teorema
Vol. XXIV/2, 2005, pp. 91-119

Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento

Albert Einstein

(30 de junio de 1905)*

Se sabe que la electrodinámica de Maxwell —como se entiende habitualmente en este momento— cuando se aplica a cuerpos en movimiento, conduce a asimetrías a las que no parecen adecuarse los fenómenos. Considérese, por ejemplo, la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor. El fenómeno observable depende en este caso solamente del movimiento relativo del conductor y el imán, pero el tratamiento usual establece una distinción clara entre los dos casos, en que uno u otro de estos cuerpos sea el que esté en movimiento. Si el imán está en movimiento y el conductor en reposo, se origina en las cercanías del imán un campo eléctrico con una determinada energía, produciendo una corriente en los lugares donde están situadas partes del conductor. Pero si el imán está fijo y el conductor en movimiento, ningún campo eléctrico aparece en las cercanías del imán. En el conductor, sin embargo, aparece una fuerza electromotriz, que no corresponde a ninguna energía, pero que origina —suponiendo igualdad de movimiento relativo en los dos casos discutidos— corrientes eléctricas de la misma trayectoria e intensidad que las producidas por las fuerzas eléctricas en el caso anterior.

Ejemplos de este tipo, junto con los fracasados intentos para descubrir cualquier movimiento de la Tierra relativamente al "medio luminoso", sugieren que la idea de reposo absoluto no corresponde a ninguna propiedad de los fenómenos de la electrodinámica al igual que en la mecánica. Sugieren, por el contrario, como ya se ha probado para las pequeñas cantidades de primer orden, que son válidas las mismas leyes de la electrodinámica y de la óptica para todos los sistemas de referencia para los que las ecuaciones de la mecánica tienen validez. Elevamos esta suposición (cuyo contenido se llamará a partir de ahora "Principio de Relatividad") a la categoría de postulado, y también introducimos otro postulado, sólo aparentemente incompatible con el anterior, que la luz se propaga en el espacio vacío siempre con una velocidad determinada independientemente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados son suficientes para construir una teoría sencilla y consistente de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento basada en la teoría de Maxwell para cuerpos inmóviles. La introducción de un "éter luminoso" resultará superflua hasta el punto de que, de acuerdo con la visión que aquí se presenta, no se requerirá un "espacio absolutamente inmóvil" provisto de propiedades especiales, ni se asignará un vector-velocidad a un punto del espacio vacío en el que tienen lugar los procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se basa —como toda electrodinámica— en la cinemática del cuerpo rígido, desde la afirmación de que cualquier teoría análoga implica relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. La consideración insuficiente de esta circunstancia es causa de las dificultades que la electrodinámica de los cuerpos en movimiento presenta en la actualidad.

I. Parte cinemática

§ 1. *Definición de simultaneidad*

Consideremos un sistema de coordenadas en el que sean válidas las ecuaciones de la mecánica newtoniana. Para hacer nuestra presentación más precisa y para distinguir verbalmente este sistema de coordenadas de otros que se introducirán más adelante, lo llamamos "sistema en reposo"[1].

Si un punto material está en reposo respecto a este sistema de coordenadas, su posición puede determinarse relativamente a dicho sistema empleando patrones rígidos de medida y utilizando métodos de la geometría euclídea, y puede expresarse en coordenadas cartesianas.

Si deseamos describir el *movimiento* de un punto material, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo. Ahora bien, debe conocerse que una descripción matemática de esta clase sólo tiene significado físico si se sabe con claridad qué se entiende por "tiempo". Hemos de tener en cuenta que todos nuestros juicios en los que el tiempo juega un papel son siempre juicios sobre *eventos simultáneos*. Si, por ejemplo, digo, "Ese tren llega aquí a las 7 en punto", quiero decir algo como "La posición de la manecilla pequeña de mi reloj en el 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos".

Quizás pareciera posible superar todas las dificultades relacionadas con la definición de "tiempo" si sustituyera "tiempo" por "la posición de la manecilla pequeña de mi reloj". Y, en efecto, tal definición es satisfactoria cuando estamos interesados en definir un tiempo exclusivamente para el lugar donde está situado el reloj; pero no es satisfactoria cuando tenemos que relacionar temporalmente eventos que ocurren en diferentes lugares, o —lo que es lo mismo— para evaluar los tiempos de eventos que ocurren en lugares alejados del reloj.

Podríamos, desde luego, contentarnos con valores de tiempo determinados por un observador estacionado con su reloj en el origen de coordenadas, que ordenase los eventos según las posiciones de las manecillas de su reloj correspondientes a las señales luminosas producidas por cada evento que le llegasen a través del espacio vacío. Pero esta ordenación presenta el problema de que no es independiente de la posición del observador con su reloj, como sabemos por experiencia. Llegamos a una situación mucho más práctica mediante la siguiente línea de pensamiento.

Si en un punto A del espacio hay un reloj, un observador en A puede determinar valores de tiempo de eventos en las cercanías inmediatas de A observando la posición de las manecillas que son simultáneas con esos eventos. Si hay en el punto B del espacio otro reloj —semejante en todos los sentidos al que está en A— es posible para un observador en B determinar los valores de tiempo de eventos en las proximidades inmediatas de B. Pero no es posible, sin una reflexión más amplia, comparar, con respecto al tiempo, un evento en A con un evento en B. Hemos definido hasta este momento sólo un "tiempo A" y un "tiempo B", pero no hemos definido un "tiempo" común para A y B. Este último no puede definirse en absoluto a no ser que establezcamos *por definición* que el "tiempo" requerido por la luz para viajar desde A a B iguale al "tiempo" que requiere para viajar de B a A. Supongamos que un rayo de luz parte en el "tiempo A" t_A desde A hacia B, y que en el "tiempo B" t_B se refleja en B en la dirección de A, y llega de nuevo a A en el "tiempo A" t'_A .

