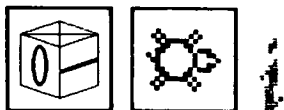


# ¿Cuáles son las conexiones entre las variables en logo y las variables en álgebra?

Rosamund Sutherland



*Sería con toda seguridad deprimente conocer el porcentaje de alumnos que fracasa en el álgebra desde los primeros pasos: la comprensión de lo que implica la notación simbólica en letras y del concepto de variable. Este artículo expone una investigación que se centra en este problema y lo resuelve con éxito recurriendo a un sistema notarial alternativo y complementario del álgebra de papel y lápiz (el lenguaje LOGO) y a la representación gráfica de la acción de las variables en la pantalla del ordenador. Además de realizar una exposición rigurosa de la investigación, el artículo describe con toda claridad los procedimientos de instrucción a seguir y los materiales a utilizar, por lo que construye realmente un modelo de enseñanza listo para su uso.*

## 1. INTRODUCCION

Para muchos alumnos el álgebra constituye una barrera para la comprensión de las matemáticas de enseñanza secundaria. Las investigaciones sobre comprensión del álgebra por parte de los alumnos ha permitido desvelar los problemas que tienen éstos a la hora de interpretar el significado de las letras y de formalizar y simbolizar un método generalizable (Kuchemann, 1981; Booth, 1984 a y b). Vergnaud ha llegado a afirmar que «el álgebra es un rodeo: los estudiantes deben evitar la tentación de calcular lo desconocido tan rápido como

sea posible; deben aceptar operar sobre símbolos sin prestar atención al significado de estas operaciones en el contexto de referencia» (Vergnaud, 1986). Este autor, creemos que con bastante acierto, sugiere que debemos encontrar problemas que provoquen el uso del álgebra. Pero no es esta una tarea fácil en las matemáticas escolares «tradicionales». Curiosamente, el contexto de programación del ordenador proporciona situaciones problema en las que la variable es una herramienta significativa para resolver problemas. La disponibilidad de ordenadores en la escuela ha crecido notablemente en los últimos años y no hay

«What are the links between variable in Logo and variable in Algebra?» *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1987, 8 (12), pp. 103-130. Reproducido con autorización. ©Traducción al castellano, CL&E, 1989. (Traducción de Carmen Trillo.)

ninguna razón para suponer que no continuará este aumento. Parece, por tanto, apropiado plantear de qué diversas maneras puede mejorar el ordenador el aprendizaje de las matemáticas y, más en concreto y por lo que respecta a este artículo, el aprendizaje del álgebra.

En una investigación exploratoria con ocho alumnos (de diez años de edad en adelante) que habían aprendido Logo durante dieciocho meses, Noss (1986) ya había señalado que «los niños pueden, bajo condiciones adecuadas, utilizar el álgebra que han empleado en un entorno Logo para construir significados algebraicos en un contexto no computacional» (Noss, 1986). No obstante, esta investigación sugiere también que no es probable que el uso de la variable se produzca «de forma natural» y «que, aparte de dificultades a la hora de definir un procedimiento general, se aprecia fundamentalmente la falta de un sentido inmediato que señale la necesidad de definir tales procedimientos» (Hillel, Samurçay 1985 a).

Este artículo describe la investigación que hemos realizado para probar la hipótesis de que determinadas experiencias en programación en Logo proporcionan a los alumnos una base conceptual de la variable, lo que mejorará su trabajo con el álgebra tradicional «de papel y lápiz».

Los propósitos de la investigación son:

— Describir el desarrollo y comprensión del concepto de variable en un contexto de programación de Logo a partir del trabajo de cuatro pares de alumnos, objeto de la investigación, durante sus primeros tres años de enseñanza secundaria (11-14 años).

— Desarrollar y probar materiales diseñados para ayudar a que los alumnos conecten la concepción de variable, derivada desde el interior de un contexto Logo, a un contexto no Logo.

— Relacionar la comprensión que tienen los alumnos del concepto de variable en la programación Logo, con su comprensión de variable en el álgebra «de papel y lápiz».

Esta investigación surge del seno del «Logo Maths Project» (Sutherland, Hoyles 1987), un estudio longitudinal de alumnos (de entre 11 y 14 años de edad) que programan Logo durante sus lecciones «normales» de matemáticas. El currículum de matemáticas Smile<sup>1</sup> per-

mite al profesor trabajar de forma individualizada o con grupos de alumnos. Durante esta actividad los alumnos, organizados en parejas, pueden turnarse para trabajar en los dos ordenadores situados en la clase. Los investigadores actuaban como observadores participantes y recogiendo datos sistemáticos durante los tres años del proyecto, sobre cuatro parejas de alumnos<sup>2</sup>. Se organizó a los alumnos en parejas para tratar de detectar la posible transmisión del interés por las matemáticas y para probar las opiniones que despertaba en los profesores la agrupación de alumnos para el trabajo constructivo. Los datos incluían registros del trabajo en Logo de los alumnos<sup>3</sup>, de todo lo que hablaban los alumnos durante su trabajo con Logo (se conectó una cámara de video entre el ordenador y el monitor), las intervenciones de los investigadores, y un registro de todo el trabajo matemático restante realizado por los alumnos. Se hizo después una transcripción de las grabaciones de video y éstas, junto a las observaciones del investigador, y las entrevistas a profesores y alumnos, proporcionaron la información base para la investigación. Durante los tres años del proyecto los alumnos participantes recibieron aproximadamente sesenta horas de experiencia práctica de programación en Logo. Los alumnos seguían su currículum normal de matemáticas y ni el tipo ni la cantidad de trabajo en álgebra llevada a cabo por los alumnos fue controlada por los investigadores.

## 2. EL CONCEPTO DE VARIABLE EN LOGO

«Es difícil hablar de programación como si fuese una habilidad rutinaria. Los procesos cognitivos implicados en una actividad de programación dependen tanto del entorno de programación utilizado (lenguaje, máquina, etc.) como de la clase de problema que se intenta resolver. Por ejemplo, los problemas que se puedan resolver en Logo no pertenecen a las mismas clases de problemas que se resuelven en Prolog» (Hillel y Samurçay, 1985 b).

En Logo las variables se utilizan como parte de las definiciones de un procedimiento y, aunque no son el punto fundamental de este artículo, los aspectos de subprocedimiento, modularidad y secuenciación están fuertemente relacio-

nados con el uso de variables en Logo. El Logo es tanto un lenguaje de programación funcional como modular. En Logo las variables pueden ser definidas como globales y locales. Una variable local es un parámetro a través del que un valor pasa a un procedimiento. Veamos un ejemplo de variable local empleada como input para un procedimiento:

```
TO SQUARE "SIDE
REPEAT 4 [ FD: SIDE RT 90]
END
```

La variable SIDE se nombra en la línea del título del procedimiento y se usa después dentro del procedimiento. Como lenguaje, Logo distingue entre el nombre y el valor de una variable. El uso de comillas en la forma "X denota el nombre de la variable y el uso de dos puntos :X denota el valor de la variable. La variable SIDE se utiliza como medio de pasar un valor al procedimiento SQUARE. Teclear SQUARE 30, hará que el ordenador ejecute el procedimiento SQUARE asignando el valor 30 a la variable denominada SIDE. Cuando se utiliza una variable como input para un procedimiento, sólo existe localmente para ese procedimiento y para cualquier subprocedimiento dentro del mismo. Deja de existir en la memoria del ordenador cuando el procedimiento ha sido procesado. Por el contrario, una variable global, que se asigna normalmente por medio de la expresión «MAKE», existe en todos los procedimientos y sólo deja de existir cuando se apaga el ordenador.

