La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado

Carmen Gómez-Granell

Que las matemáticas se refieren en último término a una realidad concreta y que su formalismo exige pese a todo un contenido es una de las tesis defendida en este artículo. Otra tesis adicional es que estos formalismos no se construyen interna e individualmente, sino externamente y en la interacción social. De ambas tesis, la autora extrae una mejor comprensión de los problemas del niño con las matemáticas y de lo que se puede hacer para resolverlos.

Uno de los problemas que más preocupa hoy a la moderna psicología cognitiva, y en general, a toda la psicología del pensamiento, es el de la producción del razonamiento abstracto y la naturaleza de los sistemas de representación.

Dicha problemática ha generado desde hace tiempo una larga serie de cuestiones y debates, de entre los cuales dos de ellos nos parecen de especial relevancia para el tema que nos ocupa en este artículo.

En primer lugar, el de las relaciones entre los aspectos sintácticos o formales del pensamiento y los aspectos semánticos o de contenido. Como se sabe, desde la psicología cognitiva y las posiciones más vinculadas a las teorías del procesamiento de la información se ha considerado el pensamiento como el resultado de la aplicación de reglas formales de inferencia, al margen de cualquier contenido. Igualmente, para la psicología piagetiana el progreso cognitivo se explica a partir de un modelo basado en la creciente competencia lógica del sujeto, y en el que los aspectos semánticos o del contenido no tienen un papel relevante. Sin embargo, la abundante investigación realizada en los últimos años sobre el papel de la representación del contenido en la construcción del pensamiento ha puesto de manifiesto la importancia de los aspectos temáticos y su función constitutiva en la construcción del razonamiento.

En segundo lugar estaría el problema del papel de la interacción social en dicha construcción. Las posiciones más logicistas, y en concreto la teoría piagetiana concibe dichas capacidades cognitivas como el resultado de un desarrollo *interno* del sujeto, quien mediante un proceso individual de interiorización a partir de la acción sobre los objetos, construye esquemas mentales y estructuras operatorias cada vez más potentes.

Así pues, desde la concepción piagetiana es en esa interacción con el mundo de los objetos y en el proceso interno de abstracción y equilibración de estructuras operatorias donde hay que buscar el origen de la conceptualización y los signficados.

Se otorga así a los signos un mero papel de significantes que representan dichos significados, lo que explica la ya conocida concepción piagetiana que minimiza el papel del lenguaje y la interacción social en la construcción del pensamiento y en el conocimiento abstracto.

Sin embargo, en los últimos años va tomando cada vez más fuerza, avalada por numerosas investigaciones actuales, la idea vygotskiana de que los procesos psicológicos superiores tienen su origen en la interacción social y la incorporación de los signos del habla. Desde esta óptica el desarrollo cognitivo se concibe como un proceso «desde fuera hacia dentro» (outside-in, según terminología de Kenneth Kaye, 1982), que se origina en contactos prácticos y familiares de relación interpersonal, de manera que, en palabras del propio Vygotski «en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual: primero entre personas (interpsicológica), y después en el interior del propio niño (intrapsicológica)... Todas las funciones se originan como relaciones entre seres humanos (Vygotski, 1979, p. 94). Ambos procesos, interpsicológico e intrapsicológico, estarían mediados semióticamente y ello constituiría uno de los mecanismos más importantes del progreso psicológico.

Los dos aspectos señalados, es decir, el de la relevancia de la representación del contenido y el de la función de la interacción social y la mediación semiótica en la construcción del pensamiento, cobran un especial interés en el caso del conocimiento matemático, dada su especial naturaleza que lo diferencia de otras ramas del conocimiento.

LA NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO Y EL LENGUAJE MATEMATICO

En primer lugar, el pensamiento matemático es esencialmente de carácter abstracto; los conceptos matemáticos como el número, por ejemplo, son entidades cognitivas que no poseen como referente un objeto real. Los postulados y teoremas de la matemática no se demuestran mediante la contrastación con lo real, sino a través de un riguroso método lógico-deductivo de validación interna.

Por otro lado, otro de los aspectos característicos de la matemática es su vinculación con un lenguaje específico de carácter formal y que posee propiedades que lo diferencian fuertemente de los lenguajes naturales.

En efecto, frente a la ambigüedad propia del lenguaje natural, el lenguaje matemático implica la abstracción de lo esencial de las relaciones matemáticas implicadas en cualquier situación, lo que permite un aumento del rigor que viene dado por la estricta significación de los términos.