De acuerdo con la definición los dos relojes sincronizan si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Asumimos que esta definición de sincronismo está libre de contradicciones, y es posible para cualquier número de puntos; y que las siguientes relaciones son válidas universalmente:

1. Si el reloj en B sincroniza con el reloj en A, el reloj en A sincroniza con el reloj en B.

2. Si el reloj en A sincroniza con el reloj en B y también con el reloj en C, los relojes en B y C también sincronizan mutuamente.

En consecuencia, con la ayuda de ciertos experimentos físicos imaginarios, hemos establecido lo que se entenderá por relojes síncronos situados estacionarios en diferentes lugares, y evidentemente hemos obtenido una definición de "simultaneidad" y de "tiempo". El "tiempo" de un evento es el que está dado simultáneamente con el evento por un reloj estacionario localizado en el lugar del evento, y este reloj corre síncronamente, para todas las determinaciones de tiempo, con un reloj estacionario especificado.

De acuerdo con la experiencia postulamos, además, que[2]

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = c,$$

es una constante universal: la velocidad de la luz en el espacio vacío.

Es esencial haber definido el tiempo mediante relojes estacionarios en sistemas estacionarios, y el tiempo ahora definido, que es apropiado para el sistema estacionario, lo llamamos “el tiempo del sistema estacionario”.

§ 2. *Sobre la relatividad de longitudes y tiempos*

Las siguientes reflexiones se basan en el principio de relatividad y en el principio de la constancia de la velocidad de la luz. Estos dos principios los definimos como sigue:

1. Las leyes por las que varía el estado de los sistemas físicos son independientes de que los cambios de estado se refieran a uno o a otro de dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo entre sí de traslación uniforme.

2. Cualquier rayo de luz se mueve en un sistema de coordenadas “estacionario” con la velocidad constante c, independientemente de que el rayo haya sido emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento. Así

$$\textit{Velocidad} = \frac{\textit{Camino recorrido por la luz}}{\textit{Intervalo de tiempo}}$$

donde el intervalo de tiempo debe entenderse en el sentido de la definición del § 1.

Sea una varilla rígida inmóvil; y supongamos que tiene una longitud l medida con una regla también inmóvil. Supongamos ahora que el eje de la varilla está situado a lo largo del eje X del sistema de coordenadas inmóvil, y que entonces se le comunica a la varilla un movimiento uniforme de traslación paralelo con velocidad v a lo largo del eje X en el sentido de las x crecientes. A continuación investigamos acerca de la longitud de la varilla en movimiento, longitud que puede ser determinada por las dos operaciones siguientes:

(a) El observador se mueve junto con la regla dada, y mide la longitud de la varilla directamente por superposición de la regla, precisamente del mismo modo que si los tres estuvieran en reposo.

(b) Por medio de relojes en reposo sincronizados (de acuerdo con § 1) colocados en el sistema estacionario, el observador determina en qué puntos del sistema fijo se encuentran los dos extremos de la varilla a medir en un tiempo determinado. La distancia entre estos dos puntos, medida con la regla empleada, que en este caso está en reposo, es también una longitud, que puede designarse "longitud de la varilla".

De acuerdo con el principio de relatividad, la longitud a calcular mediante la operación (a) —que llamaremos "la longitud de la varilla en el sistema en movimiento"— debe ser igual a la longitud l de la varilla en reposo.

La longitud a calcular por la operación (b) la llamaremos "la longitud de la varilla (en movimiento) en el sistema fijo", que determinaremos basándonos en nuestros dos principios, y encontraremos que difiere de l.

La cinemática actual supone tácitamente que las longitudes determinadas por estas dos operaciones son exactamente iguales, o en otras palabras, que un cuerpo rígido en movimiento en el intervalo temporal t puede representarse perfectamente en su relación geométrica por *el mismo* cuerpo *en reposo* en una posición determinada.

Imaginamos además que en los dos extremos A y B de la varilla se sitúan relojes sincronizados con los relojes del sistema fijo, es decir, que sus condiciones corresponden en cualquier instante al "tiempo del sistema fijo" en los lugares donde da la casualidad que están. Estos relojes son, por tanto, "síncronos en el sistema fijo".

Imaginamos además que con cada reloj hay un observador en movimiento, y que estos observadores aplican en ambos relojes el criterio establecido en § 1 para la sincronización de los dos relojes. Supongamos que salga un rayo de luz de A en el tiempo t_A, que se refleja en B en el tiempo t_B y llega de nuevo a A en el tiempo t'_A. Tomando en consideración el principio de la constancia de la velocidad de la luz encontramos que

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v} \quad \text{y} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}$$

donde r_{AB} indica la longitud de la varilla en movimiento medida en el sistema fijo. Los observadores que se mueven con la varilla en movimiento encontrarían así que los dos relojes no marchan síncronos, mientras que observadores en el sistema fijo declararían que los relojes son síncronos.

Ahora bien, lo que observa un observador desde otro sistema inercial K con respecto al cual se mueve el anterior $k,$ es que el tiempo, medido en los relojes de $K,$ que la luz tarda en viajar de A a B es distinto del tiempo que tarda en viajar de B a A. Deduce, pues, que los relojes de k no corren síncronos.

Por tanto, comprobamos que no podemos asignar ningún significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, sino que dos eventos, que observados desde un sistema de coordenadas son simultáneos, puede no considerarse como eventos simultáneos cuando se observan desde otro sistema que está en movimiento relativo respecto de aquel sistema.

§ 3. *Teoría de la transformación de coordenadas y el tiempo desde un sistema fijo a otro sistema en movimiento de traslación uniforme relativo al primero*

Consideremos en el espacio "fijo" dos sistemas de coordenadas, esto es, dos sistemas constituidos cada uno por tres líneas materiales rígidas y perpendiculares entre sí que parten de un punto. Consideremos que los ejes X de los dos sistemas coinciden, y que los ejes Y y Z sean respectivamente paralelos. Supongamos cada sistema provisto con una regla rígida y un cierto número de relojes, y supongamos que las dos reglas, y análogamente todos los relojes de los dos sistemas, son iguales en todos los aspectos.

