overline{T}$ et montrons que $\forall Q \in \operatorname{spec}(\overline{R})$ on a $\overline{T}_Q = \overline{R}_Q$ ou $Q\overline{T} = \overline{T}$. Posons $q = Q \cap R$, d'après (a) il existe un idéal maximal η de R tel que $R_p = T_p \forall p \in \operatorname{spec}(R)$ avec $p \neq \eta$. Si $q \neq \eta$ alors $R_q = T_q$, parsuite $\overline{T}_Q = \overline{R}_Q$. Si $q = \eta$ alors $\eta T = T$, parsuite $Q\overline{T} = \overline{T}$. ∎

Remarque 3.1. En utilisant ce dernier théorème et [12, Th. 6], on déduit que les suranneaux minimaux d'un anneau de Dedekind notés $T_{(\eta)}$, sont aussi des anneaux de Dedekind.

On examinera dans la proposition suivante les propriétés going–dowm (GD) et going–up (GU) dans une extension minimale.

PROPOSITION 3.1. *Soit $R \subset T$ une extension minimale.*

(a) *$R \subset T$ satisfait* GU *si et seulement si T est entier sur R.*
(b) *Si R est intégralement fermé dans T, alors* GD *est vérifiée dans $R \subset T$.*
(c) *Si T est entier sur R et* $\operatorname{spec}(T) \longmapsto \operatorname{spec}(R)$ *est injective, alors $R \subset T$ satisfait* GD.

Démonstration. (a) Si T est entier sur R, on utilise [9, 5.E]. Supposons que T n'est pas entier sur R, alors T est R-plat sans être fidèlement R-plat, parsuite l'application: $\operatorname{spec}(T) \longrightarrow \operatorname{spec}(R)$ n'est pas surjective [9, 4.D]; d'où il existe $p \in \operatorname{spec}(R)$ avec $p \neq 0$ tel que $\forall Q \in \operatorname{spec}(T)$, $Q \cap R = p$ autrement dit la suite $0 \subset p$ ne satisfait pas GU.

(b) Il suffit de remarquer que T est R-plat et appliquer [9, 5.D].

(c) On applique [11, Cor. 2.9]. ∎

PROPOSITION 3.2. *Soit $R \subset T$ une extension minimale.*

(i) *Si T est entier sur R, alors $(R : T) = \eta$ est un idéal maximal de R.*
(ii) *Si R est intégralement fermé dans T alors:*
   (a) *$(R : T) = I$ est un idéal premier de T, de plus I est nul s'il est de type fini entant qu'idéal de R.*
   (b) *Tous les idéaux premiers de R se relèvent à T sauf un seul.*
(iii) *$S = T \backslash R$ est multiplicativement stable, si et seulement si, R est intégralement fermé dans T.*

Démonstration. (i) Posons $C = (R : T) = x \in R : xT \subseteq R$, C est le plus grand sous ensemble de K qui est à la fois un idéal de R et de T; or d'après [5,Th. 2.2] il existe un idéal maximal η de R tel que $\eta T = \eta$, i.e., $\eta \subseteq C$, parsuite $\eta = C$.

(ii-a) Soient $I = (R : T)$ et $x,y \in T$ tel que $xy \in I$ et $y \notin I$ alors $xyT \subseteq R$ et yT n'est pas inclu dans R parsuite $R + yT = T$. D'autre part, $x = a + yt$ où $a \in R$ et $t \in T$, donc $x^2 - ax - xyt = 0$ ce qui montre que x est entier sur R, d'où $x \in R$ et $xT = xR + xyT \subseteq R$, i.e., $x \in I$. Supposons que I est non nul; on a $T = R[z]$ avec $z \in T \backslash R$ donc $zI \subseteq I$, ceci entraîne que z est entier sur R; ce qui est absurde.

(ii-b) T étant minimal sur R, d'après [5, Th. 2.2] il existe un idéal maximal η de R tel que $R_p = T_p$ pour tout $p \in \operatorname{spec}(R)$ et $p \neq \eta$; donc si $p \in \operatorname{spec}(R)$ tel que $p \neq \eta$, alors $p = Q \cap R$ avec $Q = pT_p \cap T \in \operatorname{spec}(T)$. Si $p = \eta$ alors $R_\eta \neq T_\eta$, et comme T est R-plat, alors $\eta T = T$, par suite η ne relève pas à T.