Veamos por ejemplo la diferencia existente entre estas dos formulaciones equivalentes de una ecuación cuadrática, pertenecientes a etapas históricas diferentes (ejemplo citado por Alexandrov, Kolmogorov, Laurentiev et al., 1973, p. 58).

Formulación actual: $x^2 + az = b^2$, donde *x* y *a* son dos segmentos dados y *b* el lado de un cuadrado dado.

Formulación de la época griega: «Encontrar un segmento tal que si al cuadrado construido sobre él se le suma un rectángulo construido sobre el mismo segmento y sobre un segmento dado a, obtengamos un rectángulo de área igual a la de un cuadrado dado».

Es evidente que si la segunda formulación puede ser entendida prácticamente por cualquiera, con la primera entramos en un nivel de abstracción y convencionalización muy superior.

La expresión $x^2 + ax = b^2$ posee un grado de generalización que permite su aplicación a diversos contenidos geométricos (como el presente), físicos, etc. Sin embargo, si queremos acceder al sentido de la ecuación y saber si nos estamos refiriendo a una relación física o geométrica, es necesario definir las variables mediante el lenguaje común.

Por otra parte, un hecho evidente es también que la primera formulación facilita extraordinariamente el cálculo, mientras que la segunda requiriría larguísimos y pesadísimos párrafos.

Así pues, la potencia del lenguaje formal radica en su autonomía de lo real, que le permite la manipulación de conceptos y variables dentro de un sistema que no requiera una continua atención al significado referencial de las expresiones intermedias que va generando.

Sin embargo, no es menos cierto que las expresiones formales no son un conjunto de reglas desprovistas de cualquier significado referencial y que la utilidad del lenguaje formal para solucionar problemas depende de la capacidad para poner en relación dichas reglas con las distintas situaciones específicas.

Las concepciones excesivamente formalistas que han imperado entre los matemáticos han influido enormemente la enseñanza de esta disciplina, de manera que tanto desde las concepciones didácticas más clásicas de tendencia algorítmica, como desde las más recientes, vinculadas a concepciones estructurales y a la matemática moderna, la manipulación de signos y la primacía de los aspectos sintácticos sobre los semánticos ha sido una constante.

La mayoría de los alumnos aprende a aplicar los símbolos del lenguaje matemático según ciertas «reglas» que no poseen ningún tipo de justificación referencial que las dote de sentido.

Sin embargo, creemos que existen razones procedentes tanto de la propia historia de la matemática, como de la pedagogía y de la psicología, que muestran la necesidad de vincular las expresiones formales con sus referentes situacionales y conceptuales.

En este artículo defenderemos, pues, desde esa triple perspectiva histórica, pedagógica y psicológica, una doble hipótesis:

En primer lugar, la de que en la construcción del pensamiento matemático y, específicamente, de los formalismos matemáticos, juega un papel esencial la representación del contenido semántico de los contextos y situaciones que constituyen los referentes de las transformaciones matemáticas.

En segundo lugar, y como consecuencia de lo anterior, que el lenguaje matemático no puede ser considerado ni como una mera sintaxis desprovista de cualquier significado referencial, ni como una simple expresión notacional del significado de los conceptos matemáticos construidos mediante un proceso de reflexión y abstracción interna del sujeto a partir de la acción sobre el objeto, como propone Piaget. Al contrario, la adquisición de los símbolos matemáticos se origina en contextos de interrelación social y comporta una construcción conceptual que implica una función reguladora y constructiva y no estrictamente dependiente, de la significación de los conceptos matemáticos.

UNA MIRADA A LA HISTORIA DE LA MATEMATICA

Un somero análisis de los libros de texto de matemáticas que se utilizan hoy en día en nuestras escuelas, nos revela enseguida la gran abundancia de lenguaje formalizado, cosa que, por otra parte, es considerada normal por cualquiera de nosotros, que tenemos fuertemente asociado el razonamiento matemático al uso de dicho lenguaje.

Sin embargo, una revisión de los libros y tratados matemáticos nos mostraría que la presencia del lenguaje natural para formular ciertas relaciones matemáticas es muy fuerte hasta finales del siglo XIX.