Ahora suponemos que al origen de uno de los dos sistemas (k) se le comunica una velocidad constante v en el sentido de las x crecientes del otro sistema fijo (K), y suponemos que esta velocidad se comunica a la regla y a los relojes correspondientes. Cada tiempo t del sistema fijo K corresponderá así a una posición determinada de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría estamos autorizados para suponer que el movimiento de k puede ser tal que los ejes del sistema en movimiento están en el tiempo t (este "t" indica siempre un tiempo del sistema fijo) paralelos a los ejes del sistema fijo.

En el espacio medimos en el sistema fijo K por medio de la regla fija, y en el sistema en movimiento k por medio de la regla que se mueve con él; y así obtenemos las coordenadas $x, y, z,$ y ξ, η, ζ respectivamente. Además, suponemos que el tiempo t del sistema fijo se determina para todos los puntos del mismo en que hay relojes por medio de señales de luz de la manera indicada en § 1; similarmente suponemos que el tiempo τ del sistema en movimiento se determina para todos los puntos del sistema en movimiento en que hay relojes en reposo relativamente a este sistema por aplicación del método dado en § 1, de señales de luz entre los puntos en los que están situados estos últimos relojes.

A cada sistema de valores $x, y, z, t,$ que determina completamente el lugar y tiempo de un evento en el sistema fijo, corresponde otro sistema de valores $\xi, \eta, \zeta, \tau,$ que determina ese evento relativamente al sistema $k,$ y nuestra labor ahora consiste en encontrar el sistema de ecuaciones que relaciona esas variables.

En primer lugar, es claro que las ecuaciones deben ser *lineales* debido a las propiedades de homogeneidad que atribuimos al espacio y al tiempo.

Si fijamos $x' = x - vt$, es claro que a un punto en reposo en el sistema *k* debe corresponderle un sistema de valores $x', y, z,$ determinado e independiente del tiempo. Primero determinaremos τ en función de $x', y, z,$ y $t.$ Para hacer esto tenemos que expresar en ecuaciones que τ no es más que la suma de los datos de los relojes en reposo en el sistema $k,$ que han sido sincronizados de acuerdo con la norma dada en el § 1.

Desde el origen del sistema k suponemos que se emite un rayo en el tiempo τ_0 a lo largo del eje X hacia x', y en el tiempo τ_1 se reflejará desde allí hacia el origen de coordenadas, adonde llegará en el tiempo τ_2 ; entonces debemos tener

$$½(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

o, introduciendo los argumentos de la función τ y aplicando el principio de constancia de la velocidad de la luz en el sistema fijo:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right)\right] = \tau\left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-v}\right).$$

Por tanto, si se elige x' infinitesimal:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

Lo que indica que en lugar del origen de coordenadas podíamos haber elegido cualquier otro punto como de procedencia del rayo, y, por tanto, la ecuación que se acaba de obtener es válida para los valores $x', y, z.$

Una consideración análoga —aplicada a los ejes Y y Z— que tenga en cuenta que la luz se propaga siempre a lo largo de estos ejes, cuando se ve desde el sistema fijo, con la velocidad $\sqrt{c^2 - v^2}$, conduce a

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Puesto que τ es una función *lineal*, se deduce de estas ecuaciones que

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

donde *a* es una función $\phi(v)$, de momento desconocida, y en la que por sencillez se considera que en el origen de *k*, $\tau = 0$ cuando $t = 0$.

Con ayuda de este resultado se determinan fácilmente los valores ξ, η, ζ expresando en las ecuaciones que la luz (como requiere el principio de la constancia de la velocidad de la luz, en combinación con el principio de relatividad) también se propaga con velocidad *c* cuando se mide en el sistema en movimiento. Para un rayo de luz emitido en el tiempo $\tau = 0$ en la dirección de las ξ crecientes se verifica:

$$\xi = c\tau \ \text{ ó } \ \xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right).$$

Pero el rayo se mueve relativamente al origen de k, cuando se mide en el sistema fijo, con la velocidad $c - v$, así que

$$\frac{x'}{c - v} = t.$$

Si se sustituye este valor de t en la ecuación para ξ, obtenemos

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2 - v^2}x'.$$

De manera análoga encontramos, considerando rayos de luz en movimiento a lo largo de los otros dos ejes, que

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

cuando

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t, \ x' = 0.$$

de modo que

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y \text{ y } \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z.$$

Sustituyendo x' por su valor, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tau &= \phi(v)\beta\left(t - vx/c^2\right),\\
\xi &= \phi(v)\beta(x - vt),\\
\eta &= \phi(v)y,\\
\zeta &= \phi(v)z,
\end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y ϕ es, hasta ahora, una función desconocida de v. Si no se hace absolutamente ninguna suposición acerca de la posición inicial del sistema en movimiento ni acerca del punto cero de τ, es preciso añadir una constante aditiva en el lado derecho de cada una de estas ecuaciones.

Ahora tenemos que probar que cualquier rayo de luz, medido en un sistema en movimiento, se propaga con la velocidad c, si, como hemos supuesto, éste es el caso en el sistema fijo, ya que hasta ahora no hemos proporcionado la prueba de que el principio de la constancia de la velocidad de la luz sea compatible con el principio de relatividad.

En el tiempo $t = \tau = 0$, cuando el origen de coordenadas es común a los dos sistemas, supongamos que se emite desde allí una onda esférica, y que se propaga con la velocidad c en el sistema K. Si (x, y, z) es un punto justamente alcanzado por esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Transformando esta ecuación con la ayuda de nuestras ecuaciones de transformación obtenemos después de un simple cálculo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2.$$

Esta onda en estudio es, por tanto, también una onda esférica con velocidad de propagación c cuando se observa desde el sistema en movimiento. Esto muestra que nuestros dos principios fundamentales son compatibles.

En las ecuaciones de transformación que se han obtenido anteriormente entra una función desconocida ϕ de v, que ahora determinaremos.