(iii) T est R-plat sans être fidèlement plat, donc il existe un idéal premier p de R tel que pour tout idéal premier Q de T, on a $Q \cap R = p$; La minimalité de T sur R entraîne que $R \subset T$ satisfait la propriété (p_1) de [16], puis on obtient le résultat en utilisant [16, Th. 7]. Si $S = T \backslash R$ est multiplicativement stable, alors supposons qu'il existe $x \in T$ tel que x est entier sur R et $x \notin R$, donc x satisfait l'équation: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ où $a_i \in R$; puisque T est intègre, on peut supposer que $a_0 \neq 0$, donc $a_0 = -x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) \in R$, parsuite $x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \in R$ et on continue l'opération jusqu'à ce qu'on trouve $x \in R$ ce qui contredit l'hypothèse. ∎

Lemme 3.2. *Soit $R \subset T$ une extension minimale. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *T est R-plat et $(R : T) = 0$.*

(b) *Pour tout idéal I non nul de T on a: $T/I \cong R/I \cap R$ et $I = T(I \cap R)$.*

Démonstration. (a)⇒(b) Soit I un idéal non nul de T; on a $R \subseteq R+I \subseteq T$, ceci entraîne que $R+I = T$ ou $R+I = R$. Si $R+I = R$, alors $I \subseteq (R : T)$, i.e., $I = 0$, ce qui est absurde, d'où $R+I = T$, et on déduit que $T/I = (R+I)/I \cong R/I \cap R$. Posons $J = (I \cap R)T$, J est un idéal non nul de T et $J + R = T$. Soit $x \in I$, alors $x = r + j$ avec $r \in R$ et $j \in J$ donc $r \in R \cap I \subseteq (R \cap I)T = J$ ce qui montre que $x = r + j \in J$, i.e., $I \subseteq J$ et comme $J \subseteq I$ alors $I = J$.

(b)⇒(a) Supposons que $I = (R : T) \neq 0$, alors $T/I \cong R/I \cap R = R/I$, parsuite $R = T$, ce qui est impossible, d'où $(R : T) = 0$, ceci montre d'après Prop. 3.2 que T est nécessairement R-plat . ∎

Théorème 3.2. *Soient T un suranneau minimal de R tel que T est R-plat.*

(a) *Si $(R : T) = 0$, alors pour tout idéal Q de T; Q est maximal (resp. premier) si et seulement si $Q \cap R$ est maximal (resp. premier) de R.*

(b) *Si R est local, alors T est local.*

Démonstration. (a) Soit Q un idéal de T. Si $Q = 0$, c'est évident. Supposons donc que Q est non nul, d'après le lemme précédent on a $T/Q \cong R/R \cap Q$, d'où le résultat.

(b) Cas 1: $(R : T) = 0$. D'après [5, Prop. 3.3], R est un anneau de valuation de hauteur 1, parsuite T est aussi de valuation.

Cas 2: $(R : T) = I \neq 0$. Supposons que T contient deux idéaux maximaux distincts M_1, M_2 tel que $I \subseteq M_1$. L'application: $\text{spec}(T) \longrightarrow \text{spec}(R)$ est injective, donc $N_1 = M_1 \cap R \neq M_2 \cap R = N_2$. Vérifions que $I = N_1$; soit $x \in N_1 \subseteq \eta$, où η est l'idéal maximal de R, donc $xT = T$ ou $xT \subseteq R$ [5, Lem. 2.1]. Si $xT = T$, alors x est inversible dans T, ceci contredit $x \in M_1$, d'où $xT \subseteq R$, i.e., $x \in (R : T) = I$ c'est à dire que $N_1 \subseteq I$, et comme $I \subseteq N_1$ alors $I = N_1$. On vérifie de même que $N_2 \subset I = N_1 = M_1 \cap R$, et comme $R \subset T$ satisfait going-down, alors il existe $Q \in \text{spec}(T)$ tel que $Q \subset M_1$ et $Q \cap R = N_2$. D'autre part $Q \cap R = M_2 \cap R = N_2$, ce qui entraîne que $Q = M_2$, i.e., $M_1 = M_2$, d'où une contradiction. ∎