Son numerosos los ejemplos de interacción entre lenguaje natural y simbólico. Junto al uso precoz de simbolismos formales, como el recurso a las letras en geometría, ya utilizados por los griegos y árabes para designar puntos, líneas, etc., en el siglo XVII subsisten todavía explicaciones de resolución de ecuaciones en lenguaje natural.

Pero es quizá la historia del álgebra una de las mejores muestras de la resistencia del pensamiento humano a abandonar «el contenido del objeto» expresado mediante lenguaje natural y sustituirlo por el «símbolo».

En efecto, según nos describe Dancing (1974), se pueden detectar tres grandes momentos en la evolución del álgebra.

A. Un álgebra terminológica, que se caracteriza por una ausencia total de símbolos, y en la que las ecuaciones se expresaban en lenguaje natural. Por ejemplo, una formulación simbólica tan habitual para nosotros como «$a + b = b + a$» era formulada en lenguaje escrito: «la suma es independiente del orden de los términos». Los griegos y los árabes se ciñeron fundamentalmente a dicho tipo de formulaciones concretas porque, en palabras de Dancing:

«... la pensée grecque était essentiellement anti-algébrique, parce qu'essentiellement concrète; les opérations abstraites de l'algèbre, où la forme physique des objets a été supprimée à dessein, ne pouvait à des esprits qui s'intéressaient si passionnément à la forme elle-même. Or le symbole est l'essence même de l'algèbre, ce n'est pas un simple accessoire. Sans le symbole, l'objet est une perception humaine et reflète tous les aspects et toutes les formes sous lequels nos sens le saisissent; remplacez-le par un symbole, et vous n'avez plus qu'une abstraction complète, un simple operandum assujetti aux opérations indiquées d'une façon certaine.» (Dancing, 1974, p. 84-85)[1].

B Un álgebra sincopada, utilizada entre otros por egipcios e hindúes, que se caracteriza porque las palabras del lenguaje corriente se van abreviando progresivamente hasta llegar incluso a perder su origen, de forma que el símbolo correspondiente no parece tener nada que ver con la operación que representa, de tal manera que la palabra sincopada se transforma en símbolo. Es lo que ocurrió, por ejemplo, con los símbolos = y −, expresados durante largo tiempo como «más» y «menos» en su forma latina «*p*» y «*m*».

C. Un álgebra simbólica, que se va configurando progresivamente, pero cuyo impulsor definitivo es Franciscus Vieta, quien en el siglo XV soluciona uno de los problemas más curiosos de la historia del álgebra: la utilización de un mismo simbolismo para representar dos objetos que juegan, en una ecuación, dos papeles distintos: la incógnita y los valores dados.

Durante mucho tiempo ambos datos se expresaron de forma diferente, de forma que el número desconocido y el dado debían ser diferenciados porque su *valor semántico* es diferente; (la incógnita, por ejemplo, había sido denominada «arithmos», «res», etc.) Vieta propone el uso de un mismo símbolo para ambos conceptos: las primeras letras del abecedario, de las cuales las vocales simbolizarían las incógnitas y las consonantes los valores dados. Aunque luego esto se sustituyó por el uso de las primeras letras (a, b, c, etc) para los valores dados y las últimas (x, y, z) para la incógnita, el principio de Vieta siguió siendo válido.

El ejemplo citado muestra claramente que el proceso de «desvinculación» del contenido es complejo y costoso y comporta dificultades conceptuales que implican un proceso de diferenciación entre los aspectos matemáticos y extramatemáticos de la situación. Y ello sólo es posible a través de la búsqueda de isomorfismos y regularidades matemáticas a partir de la diversidad semántica que ofrecen las distintas situaciones.

¿QUE SUCEDE EN LA ESCUELA?

Desde hace algunos años, son numerosos los trabajos que han puesto de manifiesto que la mayoría de los escolares han aprendido a manipular símbolos matemáticos de acuerdo con ciertas reglas sintácticas, sin ninguna referencia a los aspectos semánticos.

Algunos de estos trabajos han estudiado la naturaleza de los errores que los alumnos cometen en el aprendizaje de los simbolismos matemáticos. En los trabajos de Matz (1982) y Sleeman (1984), se atribuye la causa de los errores en el aprendizaje del álgebra a la formación de «reglas prototípicas» que son extrapoladas incorrectamente a contextos y situaciones no adecuadas, porque los alumnos se limitan a manipular los símbolos sin relacionarlos en absoluto con sus referentes conceptuales o situacionales.