Para este propósito, introducimos un tercer sistema de coordenadas K', que relativamente al sistema k está en un estado de movimiento de traslación paralelo en la misma dirección del eje X, pero cuyo origen de coordenadas se mueve con velocidad $-v$ sobre el eje X. En el tiempo $t = 0$ suponemos que los tres orígenes coinciden, y cuando $t = x = y = z = 0$ suponemos que el tiempo del sistema K' es $t' = 0$. Llamamos x', y', z' a las coordenadas medidas en el sistema K' y, por una doble aplicación de nuestras ecuaciones de transformación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
t' &= \phi(-v)\beta(-v)\left(\tau + v\xi/c^2\right) = \phi(v)\,\phi(-v)\,t,\\
x' &= \phi(-v)\beta(-v)\left(\xi + v\tau\right) \quad = \phi(v)\,\phi(-v)\,x,\\
y' &= \phi(-v)\,\eta \qquad\qquad\qquad\quad\; = \phi(v)\,\phi(-v)\,y,\\
z' &= \phi(-v)\,\zeta \qquad\qquad\qquad\quad\; = \phi(v)\,\phi(-v)\,z.
\end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre x', y', z' y x, y, z no contienen el tiempo t, los sistemas K y K' están en reposo uno con respecto al otro, y está claro que la transformación desde K a K' debe ser la transformación idéntica. Así:

$$\phi(v)\,\phi(-v) = 1.$$

Ahora investigaremos el significado de $\phi(v)$. Fijamos la atención en la parte del eje Y del sistema k que está entre $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0$ y $\xi = 0,\ \eta = l,\ \zeta = 0$. Esta parte del eje Y es una varilla en movimiento relativamente al sistema K con velocidad v perpendicularmente a su eje. Sus extremos poseen en K las coordenadas

$$x_1 = vt,\ y_1 = \frac{l}{\phi(v)},\ z_1 = 0$$

y

$$x_2 = vt,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0.$$

La longitud de la varilla medida en K es por lo tanto $l/\phi(v)$, y así se conoce el significado de la función $\phi(v)$. Por razones de simetría es ahora evidente que la longitud de una varilla dada en movimiento perpendicular a su eje, medida en el sistema fijo, debe depender solamente del módulo de la velocidad y no de la dirección o el sentido del movimiento. La longitud de la varilla en movimiento medida en el sistema fijo no varía, por lo tanto, si se cambia v por $-v$. Por tanto, se deduce que

$$l/\phi(v) = l/\phi(-v),$$

o

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

De esta relación y de la encontrada previamente se deduce que $\phi(v) = 1$, así que las ecuaciones de transformación halladas se convierten en

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - vx/c^2\right), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = 1\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

§ 4. *Significado físico de las ecuaciones obtenidas, por lo que respecta a cuerpos rígidos en movimiento y relojes en movimiento*

Imaginemos una esfera rígida de radio R, en reposo relativamente al sistema en movimiento k, y con su centro en el origen de coordenadas de k. La ecuación de la superficie de esta esfera en movimiento relativamente al sistema k con velocidad v es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

La ecuación de esta superficie expresada en x, y, z en el tiempo $t = 0$ es

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2}+y^2+z^2=R^2.$$

Un cuerpo rígido, que medido en un estado de reposo tiene forma de esfera, en estado de movimiento —visto desde el sistema estacionario— tiene, por tanto, forma de un elipsoide de revolución de ejes

$$R\sqrt{1-v^2/c}\ , R, R.$$

Así, considerando que las dimensiones en Y y Z de la esfera (y por tanto de cada cuerpo rígido de no importa qué forma) no aparecen modificadas por el movimiento, la dimensión en X aparece acortada en la razón $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$; es decir, cuanto mayor sea el valor de $v,$ tanto mayor es el acortamiento. Para $v=c$ todos los objetos en movimiento —observados desde el sistema "fijo"— se contraen en figuras planas. Para velocidades mayores que la de la luz carecerían de sentido nuestras reflexiones; sin embargo encontraremos en lo que sigue que la velocidad de la luz desempeña en nuestra teoría el papel físico de una velocidad infinitamente grande.

Es claro que los mismos resultados valen para cuerpos en reposo en el sistema "fijo" si son observados desde un sistema en movimiento uniforme.

Fijemos la atención, además, en uno de los relojes que están cualificados para marcar el tiempo t cuando está en reposo relativamente al sistema fijo, y el tiempo τ cuando está en reposo relativamente al sistema en movimiento, situado en el origen de coordenadas de $k,$ y ajustado para que marque el tiempo $\tau.$ ¿Cuál es la velocidad de este reloj, observado desde el sistema estacionario?

Entre los valores x, t y $\tau,$ que se refieren a la posición de ese reloj, tenemos, evidentemente, las ecuaciones

$$x=vt$$

y

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t-vx/c^2\right).$$

Por tanto,

$$\tau=t\sqrt{1-v^2/c^2}=t-\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)t$$

o sea, se deduce que el tiempo marcado por el reloj (observado desde el sistema fijo) retrasa en $1-\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}$ segundos por segundo, o —ignorando las cantidades de cuarto orden y superiores— en $\frac{1}{2}\left(v^2/c^2\right)$ segundos.

De esto se deduce la siguiente peculiar consecuencia. Si en los puntos A y B de K hay relojes fijos que, observados desde el sistema fijo, son síncronos; y si el reloj en A se mueve con la velocidad v a lo largo de la línea AB hacia B, entonces a su llegada a B los dos relojes ya no sincronizan, sino que el reloj que se mueve desde A a B se retrasa respecto del otro que ha permanecido en B en $\frac{1}{2}t\left(v^2/c^2\right)$ segundos (hasta cantidades de cuarto orden y superior), siendo t el tiempo que duró el viaje desde A a B.

Se aprecia de inmediato que este resultado es también válido si el reloj se mueve de A a B según cualquier línea poligonal, y también cuando los puntos A y B coinciden.

Si suponemos que el resultado probado para una línea poligonal es también válido para una línea curva de curvatura continua, llegamos a este resultado: si uno de los dos relojes síncronos en A se mueve en una curva cerrada con velocidad constante hasta que vuelve a A, en un viaje que dura t segundos, entonces para el reloj que ha permanecido en reposo el reloj en movimiento a su llegada a A retrasa $\frac{1}{2}t\left(v^2/c^2\right)$ segundos. Por eso concluimos que un reloj equilibrado en el ecuador debe marchar más lentamente, en una cantidad muy pequeña, que un reloj idéntico en condiciones idénticas situado en uno de los polos de la Tierra.