Corollaire 3.1. *Soient R un domaine noethérien, et T un suranneau minimal de R, alors:*

(a) *Q est un idéal maximal (resp. premier) de T, si et seulement si, $Q \cap R$ est un idéal maximal (resp. premier) de R.*

(b) *Si R est local et T est R-plat, alors T est aussi local.*

Démonstration. Si T est entier sur R, c'est évident. Si T est R-plat, alors d'après la Prop. 3.2, $(R : T) = 0$, puis on applique le théorème précédent pour le reste du corollaire. ∎

Remarque 3.2. Soit T un suranneau minimal de R tel que T est local.
- Si T est entier sur R, alors R est local.
- Si T est R-plat, alors R n'est pas nécessairement local. En effet il suffit de prendre R un anneau de Prüfer admettant exactement deux idéaux maximaux, et appliquer [10 ,Th. 3.4].

Proposition 3.3. *Soit $R \subset T$ une extension minimale. T/R est un R-module divisible si et seulement si T est R-plat et $(R : T) = 0$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que T est non R-plat, donc T est un R-module de type fini de même que T/R. Or $aT/R = T/R \; \forall \; a \in R$ avec $a \neq 0$, en particulier pour $a \in J(R)$, Nakayama entraîne que $T/R = 0$, i.e., $T = R$, ce qui est absurde.

($\Leftarrow$) Soit $a \in R$ tel que $a \neq 0$, on a $R \subseteq R + aT \subseteq T$, donc $R + aT = T$ ou $R + aT = T$. Si $R + aT = R$ alors $a \in (R : T) = 0$, d'où $R + aT = T$ c'est à dire que $aT/R = T/R$. ∎

EXEMPLE 3.1. Si R est noethérien et T minimal sur R, alors T/R est R-divisible, si et seulement si, R est intégralement fermé dans T.

PROPOSITION 3.4. *Soit T un suranneau minimale de R.*

(a) *Si R est intégralement clos, alors $\forall\ p \in \operatorname{spec}(R)$, T_p est local intégralement clos.*

(b) *Si T est R-plat et $I = (R : T) \neq 0$, alors R n'est jamais complètement intégralement clos, de plus I n'est jamais principal dans R.*

(c) *$R + XT[X]$ est intégralement clos, si et seulement si, R est intégralement clos; mais $R + XT[X]$ n'est jamais complètement intégralement clos.*

Démonstration. (a) Soit $p \in \operatorname{spec}(R)$; si $p = 0$ alors $R_p = T_p = K$. Supposons donc $p \neq 0$; si $R_p = T_p$, c'est évident, et si $R_p \neq T_p$, alors T_p est un suranneau minimal de R_p (prop2.2), comme T_p est R_p-plat, alors T_p est intégralement clos, et en utilisant le théorème 3.2, on déduit que T_p est local.

(b) Concidérons $C = (I : I)_K = \{x \in K : xI \subseteq I\}$. C est un anneau vérifiant: $R \subset T \subseteq C \subseteq K$. Soit $x \in C \backslash R$, donc $\forall\ n \geq 0$ on a $x^n I \subseteq I \subseteq R$, c'est à dire que x est quasi-entier sur R. Supposons que I est un idéal principal de R, donc $I = aR$ avec $a \in R$, d'où $C = R$ ceci est absurde.

(c) Il suffit d'appliquer [2, Th. 2.7]. ∎

Dans ce qui suit on suppose que la dimension de R est finie, et on comparera les dimensions de R et T.

THÉORÈME 3.3. *Si T est R-plat et $(R : T) = 0$, alors $\dim R = \dim T$.*

Démonstration. Posons $\dim R = r$ et $0 = p_r \subset p_{r-1} \subset \cdots \subset p_1 \subset p_0$ une chaîne d'idéaux premiers de R réalisant la dimension de R, et faisons une discussion sur l'idéal p_0.

