EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 1, 83 – 92 (2001)

Théorème d'Approximation et Espaces de Hopf

Abdelkader Stouti

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques
Université Cadi Ayyad, B.P. 523*, Beni-Mellal, Maroc*
e-mail: stouti@@yahoo.com

(Research paper presented by David Yost)

AMS *Subject Class.* (2000): 46A55, 52A07, 54H25 *Received November* 7, 1999

1. Introduction

Dans cet article nous introduisons les espaces de Hopf comme étant des espaces métriques dans lequels toute application compacte peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une application continue ayant un nombre fini de points fixes. L'un des premiers résultats concernant ces espaces a été émi par H. Hopf [3], [6] : tout polyèdre connexe de dimension supérieure ou égale à 1 est un espace de Hopf. Plus tard Baillon-Rallis [1] ont montré que toute réunion finie de convexes fermés d'un espace vectoriel normé est un espace de Hopf. Dans un premier temps nous donnons une extension du théorème de Baillon-Rallis aux multifonctions (Corollaire 1.1). Puis nous montrons le résultat suivant (Théorème 2.1) : si X est un espace vectoriel normé, alors toute partie fermée C non vide de X qui est à la fois ANR(m) et un espace de Hopf, et pour toute partie D de X contenant C, $f : D \to C$ une application compacte et $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $h : D \to C$, ε-proche de f ayant un nombre fini de points fixes. Ce qui nous permet d'étudier les réunions de parties convexes d'un espace vectoriel normé et d'identifier parmi elles celles qui sont des espaces de Hopf. Les espaces de Hopf pourront présenter un outil pratique pour l'étude des solutions approchées d'une équation différentielle.

Nous rappelons les définitions et les résultats suivants :

Soient X, Y deux espaces topologiques et $\alpha = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement d'ouverts de Y. Deux applications continues f et g de X dans Y sont dites α-proches si $\forall x \in X$, $\exists \lambda_{(x)} \in \Lambda$ tel que $f(x) \in U_{\lambda_{(x)}}$ et $g(x) \in U_{\lambda_{(x)}}$.

Une homotopie $h_t : X \longrightarrow Y$ $(0 \leq t \leq 1)$ est dite une α-homotopie si $\forall x \in X, \exists \lambda_{(x)} \in \Lambda$ tel que $h_t\,(x) \in U_{\lambda_{(x)}}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Deux applications continues f et g de X dans Y sont dites α-homotopes si il existe une α-homotopie h_t, $t \in [0,1]$, de X dans Y telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

Soient X un espace topologique et A une partie fermée de X. On appelle rétraction de X dans A, toute application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x$ pour toute $x \in A$.

Soit Y un espace métrique. On dit que Y est un ANR(m) si à chaque fois qu'il est homéomorphe à un sous espace fermé X_1 d'un espace métrique M, il existe un voisinage ouvert U de X_1 et une rétraction r de U sur X_1.

Dans [7] S. T. Hu a montré le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Si Y est un ANR(m) et $\alpha = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est un recouvrement d'ouverts de Y, alors il existe un sous-recouvrement d'ouverts β de α, tel que toutes applications continues $f, g : X \to Y$ β-proches définies sur un espace topologique quelconque X sont α-homotopes.*

Si Y est un espace métrique, deux applications continues f et g de X dans Y sont dites ε-proches si $\forall x \in X$, $\mathrm{d}(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

Une homotopie h_t de X dans Y est dite une ε-homotopie si $\forall x \in X$, $\mathrm{diam}(\{h_t(x) : t \in [0,1]\}) < \varepsilon$.

Deux applications continues f et g de X dans Y sont dites ε-homotopes si il existe une ε- homotopie h_t, $t \in [0,1]$, telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

Le théorème suivant établi par Dugundji [5] est un outil puissant pour l'extension des homotopies définies sur un ANR(m).