§ 5. *Teorema de composición de velocidades*

En el sistema k que se mueve a lo largo del eje X del sistema K con velocidad v, se considera que un punto se mueve de acuerdo con las ecuaciones

$$\xi = w_\xi \tau,\ \eta = w_\eta \tau,\ \zeta = 0,$$

donde w_ξ y w_η son constantes.

Se pretende conocer el movimiento del punto relativamente al sistema K. Si, con la ayuda de las ecuaciones de transformación desarrolladas en § 3, se introducen los valores de x, y, z, t en las ecuaciones de movimiento de un punto, se obtienen

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + vw_\xi / c^2} t,$$
$$y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vw_\xi / c^2} w_\eta t,$$
$$z = 0.$$

Así, la ley del paralelogramo de velocidades es válida en nuestra teoría solamente en primera aproximación. Establecemos:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$
$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2,$$
$$a = \tan^{-1} w_\eta / w_\xi,$$

donde a se considera como el ángulo entre las velocidades v y w. Después de un simple cálculo, obtenemos:

$$V = \frac{\sqrt{\left(v^2 + w^2 + 2vw\cos a\right) - \left(vw\,sen\,a/c\right)^2}}{1 + vw\cos a/c^2}.$$

Es digno de observar que v y w entran en la expresión de la velocidad resultante de manera simétrica. Si w tiene también la dirección del eje X, se obtiene:

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

De esta ecuación se deduce que de la composición de dos velocidades que son menores que c, siempre resulta una velocidad menor que c. Para el supuesto de que fijemos $v = c - k, w = c - \lambda,$ siendo k y λ positivos y menores que c, entonces

$$V = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} < c.$$

Se infiere, además, que la velocidad de la luz c no puede ser alterada por composición con una velocidad menor que la de la luz. Para este caso se obtiene:

$$V = \frac{c+w}{1+w/c} = c.$$

Podíamos haber obtenido la fórmula para V en el caso de que v y w tuvieran la misma dirección, también componiendo dos transformaciones de acuerdo con § 3. Si se añade a los sistemas K y k que figuran en § 3 otro sistema de coordenadas k' que se mueve paralelo a k, de modo que su origen se mueva sobre el eje X con velocidad w, obtenemos ecuaciones entre los valores x, y, z, t y los correspondientes valores de k', que difieren de las ecuaciones encontradas en § 3 solamente en que en lugar de "v" aparece el valor

$$\frac{v+w}{1+vw/c^2};$$

de modo que vemos que tales transformaciones paralelas —como debía ser— forman un grupo.

Hasta ahora hemos deducido las leyes necesarias de la teoría cinemática correspondiente a nuestros dos principios, y procedemos a continuación a mostrar su aplicación a la electrodinámica.

II. PARTE ELECTRODINÁMICA

§ 6. *Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de las fuerzas electromotrices que aparecen en el movimiento en un campo magnético*

Se supone que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío valen para el sistema fijo K, así que tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde (X, Y, Z) representa el vector del campo eléctrico y (L, M, N) el del campo magnético.

Si aplicamos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, refiriendo los procesos electromagnéticos al sistema de coordenadas allí introducido, que se mueve con la velocidad v, obtenemos las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\} - \frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\},
\end{aligned}
$$

donde

$$\beta = 1\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}\,.$$

Ahora bien, el principio de relatividad exige que si las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema K, también son válidas en el sistema k, es decir, que en el sistema k en movimiento, los vectores de los campos eléctrico y magnético —(X', Y', Z') y (L', M', N')—, que están definidos por sus efectos ponderomotrices sobre masas eléctricas o magnéticas respectivamente, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}
$$

Evidentemente los dos sistemas de ecuaciones encontrados para el sistema k deben expresar exactamente lo mismo, puesto que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el sistema K. Puesto que además las ecuaciones de los dos sistemas concuerdan, con la excepción de los símbolos que representan a los vectores, se deduce que las funciones que se encuentran en lugares correspondientes en los sistemas de ecuaciones deben concordar salvo un factor $\psi(v)$, que es común para todas las funciones, y es independiente de ξ, η, ζ y τ pero dependiente de v. Así tenemos las relaciones:

$$
\begin{aligned}
X' &= \psi(v) X, & L' &= \psi(v) L, \\
Y' &= \psi(v) \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right), & M' &= \psi(v) \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right), \\
Z' &= \psi(v) \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right), & N' &= \psi(v) \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right).
\end{aligned}
$$

Si ahora se realiza la inversión de este sistema de ecuaciones, primero resolviendo las ecuaciones que acabamos de obtener, y segundo utilizando las ecuaciones de la transformación inversa (desde k a K), que está caracterizada por la velocidad $-v$, se deduce, cuando consideramos que los dos sistemas de ecuaciones así obtenidos deben ser idénticos, que

$$\psi(v)\,\psi(-v) = 1$$

Además, por razones de simetría:

$$\psi(v) = \psi(-v)$$

y por tanto

$$\psi(v) = 1,$$

y nuestras ecuaciones adquieren la forma

$$
\begin{aligned}
X' &= X, & L' &= L, \\
Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right), & M' &= \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right), \\
Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right), & N' &= \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right).
\end{aligned}
$$

Acerca de la interpretación de estas ecuaciones hacemos las siguientes observaciones: Sea una carga eléctrica puntual de tal cantidad que mide "uno" en el sistema fijo K, es decir, se supone que en reposo en el sistema fijo ejerce una fuerza de una dina sobre una cantidad igual de carga eléctrica situada a una distancia de un cm. Según el principio de relatividad esa carga eléctrica debe medir también "uno" en el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad está en reposo relativamente al sistema fijo, entonces, por definición, el vector (X, Y, Z) es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la cantidad de electricidad está en reposo relativamente al sistema en movimiento (al menos en el instante considerado), entonces la fuerza que actúa sobre ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector (X', Y', Z'). En consecuencia las tres primeras ecuaciones de arriba se dejan vestir en palabras con enunciados de las dos formas siguientes:

1. Si una carga eléctrica puntual unitaria se mueve en un campo electromagnético, actúa sobre ella, además de la fuerza eléctrica, una "fuerza electromotriz" que, si despreciamos los términos que están multiplicados por las potencias segundas y más altas de v/c, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga por el campo magnético, dividido por la velocidad de la luz. (Vieja manera de expresión).