Cas 1: $p_0 \neq \eta$ où η est l'idéal maximal de R vérifiant $R_p = T_p\ \forall\ p \in \operatorname{spec}(R)$ et $p \neq \eta$, voir [5, Th. 2.2], donc $\forall\ i \in [0,r]$, $p_i \neq \eta$, et d'après la Prop. 3.2, tous les p_i se relèvent à T. Et comme $R \subset T$ satisfait going-down, alors ils existent $(Q_i)_{i\in[0,r]}$ des idéaux premiers de T tel que: $0 = Q_r \subset Q_{r-1} \subset \cdots \subset Q_1 \subset Q_0$ vérifiant $Q_i \cap R = p_i$; d'où $\dim T \geq \dim R$.

Cas 2: $p_0 = \eta$. Alors $\forall i \in [1,r]$, p_i se relève à T, la propriété going-down entraîne qu'ils existent $(Q_i)_{i\in[1,r]}$ des idéaux premiers de T, tel que $0 = Q_r \subset Q_{r-1} \subset \cdots \subset Q_1$ et $Q_i \cap R = p_i \ \forall i \in [1,r]$. D'autre part, p_1 n'est pas un idéal maximal de R, et d'après le théorème 3.2, Q_1 n'est pas un idéal maximal de T. Soit Q_0 un idéal maximal de T contenant Q_1. On a donc construit la chaîne suivante: $0 = Q_r \subset Q_{r-1} \subset \cdots \subset Q_1 \subset Q_0$, autrement dit $\dim T \geq \dim R$; dans les deux cas on a toujours $\dim T \geq \dim R$. Inversement: Supposons que $\dim T = t$ et posons $0 = Q_t \subset Q_{t-1} \subset \cdots \subset Q_1 \subset Q_0$ une chaîne d'idéaux premiers de T réalisant la dimension de T, comme $\mathrm{spec}(T) \longrightarrow \mathrm{spec}(R)$ est injective, alors $0 = Q_t \cap R \subset Q_{t-1} \cap R \subset \cdots \subset Q_1 \cap R \subset Q_0 \cap R$, parsuite $\dim R \geq \dim T$; finalement on déduit que $\dim R = \dim T$. ∎

Corollaire 3.2. *Soit $R \subset T$ une extension minimale tel que R est noethérien, alors* $\dim R = \dim T$.

Proposition 3.5. *Soit $R \subset T$ une extension minimale. On suppose que T est R-plat et* $\dim R/I \leq \dim T/I$, *avec $I = (R : T)$, alors* $\dim R = \dim T$.

Démonstration. Puisque $\mathrm{spec}(T) \longrightarrow \mathrm{spec}(R)$ est injective, alors $\dim T \leq \dim R$. Posons $F = \{Q \in \mathrm{spec}(T) : I \subseteq Q\}$, d'après [3,Th. 1], on a $\dim R \leq \sup\{\dim T,\ ht(Q) + \dim(R/Q \cap R) \text{ où } Q \in F\}$. $ht(Q) + \dim(R/Q \cap R) = ht(Q) + \dim(R + Q)/Q$, or $R + Q = R$ ou $R + Q = T$. Si $R + Q = R$, alors $Q = I$, dans ce cas $ht(I) + \dim(R/I) \leq ht(I) + \dim(T/I) \leq \dim T$. Si $R + Q = T$, alors $ht(Q) + \dim(R/Q \cap R) = ht(Q) + \dim(T/Q) \leq \dim T$, on déduit que dans tous les cas on a: $ht(Q) + \dim(R/Q \cap R) \leq \dim T$, $\forall Q \in F$, autrement dit, $\dim R = \dim T$. ∎

Corollaire 3.3. *Si T est R-plat et $I = (R : T)$ est un idéal maximal de R, alors* $\dim R = \dim T$.

Exemple 3.2. Soient R un domaine de dimension 1, et T un suranneau minimal de R. Si T est entier sur R, alors $\dim R = \dim T$, et si T est R-plat et $(R : T) \neq 0$, alors d'après le corollaire précédent $\dim R = \dim T$, et si $(R : T) = 0$, on utilise le théorème 3.3, ainsi dans tous les cas on a $\dim R = \dim T = 1$.

Dans cette partie on va citer quelques propriétés de $R \subset T$ dans le cas où R est noethérien, on examinera en particulier la stabilité des domaines de

Macaulay et réguliers dans l'extension $R \subset T$.