Por ejemplo en un trabajo de Vanlehn (1983), se muestra cómo a partir de una regla correcta que implica la propiedad distributiva entre la multiplicación y la adición $(a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c))$, los alumnos generalizan un «prototipo» según el cual la distributividad se aplica cualquiera que sean los operadores $(a \square (b \triangle c) = (a \square b) \triangle (a \square c))$.

La aplicación de dicho «prototipo» explicaría la aparición de errores como: $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ o $\sqrt{b + c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Otros trabajos muestran las dificultades de los alumnos para dotar de significado a las expresiones matemáticas. Resnick (1987), en un trabajo reciente realizado con alumnos de entre 11 y 14 años de edad, señala las dificultades que éstos tienen para construir una «historia» o un problema a partir de una expresión matemática sencilla. Veamos dos de los ejemplos citados por Resni:

Ejemplo número 1:

El experimentador muestra la expresión 17-11-4

E: ¿Puedes inventar un problema en el que suceda esto? No importa con qué, con canicas, por ejemplo.

S: Hay un muchacho que tiene 17 canicas y otro tiene 6 menos que él. Buscas el resultado y tienes 11. El otro chico tiene 11 canicas. Para saber esto he hecho una resta.

E: Pero para encontrar 11 has hecho 17-6 y nosotros tenemos 17-11-4, no 17-6. Vamos a comenzar de nuevo. El chico número 1 tiene 17 canicas. ¿Qué puedes inventar para que sea 17-11-4?

La entrevista sigue sin que el sujeto consiga componer una historia coherente con la expresión matemática dada.

Ejemplo número 2:

E: Para 17-11-4, inventa un problema sobre canicas donde suceda 17-11-4.

S: Hay 17 chicos. De los 17, hay uno que tiene 11 canicas y ahora ha perdido 4 de ellas.

E: De acuerdo, pero puedes inventar un problema en el que haya 17 canicas, 11 canicas y 4 canicas?

S: Ah, sí. Por ejemplo, hay 17 canicas por la mañana, ...canicas al mediodía y 4 por la tarde.

E: ¿Y el 11?

S: Hay 11 por la tarde. Hay 17 canicas por la mañana, 4 al mediodía y 11 por la tarde.

Resnick atribuye estos hechos a una mala enseñanza de las matemáticas que no incide suficientemente en la vinculación de los simbolismos del lenguaje formal con sus referencias conceptuales y situacionales.

Otro grupo de investigaciones (Moreno y Sastre, 1977; Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980; Sellarés y Bassedas, 1983; Sinclair, 1983, 1986; Conne, 1984, 1985; Schubauer-Leoni, 1984; Gómez-Granell, 1985, 1988; Laborde, 1982; etc.) muestran la dificultad que tienen los alumnos para actualizar la escritura de ecuaciones sencillas, que utilizan normalmente en la escuela en situaciones prácticas. En dichos trabajos, en general, se proponen situaciones de comunicación referencial en las que uno o varios niños deben representar sobre un papel algunas transformaciones matemáticas realizadas prácticamente en su presencia y que responden a ecuaciones sencillas ($a + b = c$; $a - b = c$; $a \times b = c$, etc.), con el objetivo de que puedan ser interpretadas por un compañero que no ha estado presente durante la realización.

Los resultados de estos trabajos muestran claramente que los niños no recurren a los algoritmos convencionales, que sin embargo, —como ya hemos dicho— utilizan en los ejercicios escolares para representar dichas transformaciones, sino a representaciones propias que incorporan esquemas, dibujos y/o lenguaje natural.

A partir de las aportaciones de Doise, Mugny y Perret-Clermont sobre el papel del conflicto sociocognitivo (1975) en la construcción del conocimiento, algunos de estos trabajos intentaron mostrar que la interacción entre iguales (dos sujetos realizan conjuntamente la representación escrita de la transformación realizada), que obligaba a los sujetos a coordinar sus distintas centraciones, y/o el conflicto socio-cognitivo que se producía cuando el receptor no podía interpretar el mensaje, provocando una reestructuración cognitiva, producían un efecto de aprendizaje en los sujetos, ya que éstos se esforzaban en mejorar sus producciones, haciéndolas más precisas y claras para que pudieran ser entendidas por otros.