2. Si una carga eléctrica puntual unitaria se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella es igual a la fuerza eléctrica presente en la localización de la carga, que se obtiene por transformación del campo a un sistema de coordenadas en reposo relativamente a la carga eléctrica. (Nueva manera de expresión).

Análogamente vale para "fuerzas magnetomotrices". Vemos que en la teoría desarrollada la fuerza electromotriz juega meramente el papel de un concepto auxiliar, que debe su introducción a la circunstancia de que ni las fuerzas eléctricas ni las magnéticas existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Además es claro que la asimetría mencionada en la Introducción, sobre las observaciones de las corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor, ahora desaparece. Por otra parte, las cuestiones que conciernen al "asiento" de fuerzas electromotrices electrodinámicas (máquinas unipolares) ahora son irrelevantes.

§ 7. *Teoría del principio Doppler y de la aberración*

En el sistema K, muy lejos del origen de coordenadas, se supone que hay un manantial de ondas electrodinámicas, que en un entorno del origen de coordenadas pueden representarse, con un grado suficiente de aproximación, por las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
X &= X_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad L = L_0 \operatorname{sen}\Phi, \\
Y &= Y_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad M = M_0 \operatorname{sen}\Phi, \\
Z &= Z_0 \operatorname{sen} \Phi, \quad N = N_0 \operatorname{sen}\Phi,
\end{aligned}
$$

donde

$$\Phi = \omega\left\{t - \frac{1}{c}(lx + my + nz)\right\}.$$

Aquí (X_0, Y_0, Z_0) y (L_0, M_0, N_0) son los vectores que definen la amplitud del tren de ondas, y (l, m, n) los cosenos directores de las normales a la onda. Deseamos conocer la forma de estas ondas, cuando son examinadas por un observador en reposo en el sistema en movimiento k.

Utilizando las ecuaciones de transformación encontradas en § 6 para los campos eléctrico y magnético, y las encontradas en § 3 para las coordenadas y el tiempo, obtenemos directamente:

$$
\begin{aligned}
X' &= X_0 \operatorname{sen}\Phi', & L' &= L_0 \operatorname{sen}\Phi', \\
Y' &= \beta(Y_0 - vN_0/c)\operatorname{sen}\Phi', & M' &= \beta(M_0 + vZ_0/c)\operatorname{sen}\Phi', \\
Z' &= \beta(Z_0 + vM_0/c)\operatorname{sen}\Phi', & N' &= \beta(N_0 - vY_0/c)\operatorname{sen}\Phi', \\
\Phi' &= \omega'\left\{\tau - \frac{1}{c}(l'\xi + m'\eta + n'\zeta)\right\}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\beta(1 - lv/c), \\
l' &= \frac{l - v/c}{1 - lv/c}, \\
m' &= \frac{m}{\beta(1 - lv/c)}, \\
n' &= \frac{n}{\beta(1 - lv/c)}.
\end{aligned}
$$

De la ecuación para ω' se infiere que si un observador se mueve con velocidad *v*, relativamente a una fuente de luz de frecuencia ν, infinitamente distante, de tal manera que la línea que conecta “fuente de luz-observador” forma un ángulo ϕ con la velocidad del observador relativa a un sistema de coordenadas en reposo relativamente a la fuente de luz, entonces la frecuencia ν' de la luz percibida por el observador está dada por la ecuación:

$$\nu' = \nu \frac{1-\cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Éste es el principio de Doppler para cualesquiera velocidades. Cuando $\phi = 0$ la ecuación toma la forma clara

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}.$$

Se ve que, en contraste con la observación usual, cuando $v = -c, \nu' = \infty$.

Si se denota por ϕ' el ángulo entre las normales a la onda (dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea que conecta "fuente de luz-observador", la ecuación para ϕ' adquiere la forma

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{1-\cos\phi \cdot v/c}.$$

Esta ecuación expresa la ley de la aberración en su forma más general. Si $\phi = \frac{1}{2}\pi$, la ecuación adquiere la expresión sencilla

$$\cos\phi' = -v/c.$$

Todavía tenemos que encontrar la amplitud de las ondas, tal como aparece en el sistema en movimiento. Si se denota la amplitud del campo eléctrico o magnético, por A o A' medidas respectivamente en el sistema fijo o en el sistema en movimiento, se obtiene:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1-\cos\phi \cdot v/c\right)^2}{1-v^2/c^2}$$

ecuación que, si $\phi = 0$, se simplifica en

$$A'^2 = A^2 \frac{1-v/c}{1+v/c}.$$

Se deduce de estos resultados que para un observador que se acerca a una fuente de luz con velocidad c, esa fuente de luz debería manifestarse con intensidad infinita.

§ 8. *Transformación de la energía de los rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre reflectores perfectos*

Dado que $A^2/8\pi$ es igual a la energía de la luz por unidad de volumen, tenemos que considerar $A'^2/8\pi$, por el principio de relatividad, como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Así A'^2/A^2 sería la razón entre la energía "medida en movimiento" y la "medida en reposo" de un determinado complejo de luz, si el volumen del complejo de luz fuera el mismo, medido en K o en k. Pero éste no es el caso. Si l, m, n son los cosenos directores de las normales a la onda luminosa en el sistema fijo, ninguna energía pasa a través de los elementos superficiales de una superficie esférica que se mueve con la velocidad de la luz:

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2.$$

Podemos, por tanto, decir que esta superficie encierra permanentemente al mismo complejo de luz. Pensamos acerca de la cantidad de energía que encierra esta superficie, observada en el sistema k, eso es, acerca de la energía del complejo de luz relativamente al sistema k.