THÉORÈME 3.4. *Soit R un domaine noethérien.*

(a) *S'il existe $z \in \overline{R}$ tel que $\mathrm{ass}_R(R[z]/R)$ contient un idéal maximal de R, alors R admet un suranneau minimal.*
(b) *Si T est un suranneau minimal de R, alors T est aussi noethérien et que $T = K$, si et seulement si, R est un anneau de valuation discrète.*
(c) *Il existe une bijection entre l'ensemble des suranneaux minimaux T de R, tel que T est R-plat, et l'ensemble des idéaux maximaux η de R, tel que R_η est un de valuation discrète.*

Démonstration. (a) Soient $\eta = (R : y) = \{x \in R\colon xy \in R\} \in \mathrm{ass}_R(R[z]/R)$ avec $y \in R[z]$, un idéal maximal de R, et $C = (R : R[y]) = \{x \in R : xR[y] \subseteq R\}$. C est un idéal η-primaire, donc l'anneau R/C est noethérien de dimension 0, parsuite R/C est artinien; or $R[y]/R$ est un R/C-module de type fini, donc $R[y]/R$ est aussi artinien. Considérons la famille $W = \{B/R$:B est un anneau tel que $R \subset B \subseteq R[y]\}$; W est non vide car elle contient $R[y]/R$, et comme $R[y]/R$ est artinien, alors W admet un élément minimal B_0 qui est un suranneau minimal de R.

(b) Si T est minimal sur R, alors $T = R[z]$, avec $z \in T \backslash R$, donc T est noethérien. Supposons que R est un anneau de valuation discrète, alors R est maximal parmi les sous anneaux contenus strictement dans K, et comme $R \subset T \subseteq K$, alors $T = K$. Inversement, si K est minimal sur R, alors R est intégralement clos, ceci entraîne que $R = \cap V_\alpha$ [8, Th. 57] où V_α est un anneau de valuation tel que $R \subseteq V_\alpha \subseteq K$. Puisque $R \neq K$, alors il existe un α tel que $V_\alpha \neq K$, parsuite $R = V_\alpha$, i.e., R est de valuation d'idéal maximal η. D'autre part, si p est un idéal premier non nul de R, alors $p \subseteq \eta$, donc $R_\eta = R \subseteq R_p \subset K$, c'est à dire que $R_p = R$, i.e., $\eta = p$, autrement dit $\dim R = 1$; on déduit que R est un anneau de valuation discrète.

(c) Il suffit d'appliquer [5, Cor. 3.4]. ∎

Remarque 3.3. Si R est un domaine noethérien, et T un suranneau minimal entier sur R, alors $\mathrm{ass}_R(T/R) = \eta$. En effet: en utilisant les notations de [15], on a $D(R,T) = \eta$ et on obtient le résultat en appliquant [15, Prop. 1.13].

PROPOSITION 3.6. *Soient R un domaine cohérent, local, de dimension* 1, *et T un suranneau minimal entier sur R, alors R est noethérien et $\overline{R}$ est de Prüfer.*

Démonstration. Il suffit de voir que l'extension $R \subset T$ est très finie au sens de [4], et appliquer [4, Cor. 16]. ∎

LEMME 3.3. *Soit T un suranneau minimal de R, tel que T est entier sur R; alors pour tout $Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $Q \cap R \neq (R : T)$, on a $T_Q = R_{Q\cap R}$.*

Démonstration. On sait d'après proposition 3.2 que $(R : T)$ est un idéal maximal de R noté η. Soient $Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $\eta \neq Q \cap R$, i.e., η n'est pas contenu dans $Q \cap R$ et $z \in T_Q$, $z = t/s$ avec $t \in T$, $s \in T \backslash Q$. Choisissons $r \in \eta \backslash Q \cap R$, on a $z = t/s = tr/sr$ avec tr, $sr \in R$ et $rs \notin Q \cap R$, parsuite $z \in R_{Q\cap R}$, i.e., $T_Q \subseteq R_{Q\cap R}$, d'où $T_Q = R_{Q\cap R}$. ∎

Remarque 3.4. Si T est entier sur R, alors en utilisant le lemme précédent et [5, Th. 2.2], on a $T_Q = T_{Q\cap R}$ pour tout idéal premier Q de T tel que $(R : T) \neq Q \cap R$.