Las variables locales están inextricablemente vinculadas a las ideas de output y recursión en Logo. El propósito durante el proyecto fue desarrollar un enfoque consistente con la enseñanza y aprendizaje del Logo como lenguaje de programación. Se decidió introducir a los alumnos sobre todo en variables locales, en oposición a variables globales. De hecho, los alumnos utilizaron sólo en una ocasión una variable global durante los tres años que duró el proyecto, lo que implica que los alumnos participantes en este estudio no utilizaron la variable (con excepción de la mencionada ocasión) en la expresión de asignación MAKE. La investigación se ocupa de la utilización y comprensión, por parte de los alumnos, de ideas relacionadas con el álgebra en un entorno

Logo. Pero se ocupaba por la comprensión de los alumnos de la variable desde una perspectiva informática.

En este estudio hemos investigado el concepto de variable en Logo desde la perspectiva de «campo conceptual» (Vergnaud, 1982). La idea de campo conceptual se utiliza para delimitar el concepto sometido a estudio y admitir a la vez el inevitable solapamiento entre conceptos. Además, la interrelación entre el grupo de situaciones problema, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y los sistemas simbólicos utilizados para representar el concepto, son fundamentales para la idea de un campo conceptual. Al comienzo del período de investigación, no fue posible llevar a cabo un análisis «a priori» preciso y relevante para este estudio, del campo conceptual de variable, y ello porque se sabía muy poco sobre los tipos de problema o sobre las ideas relativas al álgebra cuyo uso fuera apropiado para que los alumnos programaran Logo. El campo conceptual de variable aquí presentado fue desarrollado durante los dos primeros años de la investigación, bajo la influencia del análisis que Hillel y Samurçay habían realizado sobre los diferentes conceptos de programación que subyacen al Logo. Su análisis tiene una gran utilidad para ver la relación existente entre los distintos usos del procedimiento en Logo. Estos autores definen como procedimiento simple aquel compuesto únicamente por primitivas de Logo. Si un procedimiento contiene otro subprocedimiento lo consideran como procedimiento compuesto. Por nuestra parte, en esta investigación lo consideramos como un superprocedimiento. Hillel y Samurçay afirman que «desde el punto de vista de la psicología cognitiva el concepto de variable representa una invariante. Con ello queremos decir que, en el caso de una variable, aunque se cambien los valores de los inputs en un procedimiento, permanecen invariantes tanto las relaciones inter como las intra procedurales. Esta invarianza se caracteriza por la atribución de un nombre a la variable y por el control de su valor» (Hillel y Samurçay, 1985 b). Hillel y Samurçay también señalan que, en la programación de Logo, el concepto de variable siempre aparece relacionado con otros conceptos (por ejemplo, procedimiento, recursión, etc.).

Iniciamos nuestro proyecto de inves-

tigación con la intención de permitir a los alumnos elegir libremente sus propias metas, pero el análisis de los primeros dieciocho meses de los datos transcritos nos indicó, en primer lugar, que los alumnos raramente elegían proyectos en que fuera necesario recurrir al concepto de variable y, en segundo lugar que, incluso cuando el investigador apreciaba esa necesidad de recurrir a la variable en un proyecto de los alumnos o en una tarea «encargada por el profesor» e intervenía personalmente al respecto, los alumnos se mostraban reacios a utilizar la idea. Este fue el caso tanto de los alumnos con escasa como con ninguna experiencia de la variable en el álgebra «de papel y lápiz» (los alumnos seguían su currículum «normal» de matemáticas y el investigador conocía la clase y cantidad del trabajo de álgebra llevado a cabo por los alumnos, pero no estaba bajo control). Los alumnos no podían concebir ningún proyecto en que se utilizara la noción de variable hasta que no tuvieran alguna idea del potencial de esta noción. Se decidió, por tanto, introducir el concepto de variable a todos los alumnos mediante una serie de tareas estructuradas. La primera tarea de este tipo, la tarea de las «letras crecientes» (letra que aumenta proporcional-

mente) (Figura 1) trataba de incitar a los alumnos a emplear los conceptos como una herramienta de resolución de problemas para, y a continuación, desarrollar la idea de variable como un objeto susceptible de manipulación (Douady, 1985). Aunque ésta fue una tarea inicialmente diseñada por el profesor, tan sólo se trataba de un punto de partida y los alumnos ampliaron la tarea de muy diversas maneras (ver, por ejemplo, la Figura 2). Tras «las letras crecientes» se desarrollaron toda una serie de tareas diseñadas por el profesor para promover el uso de los alumnos de ideas relacionadas con el álgebra en sus programas de Logo. Los cuatro pares de alumnos del estudio no trabajaron todos con las mismas tareas a lo largo del proyecto.

Los alumnos trabajaron, también, en las tareas de la «máquina de función» (Function Machine) (como ejemplo, ver Figura 8) durante el último período de la investigación. Estas tareas fueron diseñadas para ayudarles a establecer conexiones entre la variable en Logo y la variable en el álgebra de «papel y lápiz» (discutimos este punto más extensamente en la sección tres de artículo).

Dentro del mundo de la geometría de la tortuga, un procedimiento general produce un efecto «cambiante» sobre la

FIGURA 1

FORMAS DE LETRAS

Escribe un procedimiento para dibujar una letra.

```
L
FD 100
BK 100
RT 90
FD 50
BK 50
LT 90
END
```

A continuación, edita tu procedimiento para multiplicar cada comando de distancia por uno escalar.

```
L "SCALE
FD MUL 100 :SCALE
BK MUL 100 :SCALE
RT 90
FD MUL 50 :SCALE
BK MUL 50 :SCALE
LT 90
END
```

Ahora prueba

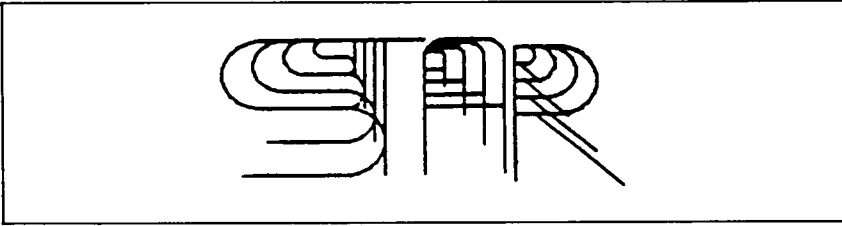
```
L 1.0
L 0.5
L 2.7
L -1.9
```

¿Qué pasa con tu letra?

¿Cómo lo puedes hacer de grande?  
¿Cómo lo puedes hacer de pequeño?

*La tarea de la «letra que aumenta proporcionalmente».*

FIGURA 2



*Modificación hecha por un alumno de la tarea  
«Letras Crecientes»*

pantalla, de modo que podemos sugerir que definir procedimientos generales en la geometría de la tortuga, podría ser conceptualmente más fácil para los alumnos que definir procedimientos de una geometría «no-tortuga». En cualquier caso, un procedimiento general puede originarse, o bien a partir de una solución a un problema bien definido, o bien de una actividad definida de forma imprecisa en la que construye el superprocedimiento mediante la interacción con el ordenador. Es muy probable que la dimensión bien definido/imprecisamente definido influya en las demandas cognitivas de las tareas.