La superficie esférica —observada en el sistema en movimiento— es una superficie elipsoidal, cuya ecuación, en el tiempo $\tau = 0$, es

$$(\beta\xi - l\beta\xi\, v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi\, v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi\, v/c)^2 = R^2.$$

Si S es el volumen de la esfera, y S' el de este elipsoide, por un cálculo sencillo se obtiene:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.$$

Así, si se denota por E la energía de la luz encerrada por esta superficie medida en el sistema fijo, y por E' cuando se mide en el sistema en movimiento, se obtiene:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

fórmula que, cuando $\phi = 0$, se simplifica a:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Es digno de mención que la energía y la frecuencia de un complejo de luz varíen de acuerdo con la misma ley según el estado de movimiento del observador.

Sea ahora el plano de coordenada $\xi = 0$ una superficie perfectamente reflectante, en la que se reflejan las ondas planas consideradas en § 7. Deseamos conocer la presión de radiación ejercida sobre la superficie reflectante, y la dirección, frecuencia, e intensidad de la luz después de la reflexión.

Se supone que la luz incidente está caracterizada por las cantidades A, $\cos\phi$, v (referidas al sistema K). Observadas desde k, las cantidades correspondientes son

$$A' = A\frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi \cdot v/c},$$
$$v' = v\frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Para la luz reflejada, refiriendo el proceso al sistema k, se obtiene:

$$A'' = A'$$
$$\cos\phi'' = -\cos\phi'$$
$$v'' = v'$$

Finalmente, transformando a la inversa al sistema fijo K, se obtiene para la luz reflejada:

$$A''' = A''\frac{1+\cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = A\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2},$$

$$\cos\phi''' = \frac{\cos\phi''+v/c}{1+\cos\phi''\cdot v/c} = -\frac{\left(1+v^2/c^2\right)\cos\phi-2v/c}{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2},$$

$$v''' = v''\frac{1+\cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = v\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2},$$

La energía (medida en el sistema fijo) que incide sobre un área unidad del espejo por unidad de tiempo es evidentemente $A^2\left(c\cos\phi-v\right)/8\pi.$ La energía que abandona la unidad de superficie del espejo por unidad de tiempo es $A'''^2\left(-c\cos\phi'''+v\right)/8\pi.$ La diferencia de estas dos expresiones es, por el principio de la energía[3], el trabajo realizado por la presión de la luz en la unidad de tiempo. Si ponemos este trabajo como igual al producto $Pv,$ donde P es la presión de la luz, se obtiene:

$$P = 2\cdot\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\phi-v/c\right)^2}{1-v^2/c^2}.$$

De acuerdo con la experiencia y con otras teorías, se obtiene en una primera aproximación

$$P = 2\cdot\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi.$$

Todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento se pueden resolver por el método aquí empleado. Lo esencial es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz que actúe sobre o desde un cuerpo en movimiento, se transforme a un sistema de coordenadas en reposo relativamente al cuerpo. Por este método todos los problemas de la óptica de los cuerpos en movimiento se reducirán a una serie de problemas de la óptica de los cuerpos fijos.

§ 9. *Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz cuando se tienen en cuenta las corrientes de convección*

Se parte de las ecuaciones

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X}{\partial t}+u_x\rho\right\}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t}+u_y\rho\right\}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z}{\partial t}+u_z\rho\right\}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

donde

$$\rho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

denota 4π veces la densidad de carga eléctrica, y (u_x, u_y, u_z) el vector velocidad de la carga. Si imaginamos que la carga eléctrica se acopla indisolublemente a cuerpos rígidos pequeños (iones, electrones), estas ecuaciones constituyen las bases electromagnéticas de la electrodinámica de Lorentz y de la óptica de los cuerpos en movimiento.

Estas ecuaciones, que se suponen válidas en el sistema K, se transforman, con ayuda de las ecuaciones de transformación dadas en §§ 3 y 6, al sistema k. Entonces se obtienen las ecuaciones

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X'}{\partial \tau}+u_\xi\rho'\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau}+u_\eta\rho'\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_\zeta\rho'\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

donde

$$u_\xi=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2}$$
$$u_\eta=\frac{u_y}{\beta\left(1-u_x v/c^2\right)}$$
$$u_\zeta=\frac{u_z}{\beta\left(1-u_x v/c^2\right)},$$

y

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta}$$
$$= \beta\left(1 - u_x v/c^2\right)\rho.$$

Dado que —como se deduce del teorema de adición de velocidades (§5)— el vector $\left(u_\xi, u_\eta, u_\zeta\right)$ no es más que la velocidad de la carga eléctrica, medida en el sistema *k*, tenemos la prueba de que, según las bases de nuestros principios cinemáticos, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de relatividad.

Además puede añadirse brevemente que de las ecuaciones desarrolladas se deduce fácilmente el siguiente teorema: Si un cuerpo cargado eléctricamente se mueve arbitrariamente en el espacio sin que se altere su carga, cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo, su carga también permanece constante —cuando se observa desde el sistema "fijo" K —.

§ 10. *Dinámica del electrón acelerado lentamente*

Sea una partícula cargada eléctricamente con carga eléctrica ε (llamada en lo que sigue "electrón") que se mueve en un campo electromagnético. Para su ley de movimiento se supone lo siguiente: Si el electrón está en reposo en un momento determinado, el movimiento del electrón en los instantes siguientes tiene lugar de acuerdo con las ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z$$

donde x, y, z indican las coordenadas del electrón, y *m* su masa, siempre que su movimiento sea lento.

Ahora, en segundo lugar, se supone que la velocidad del electrón en una etapa determinada es *v*. Buscamos la ley del movimiento del electrón en los instantes de tiempo inmediatamente siguientes.

Sin que afecte al carácter general de nuestras consideraciones, podemos suponer que el electrón, en el momento en que le prestamos nuestra atención, está en el origen de coordenadas, y que se mueve con la velocidad v a lo largo del eje X del sistema K. Es claro entonces que en el momento dado $(t = 0)$ el electrón está en reposo relativamente a un sistema de coordenadas k que está en movimiento paralelo con velocidad constante v a lo largo del eje X .