Théorème 1.2. *Soit Y un ANR(m). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(Y, \varepsilon) > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout espace métrique X, A une partie fermée de X, $f, g : X \to Y$ deux applications continues δ-proches, et pour toute δ-homotopie $j_t : A \to Y$ satisfaisant $j_0 = f_{|_A}$, $j_1 = g_{|_A}$, il existe une ε-homotopie $h_t : X \to Y$ telle que $h_0 = f$, $h_1 = g$ et $h_{t_{|_A}} = j_t$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Rappelons le théorème de Baillon-Rallis [1].

Théorème 1.3. *Toute réunion finie de sous-ensembles convexes fermés non vides dans un espace vectoriel normé est un espace de Hopf.*

Nous commençons par étendre le théorème de Baillon-Rallis aux multifonctions. Pour cela nous avons besoin de rapeller quelques définitions.

Soient X et Y deux espaces métriques. On dit qu'une application f de X dans Y est compacte si f est continue et $\overline{f(X)}$ est compact. Nous noterons par $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

Soient X, Y deux espaces métriques, on désigne l'ensembles des parties de Y par 2^Y. On appelle multifonction toute application $F : X \to 2^Y$ telle que $\forall x \in X, F(x) \neq \emptyset$. Une multifonction F est dite semi-continue-inférieurement dans X (s.c.i.) si pour toute partie fermée $B \subset Y$, l'ensemble $\{x \in X : F(x) \subset B\}$ est fermé dans X.

Le lemme suivant apparaît dans [8, 1.4.7].

LEMME 1.1. *Soient E un espace vectoriel normé, X un espace métrique et $F : X \to 2^E$ une multifonction s.c.i. telle que pour tout $x \in X$, $F(x)$ est sous-ensemble convexe de E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $f : X \to E$ telle que $\mathrm{d}(f(x), F(x)) = \inf_{y \in F(x)} ||y - f(x)|| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.*

En utilisant ce lemme nous montrons le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.1. *Soient $\mathcal{C} = (C_i)_{i=1,\ldots,n}$ une famille de sous-ensembles convexes compacts d'un espace vectoriel normé X, $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, et $F : C \to 2^C$ une multifonction s.c.i. telle que : $\forall x \in C$, $F(x)$ est un sous-ensemble convexe de C. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application continue $f : C \to C$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{Fix}(f)$ *est fini ;*

(ii) $\forall x \in C$, $\mathrm{d}(f(x), F(x)) < \varepsilon$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme précèdent il existe une application continue $g : C \to C$ telle que, $\forall x \in C$, $\mathrm{d}(g(x), F(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. D'autre part, l'ensemble C est compact, donc g est compacte. Comme C est un espace de Hopf (Théorème 1.3), alors il existe une application continue $f : C \to C$, ayant un nombre fini de points fixes et $\frac{1}{2}\varepsilon$-proche de g. Comme $\mathrm{d}(f(x), F(x)) \leq \mathrm{d}(f(x), g(x)) + \mathrm{d}(g(x), F(x))$, alors $\mathrm{d}(f(x), F(x)) < \varepsilon$. ∎

2. Théorème d'Approximation Finie

Soient X un espace métrique, E un espace vectoriel normé et C une partie de E. On dit qu'une application continue $f : X \to C$ est compacte si $\overline{f(X)}$ est compact dans E.

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 2.1. *Soient X un espace vectoriel normé et C une partie fermée non vide de X. Si C est à la fois un espace de Hopf est un ANR(m),* *alors pour toute partie D de X contenant C, $f : D \to C$ une application compacte et $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $h : D \to C$, ε-proche de f et ayant un nombre fini de points fixes.*

Preuve. Puisque l'ensemble C est un ANR(m), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute δ-homotopie $j_t : C \to C$ satisfaisant $j_0 = j_1 = f_{|C}$, il existe une ε-homotopie $h_t : D \to C$ telle que $h_0 = h_1 = f$ et $h_{t_{|A}} = j_t$ pour tout $t \in [0,1]$ (Théorème 1.2).

