La enseñanza de contenidos específicos en matemáticas

Geoffrey Howson y Brian Wilson

¿Matemáticas para todos o matemáticas de élite? ¿Lenguaje matemático o matemática aplicada? En la base de las últimas reformas educativas de todo el mundo no dejan de estar presentes dilemas, reales unas veces, ficticios otras, que tienen mucho que ver con los supuestos políticos —ideológicos— que sustenten los diseñadores de esa reforma respecto al papel de la educación y a los que no se sustrae la enseñanza de las matemáticas...

Cualquier seminario internacional de finales de los años 50 o principios de los 60 casi con toda certeza habría considerado la deseada innovación de cursos en términos de cambio de contenidos: Euclides *à bas:* fuera de los triángulos, conjuntos, correspondencias, funciones, álgebra lineal y estructura algebraica para todos...

Por eso, tal vez sea de la mayor importancia que en la reunión de Kuwait poco o nada se propusiera en la línea de nuevos contenidos matemáticos (aunque hubo un deseo por ver ciertos contenidos, en particular probabilidad y estadística, impartidos en todos los países). Es más, el sentimiento común era que ciertos contenidos actuales debían sacrificarse en un esfuerzo por elevar el nivel general de comprensión por parte de los alumnos y por alimentar el crecimiento de otros tipos de conocimiento distintos de los asociados con el aprendizaje memorístico.

Así pues, los cambios en los cursos se dieron más en forma de posibles reestructuraciones para reflejar una mejor definición de objetivos y patrones de aprendizaje de los alumnos antes que en la introducción de contenidos nuevos.

Tales reestructuraciones, sin embargo, no serían aceptadas con rapidez. Es más, al parecer se requeriría mucho trabajo de explotación antes de efectuarse recomendaciones a gran escala. Es interesante señalar experimentos como el de Brasil, donde se espera que el profesor dedique el 60% del tiempo de clase a cubrir contenidos estipulados por la autoridad central y el 40% a actividades que seleccione de un creciente menú *à la carte.* (Puede que se desprecie la separación de estas dos vías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aunque tal vez la analogía de una receta de cocina en la que ambos componentes se mezclan gradualmente sirva de ayuda.)

Comunicación, Lenguaje y Educación, 1991, *11-12,* 121-137

Volviendo al problema complejo de la diferenciación, se diría que el diseño de cursos diferenciados se ha visto dominado por unas matemáticas según el «contenido», basadas en un modelo lineal que ve a las matemáticas «de alto nivel» para la Universidad a un extremo del espectro, y a las matemáticas utilitarias «de bajo nivel» para la generalidad en el otro. Así, muchos países han formado su curso de matemáticas para todos tomando el curso tradicional «de alto nivel», ofreciéndolo a niños de capacidades media y baja de forma diluida. Este tratamiento se desechó por parte del comité Cockcroft en Inglaterra (Comité de Investigación, 1982), pero podría argumentarse que su tratamiento «de abajo arriba» acepta esencialmente el mismo modelo lineal. En su caso, el punto de partida es el «nivel bajo», sobre el que se irían añadiendo temas con la intención de que los más aventajados alcanzaran las matemáticas «de alto nivel»; es decir, los distintos cursos son «concéntricos» respecto al contenido.

No es obvio que este modelo lineal sea el más apropiado de «matemáticas para todos». Sin embargo, es de creer que en muchos países seguirá siendo el modelo dominante de los años 90.

Es más, tal vez fuera el arraigo que este modelo tiene en la mente de los educadores de matemáticas lo que llevara a la ausencia de énfasis sobre contenidos en Kuwait. Porque el contenido de la matemática escolar a niveles «alto» y «bajo» parece tan firmemente establecido (sujeto a discusiones fronterizas sobre, por ejemplo, la geometría) que actualmente se tiende a dirigir la atención a asuntos de programación no relativos al contenido. Sin embargo, los extraordinarios desarrollos en la aplicación de las matemáticas que ha traído la revolución del ordenador bien puede ofrecer una fuente rica de experimentos y desarrollos con contenidos nuevos en un nuevo modelo. El dominio del modelo «lineal» tradicional de matemática escolar debería ser cuestionado y merecerían explorarse otros caminos.