A partir de la suposición anterior, junto al principio de relatividad, se deduce que en el tiempo inmediatamente siguiente (para valores pequeños de t) el electrón, observado desde el sistema k, se mueve de acuerdo con las ecuaciones:

$$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',$$
$$m\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$
$$m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

en las que los símbolos, $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ se refieren al sistema k. Si, además, decidimos que cuando $t = x = y = z = 0$ deben ser $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, entonces las ecuaciones de transformación de §§ 3 y 6 son válidas, y así tenemos

$$\begin{aligned} &\tau = \beta\left(t - vx/c^2\right), \\ &\xi = \beta\left(x - vt\right), && X' = X, \\ &\eta = y, && Y' = \beta\left(Y - vN/c\right), \\ &\zeta = z, && Z' = \beta\left(Z + vM/c\right). \end{aligned}$$

Con la ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones del movimiento anteriores del sistema k al sistema K, y obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta^3}X \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta}\left(Y - \frac{v}{c}N\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{m\beta}\left(Z + \frac{v}{c}M\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Siguiendo como es usual el discurso indagamos ahora acerca de las masas "longitudinal" y "transversal"del electrón en movimiento. Escribimos las ecuaciones (A) en la forma

$$\begin{aligned} m\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X &&= \varepsilon X', \\ m\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right) &&= \varepsilon Y', \\ m\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right) &&= \varepsilon Z', \end{aligned}$$

y notamos, en primer lugar, que $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, observadas, de hecho, desde un sistema de coordenadas que en ese momento se mueve con la misma velocidad que el electrón. (Esta fuerza podría medirse, por ejemplo, mediante un dinamómetro en reposo respecto del último sistema mencionado). Si ahora llamamos, aunque sea de manera incorrecta, a esta fuerza sencillamente "la fuerza que actúa sobre el electrón", y mantenemos que la ecuación

número de masa × número de aceleración = número de fuerza

es correcta, y si también suponemos que las aceleraciones deberán medirse en el sistema fijo K, obtenemos de las ecuaciones anteriores:

$$\textit{Masa longitudinal} = \frac{m}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^3}.$$

$$\textit{Masa transversal} = \frac{m}{1 - v^2/c^2}.$$

Si utilizáramos definiciones diferentes de fuerza y de aceleración naturalmente obtendríamos otros valores para las masas. Esto nos muestra que en la comparación de diferentes teorías del movimiento del electrón debemos proceder muy cautelosamente.

Hacemos notar que estos resultados acerca de la masa son también válidos para puntos materiales ponderables porque un punto material ponderable puede convertirse en un electrón (en nuestro sentido de la palabra) por adición de una carga eléctrica *arbitrariamente pequeña*.

Determinaremos ahora la energía cinética del electrón. Si un electrón se mueve desde el reposo en el origen de coordenadas en el sistema K a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza electrostática X, es claro que la energía extraída del campo electrostático tiene el valor $\int \varepsilon X dx.$ Como el electrón debe ser acelerado lentamente, y consecuentemente no puede emitir ninguna energía en forma de radiación, la energía extraída del campo electrostático debe asignarse a la energía de movimiento W del electrón. Teniendo presente que, durante el proceso completo del movimiento que estamos considerando, es válida la primera de las ecuaciones (A), se obtiene:

$$W = \int \varepsilon X dx = m\int_0^v \beta^3 v dv$$
$$= mc^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

Así, cuando $v = c,$ W se hace infinito. Velocidades mayores que las de la luz no tienen —como en nuestros resultados previos— posibilidad de existencia.

Esta expresión de la energía cinética, asimismo puede aplicarse a masas ponderables, en virtud de la validez del argumento anterior.

Ahora enumeraremos las propiedades del movimiento del electrón que se derivan del sistema de ecuaciones (A), y son accesibles al experimento.

1. De la segunda ecuación del sistema (A) se deduce que un campo eléctrico Y y un campo magnético N actúan con la misma intensidad deflectiva sobre un electrón que se mueve con velocidad v cuando $Y = N v/c.$ Así vemos que es posible, a través de nuestra teoría, determinar la velocidad del electrón a partir de la relación de la potencia magnética de deflexión A_m y la potencia eléctrica de deflexión A_e, para cualquier velocidad, por aplicación de la ley:

   $$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}$$

   Esta relación se puede probar experimentalmente, puesto que la velocidad del electrón puede medirse directamente, p. ej., por medio de campos eléctricos y magnéticos rápidamente oscilantes.

2. De la deducción de la energía cinética del electrón se sigue que entre la diferencia de potencial, $P,$ y la velocidad adquirida, $v,$ del electrón debe haber la relación

   $$P = \int X dx = \frac{m}{\varepsilon} c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calculamos el radio de curvatura R de la trayectoria del electrón en un campo magnético N que actúa (como única fuerza deflectiva) perpendicularmente a la velocidad del electrón. De la segunda de las ecuaciones (A) obtenemos:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{m}\frac{v}{c}N\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

o

$$R = \frac{mc^2}{\varepsilon} \cdot \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Estas tres relaciones constituyen una expresión completa de las leyes según las cuales debe moverse el electrón, de acuerdo con la teoría aquí expuesta.

Finalmente deseo decir que en este trabajo he tenido la asistencia leal de mi amigo y colega M. Besso, y que le estoy agradecidísimo por varias sugerencias valiosas.

Berna, Junio de 1905

(Entrada 30 de junio de 1905)

NOTAS

* *Annalen der Physik* 17, 891ss. Traducción de FRANCISCO GONZÁLEZ DE POSADA y DOMINGA TRUJILLO JACINTO DEL CASTILLO. La traducción se ha realizado directamente del original alemán y contrastado con versiones inglesas [NT].

[1] En esta traducción se utilizarán las expresiones “sistema en reposo”, “sistema estacionario, “sistema inmóvil” o “sistema fijo” como sinónimos, y simbólicamente, en todo caso, sistema de coordenadas K [NT].

[2] Se sustituye en esta traducción como símbolo de la velocidad de la luz, la original V utilizada por Einstein por la firmemente establecida c [NT].

[3] Se trata del “Principio de conservación de la energía” [NT].