DÉFINITION 3.1. On dit qu'un domaine R est going-down noté GD, si l'extension $R \subset S$ satisfait GD pour tout domaine S contenant R.

PROPOSITION 3.7. *Soit T un suranneau minimal de R. Si R est GD, alors T est aussi GD.*

Démonstration. Soient S un domaine tel que $T \subset S$ et P_1,$P_2 \in \operatorname{spec}(T)$ avec $P_1 \subset P_2$ et $Q_2 \in \operatorname{spec}(S)$ tel que $Q_2 \cap T = P_2$. Posons $p_i = R \cap P_i$, $i = 1,2$. On a donc $p_1 \subset p_2$ et $Q_2 \cap R = p_2$, comme $R \subset S$ satisfait GD, alors il existe $Q_1 \in \operatorname{spec}(S)$ tel que $Q_1 \subset Q_2$ et $Q_1 \cap R = p_1$. Vérifions que $Q_1 \cap T = P_1$. Si T est R-plat, alors $\operatorname{spec}(T) \longrightarrow \operatorname{spec}(R)$ est injective, donc $(Q_1 \cap T) \cap R = P_1 \cap R$ entraîne que $Q_1 \cap T = P_1$. Si T est entier sur R, alors d'après le lemme précédent, on a $T_{Q_1\cap T} = T_{P_1} = R_{p_1}$ car $p_1 \neq (R : T)$, parsuite $Q_1 \cap T = P_1$, d'où $T \subset S$ satisfait GD. ∎

PROPOSITION 3.8. *Soient R un domaine noethérien et T minimal sur R. On suppose que $R \subset T$ est entière satisfaisant going-down. Si $ht(R : T) = 2$, alors l'application $\operatorname{spec}(T) \longrightarrow \operatorname{spec}(R)$ est bijective. En particulier si R est local de dimension 2, alors T est local.*

Démonstration. Soient $p \in \operatorname{spec}(R)$ tel que $p \neq (R : T)$ et Q_1, $Q_2 \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $Q_1 \cap R = Q_2 \cap R = p$. D'après le lemme précédent, $T_{Q_1} = T_{Q_2} = R_p$, donc $Q_1 = Q_2$. Si $p = (R : T)$, on applique [3, Lem. 5]. Si R est local d'idéal maximal η, alors $(R : T) = \eta$, et on applique ce qui précède.

COROLLAIRE 3.4. *Soit $R \subset T$ une extension minimale tel que T est entier sur R et $ht(R:T) = 2$, alors* $\operatorname{spec}(T) \longrightarrow \operatorname{spec}(R)$ *est bijective,si et seulement si, $R \subset T$ satisfait going-down.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente et proposition 3.1. ∎

DÉFINITION 3.2. - Soit R un anneau commutatif, on dit que R est de Macaulay si R est noethérien et pour tout idéal maximal η de R, on a $ht(\eta) = G(\eta)$.
- Soit R un anneau commutatif noethérien local d'idéal maximal η, on dit que R est régulier si $\dim R = \dim(\eta/\eta^2)$, η/η^2 est considéré comme un R/η-espace vectoriel.
- Soit R un anneau noethérien, on dit que R est régulier si pour tout idéal premier p de R, R_p est régulier.

THÉORÈME 3.5. *Soit $R \subset T$ une extension minimale. Si R est de Macaulay, alors T est aussi de Macaulay.*

Démonstration. R est noethérien, donc T est noethérien, parsuite il suffit de vérifier que T_Q est de Macaulay pour tout idéal premier Q de T. Si T est R-plat, alors $\forall Q \in \operatorname{spec}(T)$ on a $T_Q = R_{Q\cap R}$ est de Macaulay. Si T est entier sur R, alors d'après le lemme précédent, $T_Q = R_{Q\cap R} \forall Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $Q \cap R \neq (R:T) = \eta$; Il suffit donc de montrer que T_Q est de Macaulay pour $Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $Q \cap R = \eta$. En utilisant les notations de [15], on a $F_R(T) = \{p \in \operatorname{spec}(R) : T \not\subset R_p\} = \{\eta\}$, car $\forall p \in \operatorname{spec}(R)$ tel que $p \neq \eta$, $R_p = T_p$ et $R_\eta \subset T_\eta$ [5, Th. 2.2] et d'après [15, Lem. 5.1] on a $G(\eta) = 1$, ce qui entraîne que $ht(\eta) = 1$, et comme $ht(\eta) \geq ht(Q)$, alors $ht(Q) = G(Q) = 1$ $\forall\, Q \in \operatorname{spec}(T)$ tel que $Q \cap R = \eta$, d'après [8, Th. 135] on déduit que T_Q est de Macaulay. ∎