Pour $\frac{1}{2}\delta > 0$, il existe $\alpha > 0$, vérifiant la propriété suivante : toutes deux applications continues $f, g : C \to C$ α-proches sont $\frac{1}{2}\delta$-homotopes (Théorème 1.1).

Comme f est compacte, alors l'application $f_{|C}$ est aussi compacte. Par hypothèse C est un espace de Hopf, alors il existe une application continue $g : C \to C$ telle que $\mathrm{Fix}(g)$ est fini et $||f_{|C} - g|| < \alpha$.

Ainsi, $f_{|C}$ et g sont $\frac{1}{2}\delta$-homotopes de C dans C. Soit $(h_t)_{t\in[0,1]}$ cette $\frac{1}{2}\delta$-homotopie et définissons une nouvelle homotopie (k_t) par

$$k_t = \begin{cases} h_{2t} & \text{si } \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2}\,, \\ h_{2-2t} & \text{si } \ \dfrac{1}{2} \le t \le 1\,. \end{cases}$$

Donc $(k_t)_{t\in[0,1]}$ est une δ-homotopie vérifiant, $k_0 = k_1 = f_{|C}$ et $k_{\frac{1}{2}} = g$. Par suite il existe une ε-homotopie K_t de D dans C telle que

$$K_0 = K_1 = f \qquad \text{et} \qquad K_t|_C = k_t \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Posons $k_{\frac{1}{2}} = h$. Donc, $h : D \to C$ et $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(g)$. En effet si $h(x) = x$, alors $x \in C$ et $h(x) = g(x) = x$. Donc $\mathrm{Fix}(h) \subset \mathrm{Fix}(g)$. D'autre part, $g = h_{|C}$. D'où $\mathrm{Fix}(g) \subset \mathrm{Fix}(h)$. Ainsi $\mathrm{Fix}(h)$ est un ensemble fini, et $||f - h|| < \varepsilon$. ∎

Soient X un espace métrique, E un espace vectoriel normé et C une partie non vide de E. Considérons une application compacte f de X dans C.

Nous appelerons un ε-recouvrement $\mathcal{O}_\varepsilon$ (pour $\varepsilon > 0$) tout recouvrement fini d'ouverts de $f(X)$ de la forme $\{B(x_i, r_i) : 0 < r_i < \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n\}$, avec $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset f(X)$. La ε-réalisation géométrique associée à $\mathcal{O}_\varepsilon$ est définie par

$$|\mathcal{R}_\varepsilon| = \bigcup_{\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_k}\} \in Q} \mathrm{conv}(\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_k}\})\,,$$

où Q est l'ensemble définie par

$$Q = \left\{ \{x_{i_l}, \ldots, x_{i_k}\} \subset f(X) \ : \ \Big(\bigcap_{h=l}^{k} B(x_{i_h}, r_{i_h}) \Big) \cap f(X) \neq \emptyset \right\} .$$

Comme f est compacte, alors pour tout $\varepsilon > 0$, f possède au moins un ε-recouvrement $\mathcal{O}_\varepsilon$.

On définie l'approximation de Schauder f_ε de X vers E par $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) x_i$, avec

$$\lambda_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)} , \qquad \mu_i(x) = \max(0, \varepsilon - ||f(x) - x_i||) .$$

Ainsi, les applications $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ constituent une partition de l'unité liée à $\{f^{-1}(B(x_i, r_i)) : i = 1, \ldots, n\}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'application f_ε est compacte et $||f_\varepsilon - f|| < \varepsilon$.

Pour appliquer le théorème 2.1 à l'étude des espaces de Hopf, notre idée essentielle est de trouver pour toute application compacte $f : C \to C$ et pour tout $\varepsilon > 0$, une réalisation géométrique contenue dans C. Puisque cette réalisation géométrique est une réunion finie de parties convexes fermées, alors c'est un espace de Hopf et de plus nous pouvons lui appliquer les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 pour montrer que l'ensemble C est un espace de Hopf.