Tal y como han señalado ya otros autores (Coll, 1984; Forman y Cazden, 1984) no creemos que la hipótesis del conflicto sociocognitivo basada en la idea piagetiana del «conflicto cognitivo» entre los esquemas asimiladores del sujeto y las propiedades del objeto, como motor del desarrollo cognitivo y del aprendizaje (Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974), constituya una explicación adecuada, o cuando menos suficiente, para explicar el aprendizaje.

Los trabajos mencionados, en general, se limitan a constatar que en situaciones de interacción y comunicación, en las que supuestamente se produce un conflicto socio-cognitivo, se observa una mejora en las producciones de los alumnos. Y de aquí se infiere que dicho conflicto constituye un motor de aprendizaje. Como afirma Coll (1984), al margen que dicho progreso pueda ser debido a otros factores, dicha concepción atribuye a la interacción social un papel simplemente «favorecedor» del desarrollo lógico y la adquisición de contenidos escolares.

No obstante, desde nuestro punto de vista y a pesar de las restricciones señaladas, el interés de todos estos trabajos es indudable porque ponen de manifiesto no sólo que para la mayoría de los alumnos el lenguaje matemático se reduce a una sintaxis desprovista de significación, sino sobre todo, la naturaleza social y cultural, y no estrictamente «lógica» de los simbolismos matemáticos y la necesidad de estudiar su origen y naturaleza en contextos de interacción social.

Es este último aspecto, es decir, el estudio de la naturaleza de las representaciones que efectúan los niños para formular las transformaciones matemáticas, el que sin duda nos parece más interesante.

ORIGEN Y NATURALEZA DE LOS SIMBOLISMOS MATEMATICOS

Con este último objetivo realizamos un trabajo (Gómez-Granell, 1988) en el que entrevistamos a 50 escolares de entre 8 (3° EGB) y 12 años de edad (7° EGB). En dichas entrevistas se pedía a los niños, en primer lugar, que solucionaran prácticamente con caramelos y pesetas, dos problemas sencillos de multiplicación (si 1 caramelo vale 6 ptas, averiguar cuánto valen 6 caramelos) y división (si un caramelo vale 3 pesetas, averiguar cuántos caramelos se pueden comprar con 18 pesetas).

Una vez solucionado el problema, se les pedía a los niños que representaran en un papel las transformaciones realizadas de manera que el mensaje pudiera ser interpretado por un compañero ausente. A continuación, se hacía entrar a otro niño para que las leyera. Si el mensaje no era correctamente interpretado se proponía a ambos sujetos —emisor y receptor— que discutieran sobre la mejor manera de representar gráficamente las transformaciones realizadas e hicieran una nueva producción.

Los resultados obtenidos nos permitieron establecer tres niveles de simbolización:

En el primero de ellos los niños no representan la transformación matemática realizada, sino la situación global, es decir, el contexto situacional en el que dicha transformación está inmersa. Así, por ejemplo, los niños dibujan una tienda, las personas que van a comprar y vender, los objetos que hay en la tienda, etc. Los aspectos cuantitativos o bien no aparecen en absoluto, o bien aparecen como un atributo de los objetos (por ejemplo, el precio de los caramelos que se venden en la tienda).

Es interesante resaltar que en la situación experimental el único material que se da a los niños son caramelos y pesetas. Sin embargo, lo que los sujetos representan es el «contexto familiar» en el que ellos saben que se desarrollan en la realidad las transformaciones realizadas. Hasta el punto de que importa más representar dicho contexto situacional y extramatemático que la operación en sí.

En el segundo nivel y a diferencia del anterior en que los valores y cantidades que se manejaban en la transformación realizada no aparecían representados porque predominaban los aspectos situacionales, los niños formulan siempre las cantidades manejadas en la transformación, bien mediante cifras, representaciones esquemáticas o dibujos que representan los caramelos y las pesetas. Pero la característica esencial es que dichos valores se representan de forma aislada o incompleta, sin que se consiga expresar la acción o transformación que los pone en relación.

En el tercer nivel los sujetos consiguen representar la transformación realizada, pero mediante una representación figurativa que es una copia prácticamente exacta de la transformación realizada a nivel práctico.

En estas representaciones, en general, han desaparecido los aspectos situacionales (la tienda, las personas, etc.) que rodean a la operación, pero la representación de las cantidades y las relaciones entre las mismas es predominantemente icónica, si bien en algunas producciones la cifra acompaña o sustituye al dibujo en la representación de las cantidades.