PROPOSITION 3.9. *Soit $R \subset T$ une extension minimale.*

(a) *Si R est régulier, alors T est régulier.*
(b) *Si T est régulier, alors R est régulier, si et seulement si, R est noethérien et intégralement fermé dans T.*

Démonstration. (a) R_η est régulier pour tout idéal maximal η de R, donc R_η est intégralement clos et comme $R = \cap R_\eta$ où η décrit l'ensemble de tous les idéaux maximaux de R, alors R est intégralement clos, parsuite $T_Q = R_{Q\cap R}$

pour tout idéal premier Q de T; et puisque T est noethérien, alors T est régulier.

(b) Si R est régulier, c'est évident. Supposons que R est intégralement fermé dans T, alors on sait d'après la proposition 3.2 que tous les idéaux premiers de R se relèvent à T sauf un seul noté η. Soient donc $p \in \operatorname{spec}(R)$ tel que $p \neq \eta$ et $Q \in \operatorname{spec}(T)$ avec $Q \cap R = p$, on a $R_p = T_Q = T_p$; si $p = \eta$, alors T_η est un suranneau minimal de R_η, et d'après [10, Th. 2.8] R_η est un anneau de valuation, ainsi on a montré que R_p est régulier $\forall p \in \operatorname{spec}(R)$, et comme R est noethérien, alors R est régulier. ∎

Références

[1] Anderson, D.D., Anderson, D.F., Muhmmad Zafrullah, Rings between $D[X]$ and $K[X]$, *Houston J. Math.,* **17**(1) (1991), 109–129.

[2] Bazzoni, S., Salce, L., Waurfield domains, *J. Algebra,* **185** (1969), 836–868.

[3] Chen, P.J., Couples d'anneaux partageant un idéal, *Arch. Math.,* **51** (1988), 505–514.

[4] Dobbs, D.E., On Going-down for simple overrings, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **39**(3) (1973), 515–519.

[5] Ferrand, D., Olivier, J.P., Hommorphismes minimaux d'anneaux, *J. Algebra,* **16** (1970), 461–471.

[6] Gilmer, R., Heinzer, W., Intersections of quotient rings of an integral domain, *J. Math. Kyoto. Univ.,* **7**(2) (1967), 133–150.

[7] Gilmer, R., Multiplicative Ideal Theory, *Queen's Papers in Pure and Appl. Math.,* **12** Queen's University, Kingston, Ontario, 1968.

[8] Kaplansky, I., "Commutative Ring", *Chicago Lectures in Math.,* Univ. Chicago Press, Chicago, 1974.

[9] Matsumura, H., "Commutative Algebra", W.A. Benjamin Inc., New-York, 1970.

[10] Papick, I.J., Local minimal overrings, *Canad. J. Math.,* **28**(4) (1976), 788–792.

[11] Papick, I.J., Topologically defined classes of going-down domains, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **219** (1967), 1–37.

[12] Querré, J., "Cours d'Algèbre", Masson, Paris, New-York, Barcelone, Milan, 1976.

[13] Richman, F., Generalised quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **16** (1965), 794–799.

[14] Sato, J., Yoshida, K.I., On minimal overrings of noetherien domains, *Comm. Algebra,* **20**(6) (1992), 1735–1746.

[15] Yoshida, K.I., On birational-integral extesion of rings and prime ideals of depth one, *Japan J. Math.,* **8**(1) (1982), 49–70.

[16] Samuel, P., La notion de place dans un anneau, *Bull. Soc. Math. France,* **85** (1957), 123–133.