Corollaire 2.1. *Tout ensemble convexe non vide dans un espace vectoriel normé est un espace de Hopf.*

Preuve. Soient C une partie convexe non vide dans un espace vectoriel normé et $f : C \to C$ une application compacte. Comme $\overline{f(C)}$ est compacte, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n points $x_1, \ldots, x_n$ de $f(C)$ tels que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$. Soit $f_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ l'approximation de Schauder associée à $x_1, \ldots, x_n$. Nous avons $f_{\frac{1}{2}\varepsilon} : C \to \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Puisque l'ensemble $\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ est un convexe fermé, alors c'est un espace de Hopf (Théorème 1.3). Or, l'application $f_{\frac{1}{2}\varepsilon} : C \to \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ est compacte, donc d'après le Théorème 2.1 il existe une application continue $g : C \to \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ ayant un nombre fini de points fixes et $\frac{1}{2}\varepsilon$-proche de $f_{\frac{1}{2}\varepsilon}$. Donc nous avons

$$||f - g|| \leq ||f - f_{\frac{1}{2}\varepsilon}|| + ||f_{\frac{1}{2}\varepsilon} - g|| < \varepsilon .$$

∎

En utilisant une preuve semblable à la démonstration précèdente, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.2. *Soient X un espace vectoriel normé et D une partie non vide de X. Si $f : D \to D$ est une application compacte avec $f(D)$ étant une partie convexe de D, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $g : D \to D$, ε-proche de f et ayant un nombre fini de points fixes.*

Toute réunion localement finie de sous-ensembles convexes fermés dans un espace vectoriel normé est un ANR(m) (voir [2]) et aussi un sous-ensemble fermé de X. Dans le corollaire suivant nous montrons que ce type d'ANR(m) est un espace de Hopf.

Corollaire 2.3. *Soit X un espace vectoriel normé. Si $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles convexes fermés non vides de X telle que $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ est localement finie dans X, alors C est un espace de Hopf.*

Preuve. Soit $f : C \to C$ une application compacte. Puisque l'ensemble C est localement fini donc $\forall x \in C$, $\exists r(x) \in]0, \varepsilon[$ et une partie finie $I(x) \subset I$ tels que $\forall j \in I \setminus I(x)$ nous avons $C_j \cap B(x, r(x)) = \emptyset$.

Comme f est compacte il existe n points $x_1, \ldots, x_n$ de $f(C)$ tels que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r(x_i))$. Soit $J = \bigcup_{i=1}^n I(x_i)$. Comme pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble $I(x_i)$ est fini, alors J est fini et pour tout $j \in I \setminus J$ nous avons $C_j \cap B(x_i, r(x_i)) = \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Considérons l'ensemble $C' = \bigcup_{i\in J} C_i$. Nous avons $f(C) \subset C'$. Donc l'application $f : C \to C'$ est compacte. Comme C' est une réunion finie de parties convexes fermés, alors C' est à la un ANR(m) et un espace de Hopf (Théorème 1.3). D'après le Théorème 1.2, il existe une application continue $\Theta : C \to C'$ ayant un nombre fini de points fixes et ε-proche de f. ∎

Dans le corollaire suivant nous montrons un résultat surprenant : toute réunion quelconque de sous-ensembles convexes ouverts non vides dans espace vectoriel normé est un espace de Hopf.