Sin embargo, algunos temas aún requerirían una atención considerable y deberíamos darles un breve repaso.

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

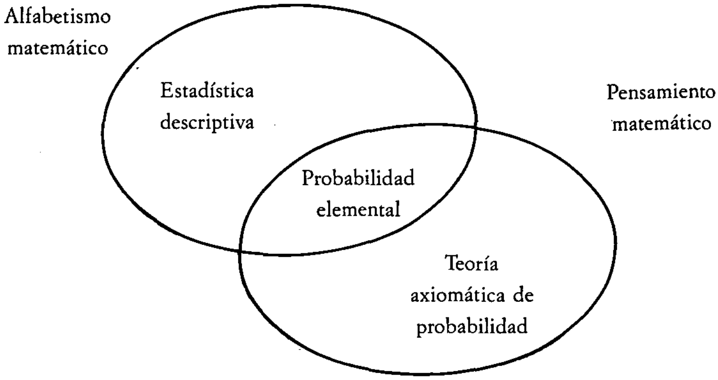
Aunque siempre se tiende a asociar probabilidad y estadística al tratar sobre cursos, sus exigencias de un espacio en los cursos escolares son diferentes, así como los problemas de su enseñanza.

En primer lugar, sin embargo, debe insistirse que la exigencia de la inclusión de ambas en los cursos escolares es muy fuerte. Como hemos señalado antes, el conocimiento de las dos es esencial hoy en día para el público en general. Como han demostrado las investigaciones de Fischbein y otros, el sentido innato de probabilidad es generalmente demasiado ingenuo y se llega pronto a una mala apreciación cuantitativa. Dicho sentido necesita desarrollarse y fortalecese a través de la educación matemática. El caso de la estadística se abordó en otro capítulo.

Fujita (1985) ha argumentado que el propósito de la educación matemática es cultivar la «inteligencia matemática» a través de una combinación de «alfabetismo matemático» y de «capacidad de pensamiento matemático». Considera la segunda capacidad menos accesible que la primera y, como tal, más apropiada, al menos en sus formas más complejas, para aquellos que van a especializarse en matemáticas: Incluye capacidades tales como deducción, prueba, abstracción. Por otra parte, la meta del «alfabetismo matemático» debería buscarse para todos. Se obtiene entonces en forma de diagrama la Figura 1.

Dentro de este modelo primitivo (sobresimplificado a propósito y que, a nuestro juicio, presupone una dicotomía entre metas para todos y metas para algunos), vemos que la «estadística descriptiva» y la «probabilidad elemental» ocupan posiciones diferentes. La primera cae claramente en el dominio del «alfabetismo matemático».

FIGURA 1



En el nivel escolar es una introducción elemental al análisis y presentación de datos, algo que se vuelve cada vez más importante en un mundo donde la cantidad de datos que se almacenan, disponen y presentan se incrementa con rapidez. Como tal, proporciona un vehículo excelente para crear lazos con otras asignaturas, tales como geografía, y para la práctica de habilidades gráficas y aritméticas (incluyendo las adquiridas a través del uso de la calculadora). Aunque es algo que, por supuesto, no puede realizarse sin «pensamiento», ni siquiera tiene un lugar secundario en los programas como agente cultivador de pensamiento matemático, y muchos argumentarían que, excepto para una pequeña minoría de alumnos, es inadecuado a nivel escolar seguir con la estadística más allá de esta primera fase descriptiva. (Algunos alumnos avanzados pueden requerir ciertas técnicas estadísticas a modo de herramientas, pero no es fácil hallar una justificación para ello dentro de la clase de matemáticas en la escuela.)