Es importante analizar lo que significa la variable en la programación en Logo desde el punto de vista del alumno. Llevando a cabo un análisis continuo de las situaciones en las que los alumnos emplearon variables para definir procedimientos generales, hemos identificado ciertas categorías de uso de las variables que nos proporcionan un marco general para analizar la comprensión que tiene el alumno de las ideas relacionadas con el álgebra en Logo.

I) Una variable como input de un procedimiento.

E) La variable como factor Escalar.

N) Más de una variable como input de un procedimiento.

O) Variable input Operada dentro de un procedimiento.

F) Variable input para definir una Función matemática en Logo.

G) Superprocedimiento General que utiliza un subprocedimiento general.

R) Superprocedimiento Recursivo General

A continuación describimos estas categorías:

#### **D) Una variable como Input de un procedimiento**

En esta categoría, sólo incluimos situaciones en las que no se ha operado con la variable dentro del procedimiento (Figura 3). Esta variable podía representar: (a) un número entero positivo en, por ejemplo, el número de «REPEATs»; (b) un número real en, por ejemplo, un comando de distancia de ángulo. Cuando los alumnos utilizan una variante input están utilizando la variable como lugar o soporte para situar un conjunto de números. Al principio de la investigación partíamos de la hipótesis de que utilizar la variable de esta manera podría facilitar la comprensión de la variable como dato general no conocido en álgebra.

FIGURA 3

```
TO TRIANGLE "SIDE
REPEAT 3 [FD :SIDE RT 90]
END
```

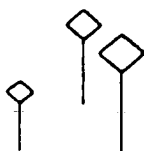
*Procedimiento con una variable input.*

## E) La variable input como un factor Escalar

En este tipo de utilización, se empleaba la variante input para escalar todos los comandos de distancia en un procedimiento de gráficos de tortuga. Este tipo de variable input puede ser utilizado por los alumnos como una forma de generalizar un procedimiento fijo (figura 4a) sin hacer explícitas las relaciones geométricas internas al procedimiento. Al comienzo de la investigación teníamos la hipótesis de que sería conceptualmente más fácil para los alumnos servirse de la idea de que podían convertir un procedimiento fijo en un procedimiento general escalando los comandos de distancia que consideran que debían explicar la relación general operando con una variable input dentro de un procedimiento. Cuando los alumnos utilizan el input como factor escalar, pueden definir un procedimiento general a partir de un procedimiento fijo sin tener que reflexionar sobre las invariantes que incluye su procedimiento.

FIGURA 4a

*Variable como  
Factor Escalar*



```
TO TOM "SCALE
LT 90
PU
BK 90
PD
FD MUL SCALE 60
LT 45
FD MUL SCALE 20
RT 90
FD MUL SCALE 20
RT 90
FD MUL SCALE 20
RT 90
FD MUL SCALE 20
END
```

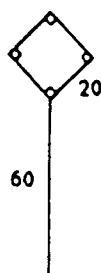
## N) Más de una variable como input de un procedimiento

Esta categoría se refiere a situaciones en las que los alumnos utilizan más de una variable input en su procedimiento

(Figura 4b). Los inputs de variable pueden añadirse a un procedimiento general para evitar tener que explicitar una determinada relación entre diversas variables. Pensamos que utilizar más de un input de esta manera es conceptualmente más fácil que operar sobre una sola variable en el interior de un procedimiento.

FIGURA 4b

*Más de una variable  
como input*



```
TO KITE "YT "HT
RT 45
FD YT
RT 90
FD YT
RT 90
FD YT
RT 90
FD YT
BD YT
RT 90
FD YT
RT 45
FD HT
END
```

## O) La variable input Operada dentro de un procedimiento

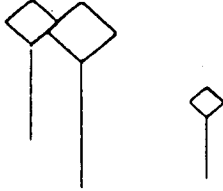
En esta categoría la explicitación de cualquier relación general entre las variables dentro de un procedimiento se realiza operando sobre uno o más inputs de variable dentro del procedimiento (Figura 4c). Para poder hacer tal cosa el alumno necesita identificar lo que es variable y lo que es invariante.

## F) Variable input para definir una Función matemática en Logo

En esta categoría, un procedimiento actúa como una función matemática. Una variable es primero input y después se opera sobre ella dentro del procedimiento y el output resultado del proce-

FIGURA 4c

*La variable operada dentro del procedimiento*



```
TO SQUAN "NUM
LT 135
REPEAT 4[FD NUM RT 90]
LT 135
FD MUL NUM 3
END
```

dimiento puede ser utilizado por otra función o comando Logo (Figura 7a).

**G) Superprocedimiento General que utiliza un subprocedimiento general**

Esta categoría se refiere a superprocedimientos generales que utilizan subprocedimientos generales (Figura 5). Es aquí importante considerar el uso de la variable en el contexto de Logo como un lenguaje de programación estructurado. Lo que significa que se pueden definir diversos estratos de subprocedimientos insertados o incluidos en otros.

FIGURA 5

```
TO LONG "SCALE
STEP
L :SCALE
MOVE :SCALE
O :SCALE
MOVE :SCALE
N :SCALE
MOVE :SCALE
END
```

*Superprocedimiento general.*

**R) Superprocedimiento Recursivo General**

Esta categoría hace referencia a superprocedimientos recursivos generales. En el contexto de esta investigación los alumnos sólo utilizaron procedimientos recursivos de cola (Figura 6).

FIGURA 6

```
TO CORRIDOR "DISTANCE
FD :DISTANCE
RT 90
CORRIDOR ADD :DISTANCE 1
END
```

*Procedimiento recursivo.*

**3. UTILIZACION DE LA IDEA DE FUNCION PARA ESTABLECER CONEXIONES ENTRE LAS REPRESENTACIONES EN LOGO Y EN ALGEBRA**

El Logo es un lenguaje de programación funcional cuyo modelo subyacente es la idea matemática de función. Es posible definir y construir funciones, componer funciones e intervenir funciones en Logo, que modelan el comportamiento de las funciones en matemáticas. El siguiente ejemplo, basado en una función matemática elemental, nos puede servir para ilustrar este punto. La notación matemática empleada para las funciones varía tanto históricamente como pedagógicamente y la Figura 7 representa una función simple mediante un programa Logo, un diagrama y la notación algebraica.