Corollaire 2.4. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles convexes ouverts d'un espace vectoriel normé, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est un espace de Hopf.*

Preuve. Soit $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ et $f : C \to C$ une application compacte. Comme l'ensemble C est ouvert, donc pour tout $x \in C$, $\exists r(x) \in]0, \frac{1}{2}\varepsilon[$ tel que $B(x, r(x)) \subset C$. Puisque $\overline{f(C)}$ est compacte, alors il existe n points

$x_1, \dots, x_n$ de $f(C)$ tels que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2}r_i)$. Soit Q l'ensemble définie par $Q = \{\{x_{i_l}, \dots, x_{i_{l'}}\} \subset f(C) : (\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset\}$ et $|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}|$ la $\frac{1}{2}\varepsilon$- réalisation géométrique associée à Q définie par

$$|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}| = \bigcup_{\{x_{i_l}, \dots, x_{i_k}\} \in Q} \operatorname{conv}(\{x_{i_l}, \dots, x_{i_{l'}}\})\,.$$

Si $(\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset$, alors il existe $z \in f(C)$ tel que $\forall k \in \{l, \dots, l'\}$, $||x_{i_k} - z|| < \frac{1}{2}r_k$. Soit $r_{k_0} = \max\{r_k : k = l, \dots, l'\}$. Alors $||x_{i_k} - z|| < r_{k_0}$, pour tout $k = l, \dots, l'$. Donc, $\{x_{i_l}, \dots, x_{i_{l'}}\} \subset B(x_{k_0}, r_{k_0})$. Par suite, $\operatorname{conv}(\{x_{i_l}, \dots, x_{i_{l'}}\}) \subset B(x_{k_0}, r_{k_0}) \subset C$. Ainsi, $|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}| \subset C$. Comme $f_{\frac{1}{2}\varepsilon} : C \to |\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}|$ est une application compacte, alors d'après le Théorème 2.1 il existe une application continue $\Psi : C \to |\mathcal{R}_{\varepsilon}|$ ayant un nombre fini de points fixes et $\frac{1}{2}\varepsilon$-proche de $f_{\frac{1}{2}\varepsilon}$. Or, $||f - f_{\frac{1}{2}\varepsilon}|| < \frac{1}{2}\varepsilon$ donc $||f - \Psi|| < \varepsilon$. ∎

Comme tout sous-ensemble ouvert non vide est une réunion quelconque de boules ouvertes convexes, alors nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.5. *Tout sous-ensemble ouvert non vide d'un espace vectoriel normé est un espace de Hopf.*

Dans la proposition suivante nous montrons que si l'intérieur de l'intersection de deux convexes bornés d'un espace vectoriel normé est non vide, alors leur réunion est un espace de Hopf.

PROPOSITION 2.1. *Soient C_1 et C_2 deux sous-esembles convexes bornés d'un espace vectoriel normé tels que* $\operatorname{int}(C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$, *alors $C_1 \cup C_2$ est un espace de Hopf.*

Preuve. Soient E l'espace vectoriel normé contenant C_1 et C_2, $C = C_1 \cup C_2$ et $f : C \to C$ une application compacte. Construisons un bon recouvrement de C. Si $x \in C_1 \setminus \bar{C_2}$, alors on définit $r(x) = \min(\frac{1}{3}\operatorname{d}(x, \bar{C_2}), \frac{1}{3}\varepsilon)$. De même si $x \in C_2 \setminus \bar{C_1}$, alors $r(x) = \min(\frac{1}{3}\operatorname{d}(x, \bar{C_1}), \frac{1}{3}\varepsilon)$. Par ailleurs si $x \in ((\bar{C_1} \setminus C_1) \cap C_2) \cup ((\bar{C_2} \setminus C_2) \cap C_1)$, alors $r(x) = \frac{1}{3}\varepsilon$. Soit le recouvrement $\mathcal{O}_\varepsilon$ de C suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\varepsilon = &\Big\{B(x, r(x)) : x \in C_1 \setminus \bar{C_2}\Big\} \cup \Big\{B(x, r(x)) : x \in C_2 \setminus \bar{C_1}\Big\}\\ &\cup \Big\{B(x, r(x)) : x \in ((\bar{C_1} \setminus C_1) \cap C_2) \cup ((\bar{C_2} \setminus C_2) \cap C_1)\Big\}.\end{aligned}$$

Puisque $\overline{f(C)}$ est compacte, alors il existe m points $x_1, \ldots, x_m$ de $f(C)$ tels que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i))$. Soit Q l'ensemble définie par $Q = \{\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset f(C) : (\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset\}$ et $|\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}|$ la $\frac{1}{3}\varepsilon$-réalisation géométrique associée à Q.