Finalmente, en el cuarto nivel, los sujetos vinculan las transformaciones realizadas con el algoritmo canónico de la multiplicación y la división.

Una primera evidencia que se desprende del análisis de estos datos, puesta también de manifiesto por los trabajos ya mencionados, es que aunque la mayoría de los sujetos conocían y utilizaban en contextos escolares los algoritmos canónicos de la multiplicación y la división, no vincularon este conocimiento a las transformaciones prácticas realizadas en la entrevista.

Una interpretación excesivamente simplista de este hecho ha llevado a que en algunos de los trabajos mencionados se hable del «fracaso de la escuela», que conduce a que los contenidos aprendidos no se generalicen a situaciones prácticas.

Aunque evidentemente es de todos conocida la dificultad de la escuela para producir aprendizajes significativos, creemos que la interpretación de los hechos mencionados es más compleja.

Los niños, gracias no sólo a la escuela sino a su contacto con la cultura y la comunicación social, incorporan y utilizan desde edades tempranas los signos y símbolos de la matemática elemental, como son las cifras, los signos de las operaciones elementales (+, −, ×, ÷).

Ahora bien, la significación de dichos símbolos es en principio superficial, necesariamente poco flexible y limitada a un número restringido de contextos.

Las actividades matemáticas que la escuela propone están, en general, desvinculadas de los contextos y situaciones reales de la vida del niño, que siempre comportan interacción e interrelación personal.

Por el contrario, la situación propuesta por nosotros sitúa al niño en un contexto que puede vincular con una situación familiar (compra-venta) y le plantea la necesidad de «compartir» su conocimiento con otro compañero.

Ello hace que el niño no relacione dicha situación con su conocimiento de los algoritmos canónicos de la multiplicación y la división, vinculado a otros contextos estrictamente escolares, y busque una representación gráfica que transmita «el significado» de la situación en su globalidad.

Para el niño la transformación matemática forma parte de un contexto, de una situación familiar, vinculada a sus prácticas sociales cotidianas y es la comunicación de dicho contexto global (en el cual la operación matemática no está suficientemente diferenciada) lo que prioriza, recurriendo para ello a un código figurativo que le permite compartir el significado de la situación de referencia.

El análisis y diferenciación entre los aspectos matemáticos y extramatemáticos en múltiples y diversos contextos permitirá representar las transformaciones matemáticas a través de un proceso de búsqueda de isomorfismos matemáticos a partir de la diversidad semántica.

En este proceso el recurso a códigos figurativos e icónicos, es una estrategia fundamental, porque permite vincular el significado de la operación con el contenido metafórico.

Como señala Walkerdine (1982), en un interesante trabajo en el que se analizan diversas pautas comunicativas en contextos de aprendizaje escolar, los niños y también los adultos confieren sentido a sentencias abstractas insertándolas en el marco de un determinado contexto y de un discurso familiar. Un ejemplo de este hecho, citado por Walkerdine se observa en las entrevistas realizadas por Martin Hughes y Robert Grieve (1980), en las que se describe cómo cuando se les pregunta a los niños cuestiones del tipo: ¿Es el amarillo más grande que el verde? los niños siempre confieren sentido a la tarea tomando como referencia cualquier objeto de la habitación y diciendo por ejemplo: «sí, porque el libro amarillo es más grande que el lápiz verde». O los conocidos trabajos de Cole y Scribner (1974), en los que se describe el rechazo de los granjeros Kpelles de Liberia a aceptar ciertas tareas formales, como por ejemplo la solución de un silogismo que comienza con la sentencia «Fluomo y Yacpalo están bebiendo jugo de caña», con el argumento de que o bien no se conocen a dichos sujetos o bien estos no beben, mostrando hasta qué punto el contenido metafórico de las premisas puede condicionar la resolución de una tarea formal.

Al principio de este artículo hemos planteado un problema: el de la relevancia del contenido y de los aspectos temáticos en la construcción de un tipo de conocimiento, el matemático, cuyo discurso se caracteriza precisamente por prescindir de dichos contenidos, en aras del rigor y la potencia generalizadora.