Podemos considerar a todas ellas como distintas representaciones de la misma función. Un determinado dominio está asociado a esta función y podemos definir ese dominio tanto mediante la función matemática como mediante la función Logo. Y una sola imagen va asociada a cada uno de los miembros de do-

FIGURA 7

<pre>TO ADDFOUR "X OUTPUT ADD :X4 END</pre>	<p>IN</p> <p>3</p> <p>-2</p> <p>1.5</p>	<p>→</p> <p>→</p> <p>→</p>	<p>OUT</p> <p>7</p> <p>2</p> <p>5.5</p>	<p>F(X) = X + 4</p> <p>or X → X + 4</p>
---	---	----------------------------	---	---

FIGURA 7a

FIGURA 7b

FIGURA 7c

minio. Para definir una función de Logo, es necesario utilizar la idea de output. También podemos representar en Logo una función compuesta de tal modo que se ajuste a la representación algebraica. Tanto en la representación algebraica como en la de Logo, el hecho de cambiar el nombre de las variables no cambia en sí la función. Así, por ejemplo, en álgebra,  $H(y) = y - 7$  es la misma función que  $H(w) = w - 7$  y en Logo:

TO H "y
OP :y - 7
END

es lo mismo que

TO H "w
OP :w - 7
END

Así, aunque este artículo se centra en la comprensión por parte de los alumnos de la variable y no de la función, decidimos, sin embargo, basar nuestros materiales para ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre la variable en Logo y la variable en álgebra, sobre la idea de función, dada la semejanza estructural entre las dos. El papel de la variable a la hora de definir las funciones de Logo es parecido al papel de variable al definir las funciones algebraicas. Hipotetizamos que la presentación de estos dos contextos semejantes a los alumnos les ayudaría a establecer conexiones entre la variable Logo y la variable álgebra. Todos los alumnos habían recibido unas cincuenta horas de programación de ordenador con gráficos de tortuga antes de trabajar en estas tareas. Aunque el propósito fundamental del material de la máquina de función era utilizar la semejanza entre la función Logo y la función en álgebra para ayudar a los alumnos a establecer la conexión entre la variable en Logo y la variable en álgebra, perseguíamos otros objetivos secundarios, como:

— Extender el uso de la variable por los alumnos a un contexto no gráfico en el que la variable representa un número.

— Hacer que los alumnos pasen de la utilización de palabras para los nombres de variantes a letras aisladas, porque eso es lo que habitualmente encontraran en el mundo del álgebra.

— Generalizar a otros campos la experiencia de los alumnos en el empleo de expresiones de variable «no cerradas» en Logo.

— Incitar a los alumnos al empleo de números decimales y negativos y, con

ello, desarrollar su comprensión de que la variable puede representar todo un repertorio de números.

— Enfrentar a los alumnos con la idea de que cambiar el símbolo dentro de una función no implica cambiar aquello a lo que éste se refiere.

La experiencia de los alumnos con la máquina de función, consistió en dos actividades: a) una actividad basada en el ordenador y b) una actividad «de papel y lápiz».

#### a) Actividad basada en el ordenador

Trabajando por parejas, dimos a los alumnos una hoja de trabajo (Figura 8) y les pedimos que definieran una función aritmética simple. Esta era la primera vez que cualquiera de los alumnos de la investigación empleaba la idea de output en Logo. La hoja de trabajo indicaba a los alumnos que utilizaran diferentes inputs para la máquina de «función». El papel de investigador/profesor era mantener a los alumnos trabajando en la tarea. Se les pidió que experimentasen con toda gama de inputs (habíamos seleccionado específicamente de forma que incluyesen un número decimal y un número negativo, para ampliar así la noción de los alumnos sobre «cualquier tipo de número»). El investigador/profesor también pedía a los alumnos que utilizaran diversos tipos de nombres para las variables, entre ellos nombres de una sola letra. He aquí un par de ejemplos de algunos de los procedimientos que se definieron:

TO LL "L
OUTPUT MUL 1.5:L
END

(equivalente de  $x \rightarrow 1.5x$ )

TÓ HAZEL "NUT
OUTPUT DIV :NUT 3
END

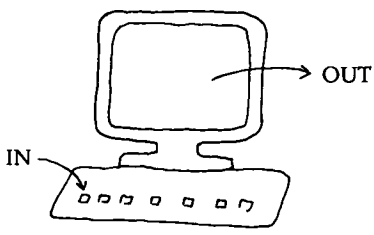
(equivalente de  $y \rightarrow y/3$ )

Cuando el investigador/profesor estaba suficientemente seguro de que los alumnos habían comenzado a comprender lo que significaba definir funciones simples en Logo, se les daba una hoja en la que:



FIGURA 8

UNA MAQUINA DE FUNCION



Puedes usar el ordenador para hacer una máquina de función. Por ejemplo, haz un tipo de máquina «AÑADE CUATRO» (ADDFOUR).

TO ADDFOUR  
"NUM  
OP ADD 4 NUM  
END

Teclea los comandos para ADDFOUR. No olvides teclear END.

Ahora prueba.

```
PRINT ADDFOUR 3
PRINT ADDFOUR 12.5
PRINT ADDFOUR -5
```

Ahora, haz tu propia máquina de función. También podrías utilizar:

```
ADD +. SUBTRACT -.
MULTIPLY *. DIVIDE /
```

*Tarea de la máquina de función.*

1. Se pedía a un miembro de cada pareja que definiese una máquina de función sin permitir que su compañero viese la función.
2. Se pedía al otro miembro de la pareja que pusiese números en la máquina de función para probar la función. Se pedía al «adivino» que dibujase un diagrama como instrumento para resolver el problema (ver, por ejemplo, la Figura 7b). Este «juego de adivinanza» era uno de los elementos claves de nuestro material, puesto que motivaba a ambos

alumnos a reflexionar sobre el proceso interno de la máquina de función.

3. Se pedía al «adivino», una vez que había resuelto la función, que definiese una máquina de función idéntica. Para impedir que su compañero adivinase la función, los alumnos se veían en la necesidad de elegir nombres de funciones que no estaban conectados con el efecto de la máquina.

4. Se pedía a los alumnos que se convencieran de que ambas funciones, definidas por cada uno de ellos, eran idénticas.

```
TO MAT "PIG
OUTPUT MUL 14 :PIG
END
```

```
TO MULRED "RED
OUTPUT MUL 14:RED
END
```

Ambas son equivalentes en cuanto a  $z \rightarrow 14z$ .

ticas en estructura aunque los nombres utilizados pudiesen ser diferentes.

Al definir una función en Logo, la sintaxis de la representación es un elemento crítico. Aunque algunos de los alumnos encontraban al principio difícil de recordar la naturaleza específica de la sintaxis del Logo, el carácter práctico de las sesiones de Logo hizo que al final de las mismas, todos los alumnos pudieran definir funciones simples mientras trabajaban en el ordenador. El juego de «adivinanza» desempeñó un papel importante a la hora de enganchar a ambos alumnos en la actividad «palpable» de definir funciones. También proporcionó la motivación para hacer que los alumnos reflexionaran sobre el proceso utilizando las funciones definidas por ellos mismos. Antes de estar metidos en el juego de la adivinanza, los alumnos tendían a no reflexionar sobre la relación del input y el output con la función definida. Resultaba además evidente que el hecho de escribir en papel el diagrama tenía una clara influencia para incitar a los alumnos a reflexionar sobre el proceso implicado en la definición de una función simple. El hecho de que los alumnos tuviesen para elegir cualquier nombre de variable y cualquier nombre de función, parece también haber sido importante desde el punto de vista de la motivación. Además parece que los alumnos y sus compañeros encontraban su propio ritmo de trabajo, de modo que, por ejemplo, algunos definieron rápidamente las funciones para todas las operaciones mientras que otros pasaron más tiempo con funciones de adición.

Se presentaba primero la idea de máquina de función a los alumnos por medio de un ejemplo escrito (ADDFOUR, Figura 8) y los alumnos generalizaron erróneamente a partir de este ejemplo. Todos ellos pensaron que el nombre (ADDFOUR) de la función del primer ejercicio era significativo. Sólo cuando el juego de adivinanza les empujó a cambiar el nombre, se dieron cuenta de que podría utilizarse cualquier nombre. También utilizaron el mismo nombre de variable (p.e. NUM) que se les dio en la hoja hasta que el investigador les instó a elegir cualquier nombre.