La $\frac{1}{3}\varepsilon$-réalisation géométrique $|\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}|$ est une réunion finie de $\mathrm{conv}(\{x_{i_h}\}_{h=l}^{l'})$ telles que : $(\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset$, si et seulement si il existe $h \in \{l, \ldots, l'\}$ vérifiant $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_h}\} \subset C_1$ et $\{x_{i_{h+1}}, \ldots, x_{i_l}\} \subset (\bar{C_1} \backslash C_1) \cap C_2$, ou bien il existe $h' \in \{l, \ldots, l'\}$ tel que $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{h'}}\} \subset C_2$ et $\{x_{i_{h'+1}}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset (\bar{C_2} \backslash C_2) \cap C_1$, ou bien $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset C_j$ avec $j \in \{1, 2\}$. Soit $f_{\frac{1}{3}\varepsilon}$ l'approximation de Schauder associèe à $x_1, \ldots, x_m$. Nous allons construire une application affine Θ de E vers E vérifiant $\Theta(|\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}|) = |\mathcal{R}'_\varepsilon| \subset C$. Soit $d = \mathrm{diam}(C)$, alors il existe un entier naturel non nul n tel que $\varepsilon < 3md$. Soit $a \in \mathrm{int}(C)$. Posons, $\Theta(x) = (1 - \frac{1}{3md}\varepsilon)x + \frac{1}{3md}\varepsilon a$. Donc $\forall x \in C$, $||\Theta(x) - x|| < \frac{1}{3}\varepsilon$. De plus $\forall x \in C$, nous avons $\Theta(x) \in [a, x[$. Comme $a \in \mathrm{int}(C_1 \cap C_2)$, alors $\forall x \in C$, $\Theta(x) \in C_1$ ou $\Theta(x) \in C_2$. Ainsi, si $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \in Q$, alors nous avons soit $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset C_1$ soit $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset C_2$. D'où

$$\Theta(|\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}|) = \bigcup_{\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \in Q} \mathrm{conv}(\{\Theta(x_{i_l}), \ldots, \Theta(x_{i_{l'}})\}) = |\mathcal{R}'_\varepsilon| \subset C\,.$$

Nous avons $f_{\frac{1}{3}\varepsilon} : C \to |\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}|$ et $\Theta : |\mathcal{R}_{\frac{1}{3}\varepsilon}| \to |\mathcal{R}'_\varepsilon|$. Puisque l'application $f_{\frac{1}{3}\varepsilon}$ est compacte et Θ est continue, alors l'application $\Theta \circ f_{\frac{1}{3}\varepsilon} : C \to |\mathcal{R}'_\varepsilon|$ est aussi compacte. D'après le Théorème 2.1 il existe une application continue $g : C \to |\mathcal{R}'_\varepsilon|$ ayant un nombre fini de points fixes et vérifiant $||\Theta \circ f_{\frac{1}{3}\varepsilon} - g|| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Soit $x \in C$, alors

$$||f(x) - g(x)|| \leq ||f(x) - f_{\frac{1}{3}\varepsilon}(x)|| + ||f_{\frac{1}{3}\varepsilon}(x) - \Theta \circ f_{\frac{1}{3}\varepsilon}(x)|| + ||\Theta \circ f_{\frac{1}{3}\varepsilon}(x) - g(x)||\,.$$

Donc $\forall x \in C$, $||f(x) - g(x)|| < \varepsilon$. ∎

La proposition suivante nous montre que dans un espace vectoriel normé si les adhèrances de n sous-ensembles convexes non vides sont disjointes deux à deux, alors leur réunion est un espace de Hopf.