Los resultados de los diferentes trabajos comentados, tanto del campo de la historia de la matemática como del de la psicología, muestran, desde nuestro punto de vista, la importancia que en la construcción de los simbolismos matemáticos tienen la vinculación con los referentes conceptuales y situacionales a través de la utilización de códigos no-formales. El pensamiento y el lenguaje matemático no se pueden producir al margen de la significación. Y en este sentido haríamos nuestras las palabras de R. Thom cuando afirma que «sólo puede llegarse al rigor absoluto eliminando la significación, y el rigor absoluto sólo es posible en y para la insignificancia. Si fuese necesario elegir entre rigor y sentido, yo elegiría el sentido sin dudar un minuto. Así se ha hecho siempre en matemática, en las que se está siempre en una situación semiformalizada, con un metalenguaje que es el lenguaje ordinario y no formalizado. Y todos los miembros del gremio se conforman con esta situación impura y no piden nada mejor» (Thom, 1974, p. 149 de la ed. castellana).

Desde esta perspectiva es, por otra parte, evidente que el lenguaje formal de la matemática no puede ser considerado como una simple expresión notacional de significados y conceptos que son el resultado de un proceso individual de interiorización de estructuras de acción. La construcción de los simbolismos matemáticos comporta una verdadera construcción conceptual que tiene su origen en contextos de interacción social en los que la necesidad de convención y comunicación obliga a un análisis más profundo de aquello que se desea transmitir, análisis que viene facilitado por el recurso a los códigos figurativos y al lenguaje natural.

A través de este proceso los simbolismos matemáticos adquiridos precozmente por los niños, pero con un bajo poder de generalización, van cobrando, a lo largo del desarrollo, significaciones cada vez más complejas y abstractas.

Ahora bien, este proceso no es, evidentemente, espontáneo. La escuela, como transmisora de la cultura y los conocimientos históricamente acumulados, juega un papel esencial en la adquisición de cualquier conocimiento. De lo expuesto en este artículo se derivan aspetos importantes a tener en cuenta en la enseñanza del lenguaje matemático, como es la necesidad de vincular su aprendizaje a contextos familiares y a la experiencia social y de respetar el uso de simbolizaciones propias, en las que intervengan el dibujo, los esquemas, el lenguaje natural, etc., de manera que el alumno pueda ser siempre capaz de dotar de significación concreta a cualquier expresión matemática.

No obstante, las formas en que se produce el proceso de adquisición del lenguaje matemático son todavía muy desconocidos. Se necesita una investigación de carácter didáctico que, en la línea de trabajos como los ya citados de Walkerdine, aporte elementos sobre las formas en que tiene lugar la adquisición de los conceptos matemáticos en el aula y sobre las pautas comunicativas que allí se desarrollan.

Notas

[1] «... el pensamiento griego era esencialmente antialgebraico: era fundamentalmente concreto; las operaciones abstractas del álgebra, donde se suprime a propósito la forma física de los objetos, no podía satisfacer a espíritus que se interesaban con tanta pasión por la forma misma. Ahora bien, el símbolo es la esencia misma del álgebra, no es un simple accesorio. Sin el símbolo, el objeto es una percepción humana y refleja todos los aspectos, todas las formas, bajo las cuales nuestros sentidos lo captan; substituidlo por un símbolo, y no tendréis más que una abstracción completa, un sencillo operandum sometido a las operaciones indicadas de una manera determinada.

Referencias

ALEXANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. (1973). *Las matemáticas: su contenido, método y significado.* Madrid, Alianza Universidad.

COLL, C. (1984). Estructura grupal, interacción entre alumnos y aprendizaje escolar. *Infancia y Aprendizaje,* 27-28, 191-138.

CONNE, F. (1984). *Recherche sur la lecture de l'écriture équatonielle chez les enfants de 7 ans.* Rapport de recherche au Fonds National Suisse de la recherche Scientifique.

— (1985). *Comptages et écriture d'égalités lacunaires.* Rapport de recherche.

DANCING, T. (1974). *Le nombre, language de la science.* París, Albert Blanchard.

DOISE, W.; MUGNY, G.; PERRET-CLERMONT, A. N. (1975). Social interaction and the development of cognitive operations, *European Journal of Social Psychology,* 5, 367-383.

FORMAN, A.; CAZDEN, B. (1984). Perspectivas vygotskianas en la educación: el valor cognitivo de la interacción entre iguales. *Infancia y Aprendizaje*, 27-28, 139-157.

FREUDENTHAL, H. (1971). «Notation mathématique». En *Enciclopaldia Universalis,* vol. II, 908-914, París.

GÓMEZ-GRANELL, C. (1985). La representación gráfica de la multiplicación aritmética: una experiencia de aprendizaje. *Infancia y Aprendizaje,* 31-32, 229-249.