#### b) *Material de «papel y lápiz»*

Aproximadamente un mes después de que los alumnos hubiesen realizado la tarea práctica de función se les puso a

trabajar fuera del ordenador en una serie de tareas de «papel y lápiz». A todos los alumnos se les daba la misma hoja de trabajo inicial y trabajaban luego sobre ella a su propio ritmo. La tarea era del tipo siguiente:

1. Hojas de trabajo (ver, por ejemplo, la Figura 9) que llevaban a los alumnos a escribir funciones Logo a partir de una serie de diagramas. (El objetivo perseguido era consolidar la conexión entre el diagrama y la representación Logo).

2. Una hoja de trabajo en la que se daba a los alumnos las equivalencias entre la notación de Logo y la de álgebra y se les indicaba que hiciesen algunas equivalencias más ellos mismos.

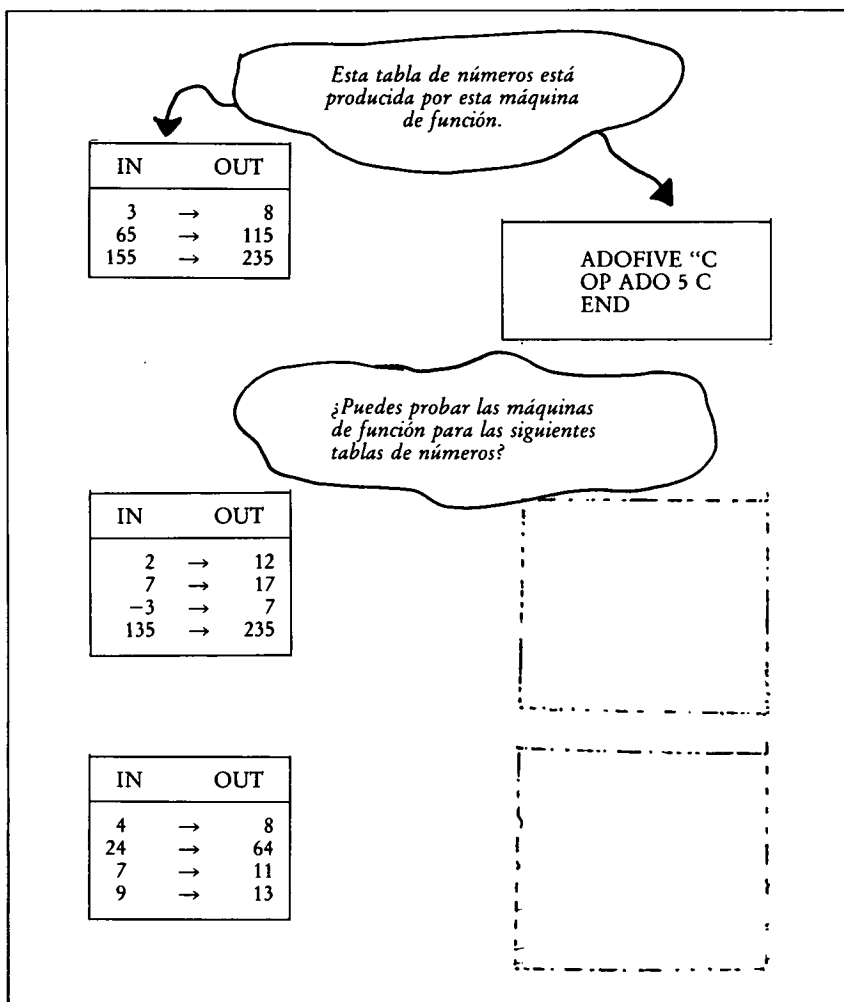
3. Hojas de trabajo que pedían a los alumnos que escribiesen tanto la representación en Logo como en álgebra de ciertos diagramas dados.

Cuando los alumnos completaban estas tareas se les pedía que escribiesen las representaciones en álgebra, en las hojas de trabajo que ya habían completado desde una perspectiva Logo. La relación entre la representación final en álgebra de los alumnos y su representación original en Logo, se ha utilizado como base para analizar si los alumnos establecían o no conexiones entre las dos representaciones.

Se decía a los alumnos que podían comentar la tarea con otros alumnos (puesto que el propósito de la tarea era establecer conexiones entre las representaciones y no comprobar si los alumnos conocían la función). Los alumnos discutían libremente entre sí la naturaleza de la función representada en el diagrama. Pero a pesar de esta libre discusión los alumnos utilizaban notaciones diferentes para representar las mismas funciones. El papel del investigador/profesor consistía en mantener a los alumnos trabajando en la tarea. Los alumnos terminaron la tarea en una sesión de una hora.

Vista la consistencia de las representaciones en álgebra y Logo de Sally, Janet, Asim y George, en respuesta a las tareas «de papel y lápiz», parece claramente evidente que habían establecido conexiones entre las representaciones de función en Logo y en álgebra. Había alguna evidencia y a juzgar por las modificaciones que Linda y Shahindur hicieron en sus representaciones de Logo tras haber escrito sus representaciones en ál-

FIGURA 9



*Tarea de máquina de función «de papel y lápiz».*

gebra, parece haber cierta evidencia de que estaban empezando a establecer conexiones entre las dos representaciones. No tenemos ninguna evidencia, en cambio, de que Ravi y Jude hubiesen establecido ninguna conexión entre las dos representaciones.

#### 4. ANALISIS DE LA COMPRENSION DE VARIABLE POR PARTE DE LOS ALUMNOS

Para analizar la comprensión de la variable por parte de los alumnos nos he-

mos establecido las siguientes categorías:

- Aceptación de la idea de la variable.
- Comprensión de que se puede utilizar cualquier nombre de variable.
- Comprensión de que un nombre de variable puede representar toda una gama de números.
- Aceptación de la «falta de clausura» en una expresión.
- Comprensión de que diferentes nombres de variable pueden representar el mismo valor.
- Capacidad para establecer una re-

lación de segundo orden entre las expresiones de la variable.

— Capacidad de utilizar variables para formalizar un método general.

De cara a demostrar nuestras tesis (la comprensión por parte de los alumnos de la variable tanto en Logo como en álgebra) se les hizo a todos una entrevista individual estructurada al final del tercer año de investigación. Además, los alumnos visitaron los laboratorios de la universidad para llevar a cabo de forma individual las tareas diseñadas para investigar su comprensión en la variable en Logo. Presentamos a continuación los resultados de tareas de laboratorio individuales y de la entrevista estructurada.

A partir de los items de la entrevista estructurada, los datos transcritos y las tareas individuales de laboratorio, podemos extraer la evidencia de la comprensión de la variable en Logo por parte de los alumnos, mientras que la comprensión de la variable en álgebra sólo podemos inferirla a partir de los datos de la entrevista estructurada.

*Tareas individuales de laboratorio.* Al final del período de investigación todos los alumnos participantes pasaron un día trabajando individualmente en tareas específicas de Logo. Estas tareas eran la tarea del «cuadro variable», la tarea del «pirulí» (Figura 4) y la tarea «de la fila de cuadros decrecientes» (Figura 10).