Proposition 2.2. *Si les adhèrances d'un nombre fini de sous-ensembles convexes non vides d'un space vectoriel normé sont disjointes deux à deux, alors leur réunion est un espace de Hopf.*

Preuve. Soient C_i, n sous-ensembles convexes non vides dont les adhèrances sont disjointes deux à deux. Soient $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ et $f : C \to C$ une application compacte. Construisons un bon recouvrement de C. Si $x \in C_i$, on définit $r(x) = \min(\frac{1}{4}\,\mathrm{d}(x, \bigcup_{j=1, j\neq i}^n \bar{C}_j), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Soit le recouvrement $\mathcal{O}_\varepsilon$ de C définie par $\mathcal{O}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n \{B(x, r(x)) : x \in C_i\}$. Comme $\overline{f(C)}$ est compacte, alors il existe m points $x_1, \ldots, x_m$ de $f(C)$ tels que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i))$. Soit Q l'ensemble définie par $Q = \{\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset f(C) : (\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset\}$ et $|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}|$ la $\frac{1}{2}\varepsilon$-réalisation géométrique associée à Q. Nous avons $|\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}| \subset C$. En effet, si $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \in Q$, alors $(\bigcap_{h=l}^{l'} B(x_{i_h}, r_{i_h})) \cap f(C) \neq \emptyset$. Ce qui implique qu'il existe un unique $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\{x_{i_l}, \ldots, x_{i_{l'}}\} \subset C_j$. Sinon il existerait $x_{i_k} \in C_j$, $x_{i_{k'}} \in C_{j'}$, avec $j \neq j'$, $j, j' \in \{1, \ldots, n\}$ et $z \in C$ tels que

$$||x_{i_k} - x_{i_{k'}}|| \leq ||x_{i_k} - z|| + ||z - x_{i_{k'}}|| < r_{i_k} + r_{i_{k'}} < \frac{1}{2}||x_{i_k} - x_{i_{k'}}||\,.$$

Ce qui est impossible. Donc l'approximation de Schauder associèe à $x_1, \ldots, x_m$ vérifie $f_{\frac{1}{2}\varepsilon}(C) \subset |\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}|$.

D'après le Théorème 2.1 il existe une application continue $g : C \to |\mathcal{R}_{\frac{1}{2}\varepsilon}|$ ayant un nombre fini de points fixes et vérifiant $||f_{\frac{1}{2}\varepsilon} - g|| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit $x \in C$, alors

$$||f(x) - g(x)|| \leq ||f(x) - f_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x)|| + ||f_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x) - g(x)|| < \varepsilon\,.$$

∎

Enfin signalons les deux résultats suivantes dont les démonstrations sont évidentes.

Proposition 2.3. *L'image d'un espace de Hopf par une isométrie est un espace de Hopf.*

Proposition 2.4. *Le produit d'un nombre fini d'espaces de Hopf est un espace de Hopf.*

Références

[1] Baillon, J.B., Rallis, N.E., Not too many fixed points, in Contemporary Mathematics, Volume 72, Berkeley, 1988, 21 – 24.

[2] Borsuk, K., "Theory of Retracts", Monografje Matematyczene, t. 44, Warszawa, 1967.

[3] Brown, R.F., "The Lefschetz Fixed Point Theorem", Scott, Foresman, and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[4] Dugundji, J., An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.* **1** (1951), 353 – 367.

[5] Dugundji, J., Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metic spaces, *Compositio Math.* **13** (1958), 229 – 296.

[6] Hopf, H., Űber die algebraische Anzahl von Fixpunkten, *Math. Z.* **29** (1929), 493 – 524.

[7] Hu, S.T., "Theory of Retracts", Wayne State University Press, Detroit, Michigan, 1959.

[8] van Mill, J., "Infinite-Dimensional Topology", North-Holland, Elsevier Science Pub., Amsterdam, 1986.