— (1988). Representación y simbolización en el marco de problemas multiplicativos. Tesis doctoral no publicada.

IFRAH, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres.* París, ed. Seghers.

INHELDER, G.; SINCLAIR, H.; BOVET, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance,* París, P.U.F., Trad. Cast. de L. Echevarría: *Aprendizaje y estructuras del conocimiento.* Madrid, Morata, 1975.

LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Tesis de la Universidad. Grenoble.

MATZ, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleemand and J. S. Brown, *Intelligent tutoring systems,* p. 25-50. Nueva York, Academic Press.

RESNICK, L.; CAUXINILLE-MARMECHE ; MATHIEI, J. (1987). Understanding algebra. En A. Sloboda Thon and Don Rogers (Eds.): *Cognitive Processes in Mathematics,* Oxford Science Publications.

RIVIERE, A.(1984c). Acción e interacción en el origen del símbolo. En J. Palacios, A. Marchesi y M. Carretero. Eds. *Psicología Evolutiva, Desarrollo Cognitivo y social del niño,* (pp. 145-179). Madrid, Alianza Editorial.

SASTRE, G. y MORENO, M. (1976-77). Représentation graphique de la quantité. *Bulletin de Psychologie,* XXX, 327,3-9. 346-355.

SCHUBAUER-LEONI, M. L. y PERRET CLERMONT, A. N. (1980). Interactions sociales et representations symboliques dans le cadre de problèmes addifits. Recherches en Didactique des Mathématiques. I. (3), 297-350.

SELLARES, R. y BASSEDAS, M. (1983). La construcción de sistemas de numeración en la historia y en los niños. En M. Moreno y Equipo IMIPAE, *La pedagogía operatoria,* (p. 87-104). Barcelona, Laia.

SINCLAIR, H. (1982). Les procedés d'apprentissage de l'enfant face aux systèmes représentatifs. *Actes de les primeres jornades sobre noves perspectives sobre la representació escrita en el nen.* ICE, IME, Barcelona, 171-182.

SINCLAIR, H.; SINCLAIR, A. (1986). Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In H. Hiebert, *Conceptual and Procedural Knowledge,* Londres, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

SLEEMAN, D. (1984). An attempt to understand student's understanding of basic algebra. *Cognitive Science.* 8, 387-412.

THOM, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. En R. Jaolin (ed.) *Pourquoi la mathématique?* (p. 39-56). Traducción castellana en Piaget, J.; Choquet, G. M. et al, Madrid, Alianza Editorial, 1978.

VANLEHN, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. En H. P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking.* Nueva York, Academic Press.

VYGOTSKI, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona, Crítica.

WALKERDINE, V. (1982). From context to text: a psychosemiotic approach to abstract thought. En M. Beveridge (ed.), *Children thinking through language.* Londres, Edward Arnold.

La adquisición del lenguaje matemático: Un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *C. Gómez-Granell.* CL&E, 1989, 3-4, pp. 5-15.

Resumen

El pensamiento y el lenguaje matemático se caracterizan por su autonomía con respecto a lo real. Frente a la ambigüedad propia de los lenguajes naturales, la potencia generalizadora y el rigor del lenguaje formal proviene de la exclusión del contenido metafórico.

No obstante, tan importante como dominar el significado formal de las expresiones matemáticas es reconocer su significado referencial. Sin embargo, para la mayoría de los alumnos los simbolismos matemáticos se reducen a una mera sintaxis desprovista de cualquier significado referencial.

El objetivo de este artículo es mostrar que el contenido referencial juega un papel esencial en la construcción de los simbolismos matemáticos. Estos tienen su origen en la experiencia social y la comunicación, y van transformando su significación a través de un proceso que se desarrolla en estrecha vinculación con sus referentes conceptuales y situacionales y que se apoya en la utilización, junto a los símbolos propiamente matemáticos, de códigos no formales, como el dibujo, los esquemas o el lenguaje natural.

Datos sobre el autor:

Carmen Gómez Granell es la directora del Instituto Municipal de Investigación Aplicada a la Educación de Barcelona. Es especialista en psicología evolutiva, habiendo centrado su trabajo en el estudio de la adquisición y aprendizaje de los procesos matemáticos.

Dirección:

I.M.I.P.A.E. Fuenflorida s/n. 08008 Barcelona.