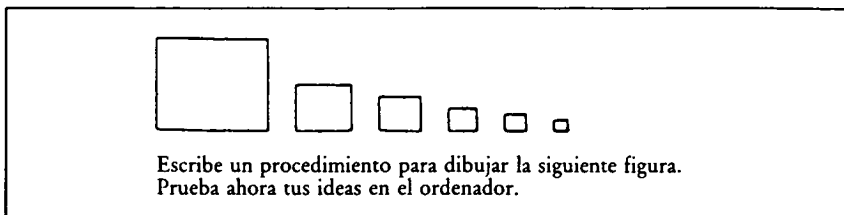
En la Tabla 1 se presenta una visión de la solución de los alumnos a estas tareas de acuerdo con las categorías explicadas en la sección dos del artículo. No fue sorprendente encontrarnos con que la experiencia práctica de los alumnos en la utilización de la variable Logo influía directamente en sus soluciones a estas tareas. La Tabla 2 presenta una visión de conjunto de la utilización por los alumnos de la variable a lo largo de los tres

años del proyecto. Shahidur y Ravi resolvieron las tres tareas utilizando la variable como factor escalar, lo que se ajustaba a lo que había sido su experiencia predominante en el uso de la variable. Linda, o bien utilizó la variante como un factor escalar o bien, en el caso del pirulí, definió dos procedimientos separados, uno para el «palo» y otro para el «dulce», cada uno de ellos con un input. Pero no intentó combinar por sí misma estos procedimientos en un superprocedimiento. Sally, Janet, Asim y George no utilizaron la variable como un factor escalar como medio para resolver ninguna de estas tareas. Sólo George, Asim y Jude resolvieron la tarea operando sobre una variable. La evidencia que podemos extraer de los datos transcritos indica que los alumnos o bien ignorarán una razón dada, o bien «la simplificarán, reduciéndola a una razón de «dividir por la mitad y doblar» a menos que se les diga específicamente que no lo hagan así. Esto indica que se necesita prestar más atención al diseño de tareas en las que es necesario operar sobre una variable para resolver la tarea. Y se sugiere que sólo cuando los alumnos son capaces de utilizar la variable en la categoría «Variable input Operada dentro de un procedimiento» es cuando han roto realmente con el pensamiento aritmético y pasado al algebraico (Fillooy, Rojano 1987) en el contexto de Logo.

*La entrevista estructurada.* Para comprobar la comprensión por parte de los alumnos del estudio, de las ideas relacionadas con el álgebra tanto en Logo como en el álgebra de «papel y lápiz» se hizo a todos los alumnos del estudio una entrevista estructurada que incluía tareas de «papel y lápiz». En la entrevista se les pidió:

— Hacer una generalización y formalizarla en un contexto de álgebra.

FIGURA 10



*Tarea de los cuadrados decrecientes.*

TABLA 1

*Tareas del Día de trabajo en la Universidad*

	Tarea del cuadrado variable	Tarea de la fila de cuadrados decrecientes	Tarea del piruli
Sally	I) Una variable input	G) Superprocedimiento general O) Variable sobre la que se opera	N) Más de un input
Asim	I) Una variable input	I) Una variable input	O) Variable sobre la que se opera
George	I) Una variable input	G) Superprocedimiento general O) Variable sobre la que se opera	O) Variable sobre la que se opera
Janet	I) Una variable input	I) Una variable input (para subprocedimiento)	N) Más de un input (no relacionados)
Jude	I) Una variable input	I) Una variable input (para subprocedimiento)	O) Variable sobre la que se opera
Ravi	S) Variable como factor escalar	No se utilizó input	S) Variable como un factor escalar
Linda	I) Una variable input	I) Una variable input (para subprocedimiento).	N) Más de un input (no relacionados)
Shahidur	S) Variable como factor escalar	S) Variable como un factor escalar	S) Variable como un factor escalar.

— Hacer una generalización y formalizarla en un contexto Logo.

— Contestar preguntas de álgebra (relativas al significado de la notación en letras) extraídas del «Proyecto<sup>4</sup> sobre Conceptos en Matemáticas y Ciencias de Enseñanza Secundaria» (ver, por ejemplo, Figuras 11 y 12a).


— Contestar las preguntas Logo relativas al significado de los nombres de la variable (ver, por ejemplo, Figura 12b).

— Representar una función tanto en Logo como en álgebra.

Entrevistamos además a un grupo de alumnos similares a los del estudio anterior, para contar con otro punto de vista desde el que analizar las respuestas de los alumnos de la investigación a los items relativos al álgebra de la entrevista estructurada. Este grupo se denominó grupo de comparación. El colegio utilizado para la investigación cuenta

FIGURA 11

Parte de esta figura no está dibujada.  
 Hay «n» lados en total, todos ellos de longitud 3.  
 ¿Cuál es el perímetro de esta forma?  
 $p = \dots$



*Pregunta de álgebra de «Conceptos en la Enseñanza Secundaria de Matemáticas y Ciencias».*

TABLA II

*Número de sesiones en las que los alumnos de la investigación han utilizado la variable en su programación de Logo*

Categoría de uso	Alumno 1 Sally	Alumno 2 Asim	Alumno 3 George	Alumno 4 Janet	Alumno 5 Jude	Alumno 6 Ravi	Alumno 7 Linda	Alumno 8 Shahidur
I) Un input	4	2	1	4	2	0	2	1
S) Factor escalar	3	5	4	3	4	3	7	7
N) Más de un input	3	3	3	3	0	0	3	0
O) Variable sobre la que se opera	6	6	6	6	1	0	1	0
G) Input para superprocedimiento general con subprocedimiento variable	2	3	3	2	3	0	4	0
R) Procedimiento recursivo	2	3	3	2	0	0	0	0
C) Input a una función matemática	2	2	2	4	1	2	3	2

con centros en la etapa de 11-14 años cuyos alumnos pasan a un centro único a partir de los 15 años, en los cursos superiores. Los dos centros de enseñanza privada se encuentran en distintos lugares y no hay contacto entre sus respectivos alumnos. Ninguno de los alumnos del centro del nivel de primaria que no participaba en el estudio había utilizado el Logo. Las clases de matemáticas en ambos centros son clases de capacidad

mixta, es decir, no se subdivide a los alumnos por su capacidad o nivel. El grupo de alumnos de comparación se extrajo del centro de primaria que no participaba en la investigación. Los alumnos fueron escogidos de acuerdo con su rendimiento en matemáticas de forma que fuesen semejantes a los alumnos del estudio en lo que respecta al nivel SMILE (4).

En esta sección comentaremos los re-

FIGURA 12

<p>A) ¿Cuándo es cierto lo siguiente?</p> $L + M + N = L + P + N$ <p style="text-align: center;">Siempre, nunca, algunas veces, cuando...</p>	<p>B) ¿Cuándo dibujarán estos comandos Logo una línea de la misma longitud?</p> <pre style="margin-left: 20px;"> TO LINES "L "M "N "P FD :L FD :M FD :N RT 90 FD :L FD :P FD :N END                     </pre> <p style="text-align: center;">Siempre, nunca, algunas veces, cuando...</p>
---	--

sultados de las entrevistas estructuradas tanto desde el punto de vista de la comprensión de la variable en Logo por parte de los alumnos de la investigación como desde el punto de vista de su comprensión en el álgebra de «papel y lápiz». La Tabla 3 presenta una visión de conjunto de los resultados de la entrevista estructurada tanto de los alumnos de investigación como de los del grupo de comparación.

Se consideraba que la aceptación de la idea de variable estaba presente si los alumnos aceptaban de buen grado las preguntas de la entrevista estructurada. Todos los alumnos de la investigación aceptaron la idea de variable en las preguntas de álgebra «de papel y lápiz». Esto contrasta con el hecho de que sólo tres de siete alumnos del grupo de comparación aceptasen la idea de variable en el álgebra «de papel y lápiz». Cuatro de los ocho alumnos de la investigación nunca habían dado álgebra en sus lecciones «normales» de matemáticas y se sugiere que la experiencia de variable en Logo ha proporcionado a estos alumnos un marco general a partir del que pueden comenzar a desarrollarse su comprensión. No debería infravalorarse el hecho de que Logo haya proporcionado a estos alumnos una experiencia positiva con el concepto de variable y sugerimos que esta comprensión sólo se desarrolla mediante la aceptación desde el principio y luego el uso de una idea.

*Comprender que se puede utilizar*

*cualquier nombre para una variable.* Antes de que los alumnos puedan utilizar y manipular una variable tendrán que denominarla. Nuestra investigación nos permite afirmar que en los primeros contactos del alumno con la variable, atribuye demasiada importancia al nombre de la variable. Por una parte, elegir un nombre significativo estimula a los alumnos a aceptar el objeto, pero, por otra, ese nombre significativo lleva a los alumnos a pensar que posee algún significado y algún poder. Sugerimos, por tanto, que es necesario incitar específicamente el alumno a emplear toda su gama de nombres de variable, incluyendo nombres «absurdos» (que ellos saben que no tienen significado) y nombres abstractos y de una sola letra (que ellos utilizan en su trabajo de álgebra).

*Comprender que el nombre de una variable representa una cadena de números.* Si discutimos con los alumnos el significado de una variable Logo, sus respuestas son de este tipo: «el tamaño de lo que va a ser», «SIDE representa lo lejos que quiere hacer que vaya», «con SCALE puedes saber que puedes hacerlo tan grande o pequeño como quieras». Los alumnos perciben el nombre de la variable como soporte o envase para un número general. Aunque, por lo que parece, al hacerlo los alumnos trasladan su comprensión matemática del número a la situación de Logo, lo que significa que la idea que tiene el alumno de «gama de

TABLA III

*Clasificación de las respuestas de los alumnos del estudio del grupo de comparación a la entrevista estructurada.*

	Aceptación de la «idea» de la variable		Comprender que el nombre de la variable representa una serie de números		Aceptación de la falta de clausura		Comprender que los distintos nombres de la variable pueden representar el mismo valor		Capacidad para establecer una relación de segundo orden entre las expresiones de la variable dependiente				
	Logo	Álgebra	Logo	Álgebra	Logo	Álgebra	Logo	Álgebra	Logo	Álgebra			
Alumno 1	●	●	■	●	●	■	●	●	□	○	○	□	
Alumno 2	●	●	■	●	●	■	○	○	■	○	○	□	
Alumno 3	●	●	■	●	●	■	●	○	□	○	○	□	
Alumno 4	●	●	□	●	□	●	○	□	●	○	○	□	
Alumno 5	●	○	□	●	○	□	●	○	□	○	○	□	
Alumno 6	●	○	—	●	○	—	●	○	□	○	—	○	—
Alumno 7	●	●	□	●	□	□	●	○	□	○	○	□	
Alumno 8	●	●	□	●	□	□	●	○	□	○	○	□	

● Estudio-clasificación positiva      ■ Grupo de comparación-clasificación positiva  
○ Estudio-clasificación negativa      □ Grupo de comparación-clasificación negativa

Nota: El grupo de comparación sólo contestó las preguntas relativas al álgebra. El alumno 6 del grupo de comparación estaba ausente el día de la evaluación.

números» puede ser muy restringida (limitándose, por ejemplo, a números enteros positivos). Al menos la mitad de los alumnos de nuestra investigación se mostraron reacios a utilizar decimales en Logo. (La tarea de «Las letras crecientes» tenía un especial valor para que los alumnos utilizaran decimales y gracias a su implicación en ella vencían su resistencia a utilizar números decimales). Seis de los ocho alumnos de la investigación llegaron a trasladar al contexto del álgebra su comprensión de que el nombre de una variable puede representar toda una gama de números. Las evidencias disponibles que provienen de la investigación citada «Conceptos en la Enseñanza Secundaria de Matemáticas y Ciencias» y de las respuestas del grupo de comparación (Tabla 3) sugieren que no era esperable que Janet, Linda y Shahidur, en concreto, pudieran alcanzar esta comprensión. Nosotros sugerimos que la comprensión que muestran en el contexto del álgebra se deriva de su experiencia con Logo. Los dos alumnos que no respondieron positivamente, Jude y Ravi, tuvieron una experiencia muy limitada con el concepto variable en Logo (ver Tabla 2) y tampoco establecieron conexión alguna entre las representaciones de función en Logo y en álgebra, mientras realizaban las tareas de «la máquina de función».

Shahidur tuvo alguna dificultad con la pregunta de la citada investigación (C.E.S.M.C.): «si John tiene J canicas y Peter tiene P canicas, ¿qué tienen entre los dos?» y su respuesta indica el carácter transitorio de la comprensión que había logrado. Tras escribir 9 como solución, dio la siguiente explicación:

Shahidur: «porque John empieza con J y John tiene cuatro letras y Peter tiene cinco letras».

Investigador: «¿por qué piensas que P representa cinco?»

Shahidur: «porque me preguntaba por qué habían puesto una J y una P».

Investigador: «¿y si se llamaran Q y R?»

Con esta sugerencia inmediatamente escribió  $Q + R$ . Shahidur no es un alumno con experiencia en álgebra y su rendimiento en matemáticas es muy bajo. A pesar de estas circunstancias sus respuestas a las preguntas de los «Conceptos de matemáticas y Ciencias de Secundaria» (C.S.M.S.) son muy notables. Cuando le presentamos el problema del

perímetro (figura 11), escribió  $2 \times n$  como solución. Cuando se le pidió que explicase su solución dijo: «porque su tamaño es  $2 \dots$  y hay  $n$  de ellos, por tanto  $2$  veces  $n$  será la respuesta.»

*Aceptación de «falta de clausura».* Todos los alumnos del estudio aceptaron la falta de «clausura» en una expresión Logo. Efectivamente, si los comparamos con el grupo de control, más alumnos del grupo experimental de los que habría esperar aceptaron la falta de clausura en el contexto de álgebra, lo que nos sugiere que ello se debe a su experiencia con este tipo de expresión en Logo.

*Comprensión de que diferentes nombres de una variable pueden representar el mismo valor.* Para comprobar la comprensión por parte de los alumnos de si el nombre diferente de la variable puede representar el mismo valor o no, se les plantearon los siguientes problemas en Logo y en álgebra (aunque consecutivamente):

Sólo Sally respondió acertadamente a ambos items, pero cuatro de los ocho alumnos del estudio respondieron acertadamente al item de Logo. Lo que nos lleva a deducir que la experiencia con Logo de los alumnos era suficiente para que extrajeran una adecuada comprensión en un contexto de Logo, pero no era aún lo suficientemente general para que utilizaran esta comprensión en un contexto de álgebra «de papel y lápiz».

*Capacidad para establecer una relación de segundo orden entre expresiones dependientes de la variable.* Ninguno de los alumnos de la investigación pudo contestar correctamente a la pregunta de álgebra del C.E.S.M.C.: «¿qué es mayor  $2n$  o  $n + 2$ ? Explícalo... «ni a la pregunta Logo relacionada con esta. Küchemann mantiene que «una característica importante de estas relaciones es que los propios elementos de la relación son también relaciones, por lo que podemos llamarlas «relaciones de segundo orden» (Küchemann, 1981). Este autor mantiene que sólo cuando los alumnos han captado esta noción han comprendido bien la idea de variable. El análisis que hemos realizado de los datos nos indica que ninguno de los alumnos ha llevado a cabo ninguna de las tareas de Logo relativas a esta noción. Posteriormente realizamos un estudio con alumnos de diez-once años en el que éstos participaban en tareas diseñadas por el profesor centradas específicamente en esta



idea. Sus resultados muestran que si los alumnos utilizan esa noción durante su trabajo práctico con Logo, llegan a ser capaces de desarrollar una buena comprensión de la relación existente entre dos expresiones dependientes de la variable (Shutherland, 1988).

*Capacidad de emplear la variable para formalizar un método general.* Las dificultades de los alumnos con el álgebra provienen a menudo de los métodos informales que emplean en aritmética. Pero dentro del contexto del Logo e interactuando con el ordenador, los alumnos son capaces de desarrollar su comprensión intuitiva de modelos y las estructuras, hasta el punto en que pueden llegar a establecer una generalización y a formalizar esa generalización en Logo. Particularmente, para algunos alumnos la interacción con el ordenador parece desempeñar un papel crucial para desarrollar su comprensión de un método general.

## 5. CONCLUSIONES

Aunque esta investigación se ha realizado con un pequeño número de alum-

nos los resultados indican que, dado un cierto nivel de experiencia con la variable en Logo, los alumnos llegan a ser capaces de utilizar las ideas derivadas del Logo para resolver problemas similares de álgebra de «papel y lápiz». Sin embargo, los alumnos no establecerán necesariamente las conexiones por sí mismos. Nuestra investigación demuestra que materiales tales como la «máquina de función» ayudaban a los alumnos a establecer estas conexiones entre ambos contextos, aunque en la situación normal de clase podrían hallarse muchas más oportunidades para que el profesor comente las semejanzas y diferencias entre la variable en Logo y la variable en álgebra.

Creemos que son necesarias más investigaciones para lograr buenas situaciones problema en álgebra que motiven y estimulen a los alumnos que ya han experimentado la variable en un contexto de Logo. Un problema que queda pendiente para futuras investigaciones es el de dilucidar cómo debería cambiar el currículum de álgebra para tener en cuenta la experiencia del alumno con el concepto de variable en Logo.

## Notas

<sup>1</sup> El currículo de matemáticas es el SMILE (Secondary Mathematics Individualised Learning Experiment), Experimento de Aprendizaje Individualizado de Matemáticas para Enseñanza Secundaria. En este esquema cada alumno trabaja en su propio nivel individual. Puede utilizarse este nivel como medida del rendimiento del alumno en el sistema.

<sup>2</sup> Pudimos recoger datos sobre dos parejas mixtas, niño-niña a lo largo de los tres años de la investigación. Sin embargo, tras dos años se decidió que la pareja niño/niña no trabajaba junta de forma productiva y esta pareja se cambió a un pareja de niñas. Los dos alumnos que pertenecían a la pareja de rendimiento más bajo dejaron el colegio tras el primer año de investigación y se escogió otra pareja. Después, un miembro de esta nueva pareja se marchó al final del segundo año de investigación. (Aunque no es el tema central de esta investigación, es interesante destacar las considerables dificultades encontradas a la hora de tratar de seguir a los alumnos de rendimiento más bajo.)

He aquí una visión global de los años en que cada alumno tomó parte en el proyecto:

	Año 1	Año 2	Año 3
Alumno 1 (Sally)	*	*	*
Alumno 2 (Asim)	*	*	*
Alumno 3 (George)	*	*	*
Alumno 4 (Janet)	*	*	*
Alumno 5 (Jude)	*	*	—
Alumno 6 (Ravi)	—	—	*
Alumno 7 (Linda)	*	*	*
Alumno 8 (Shaidur)	—	*	*

Las parejas de trabajo eran:

- Sally y Janet
- George y Asim
- Linda y Jude
- Ravi y Shaidur

<sup>3</sup> Los alumnos del estudio trabajaron con Logo RML, que no posee operadores aritméticos infijos. En el Logo RML la tortuga señala horizontalmente a la derecha en la posición de punto de partida. Todos los procedimientos Logo de este artículo se han dado con Logo LCS1 utilizando operadores de prefijo. Los operadores de prefijo utilizados son: ADD para suma, SUB para resta, MUL para multiplicación, DIV para división.

<sup>4</sup> Como parte del programa de intervención «Conceptos de Matemáticas y Ciencias Secundaria» (Concepts in Secondary Mathematics and Science), se evaluó a casi mil alumnos de secundaria de más de catorce años de edad en cuanto a su comprensión del álgebra (aritmética generalizada) (Küchemann, 1981). Hemos tomado de este estudio los ítems de álgebra «de papel y lápiz» utilizados para evaluar a los alumnos de nuestra investigación y a los del grupo de control.

## Referencias

- BOOTH, L. R. (1984a). Algebra: Children's Strategies and Errors, *Nfer-Nelson*.
- BOOTH, L. R. (1984b). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *Journal pour les Enseignants de Mathématiques et de Sciences Physiques du Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire*, n.º 5.
- DOUADY, R. (1985). The Interplay between the Different Settings, Tool-Object Dialectic in the Extension of Mathematical Ability, *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, State University of Utrecht, The Netherlands, Vol. II.
- FILLOY, E., ROJANO, T. (1987). Concrete Models and Processes of Abstraction: Teaching to Operate the Unknown, *For the Learning of Mathematics*, n.º 7.
- HILLEL, J., SAMURÇAY, R. (1985a). The Definition and Use of General Procedures by 9 year olds, *Proceedings of the Logo and Mathematics Education Conference*, Universidad de Londres Instituto de Educación.
- HILLEL, J., SAMURÇAY, R. (1985b). Analysis of a Logo Environment for Learning the Concept of Procedures with Variable, Project Report, Universidad de Concordia, Montreal.
- HOYLES, C.; SUTHERLAND, R., y EVANS, J. (1985). *A preliminary Investigation of the Pupil-Centred Approach to the Learning of Logo in the Secondary School Mathematics Classroom (1983-1984)*, Logo Mathematics Project, Universidad de Londres, Instituto de Educación.
- KÜCHEMANN, D. E. (1981). «Algebra» in Hart, K. (Ed), *Children's understanding of Mathematics: 11-16*, Londres: Murray.
- NOSS, R. (1986). Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra through Logo Programming, *Educational Studies in Mathematics*, 17,4.
- SUTHERLAND, R. (1988). A Longitudinal Study of the Development of Pupil's Algebraic Thinking in a Logo Environment, PhD Thesis, Universidad de Londres.
- SUTHERLAND, R., HOYLES, C. (1987). *The Way We Learn*, Universidad de Londres Instituto de Educación.
- VERGNAUD, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics*, vol. 3, n.º 2.
- VERGNAUD, G., y CORTE, A. (1986). Introducing Algebra to «Low-Level» 8th and 9th Graders, *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Universidad de Londres Instituto de Educación.
- WAGNER, S. (1981). «An Analytical Framework for Mathematical Variables», *Proceedings of the 5th IGPME Conference, Grenoble, France*.

---

### Datos sobre la Autora

Rosamund Sutherland realiza su trabajo de «investigación» en el Instituto de Educación de la Universidad de Londres. (20 Bedford Way, London, WC 1 H OL England.)