Por otra parte, una vez que se ha progresado más allá de simplemente observar y registrar resultados de lanzamientos de dados y monedas, giros de ruletas, generaciones de hechos aleatorios con un PC o cualquier otro aparato que se emplee, la probabilidad aparece unida inextricablemente a esquemas de pensamiento matemático. Por supuesto que éstos pueden darse a muchos niveles y a través de una variedad de ejemplos distintos. En general, sin embargo, se diría que la enseñanza de la probabilidad ofrece muchas más oportunidades que la estadística para el cultivo del pensamiento matemático en el nivel escolar.

GEOMETRIA

No existe dentro del programa escolar un área matemática en particular que preocupe tanto a los matemáticos como la geometría, cuya enseñanza ha sufrido una transformación total en los últimos treinta años, aproximadamente. Tal preocupación halla eco en muchos educadores de matemáticas (ver, por ejemplo, el ICMI de Bélgica, 1982) y un número considerable, aunque en declive, de profesores (pues muchos profesores de hoy no tienen un pasado «euclidiano» que recordar).

Ya hemos atraído la atención sobre que un tratamiento formal de la geometría ha desaparecido de muchos sistemas escolares. En otros, los tratamientos formales permanecen, pero pocos, si no ninguno, dan indicios de tener más éxito —ya sean en llegar mejor a los alumnos, motivarlos o prepararlos mejor para tareas matemáticas futuras— que el Euclides al que han sustituido.

Lo que ha ocurrido en las últimas tres décadas es que, libres de las cadenas tradicionales, profesores y educadores han desarrollado una rica variedad de ilustraciones y ejemplos geométricos que pueden llevar a los alumnos a una comprensión excelente del espacio y de las figuras geométricas elementales (ver, por ejemplo, las obras publicadas de IOWO en Holanda y el proyecto matemático escolar en Inglaterra). Es más, la introducción de LOGO y otros tipos de software en las clases ha creado nuevas posibilidades para la experimentación de los alumnos, particularmente en geometría. Tal vez las oportunidades informáticas más atrevidas para la transformación de la enseñanza de la geometría en los 90 vengan de la mano de programas de diseño por ordenador que, por el momento, han tenido impacto en los colegios.

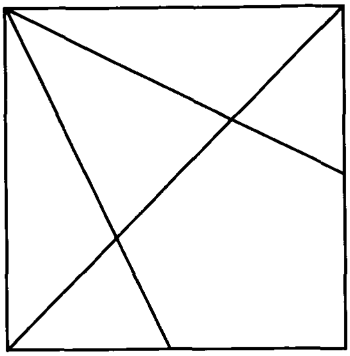
El resultado de este trabajo de desarrollo es que los aspectos espaciales del alfabetismo matemático (volviendo así al modelo de Fujita) están bien provistos en los cursos escolares. Sin embargo, el problema de crear la transición desde las actividades diseñadas para lograr «sentir» el espacio, que pueden verse desde un punto de vista filosófico como parte de la Física antes que de la matemática, al «pensamiento geométrico» en el sentido tradicional no se ha resuelto con éxito. Para la mayor parte de alumnos, esta transición puede no ser posible, y podría decirse que en un contexto educativo amplio el problema generado no es grande. Como resultado de cambios recientes en los cursos, los «pocos», los alumnos con talento para las matemáticas, tienen a su disposición herramientas algebraicas poderosas, coordenadas y vectores que pueden aplicar a problemas geométricos. Ellos podrían, entonces, tratar tales problemas en modo distinto a los escolares de antaño —los métodos pueden ser menos elegantes y permitir menos espacio para el pensamiento creativo y penetrante, pero ofrecen un tratamiento más sistemático.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente pregunta (a la cual nos referimos posteriormente en otros aspectos):

> Se dibujan dos líneas desde un vértice de un cuadrado a los puntos medios de los dos lados no adyacentes. Dividen la diagonal en tres segmentos (ver Figura 2).

Comentaremos brevemente el propósito de tales preguntas en otro capítulo. Aquí démonos cuenta únicamente de que, mientras el alumno de los 50 sólo disponía de medios geométricos de acometer el problema, el alumno de hoy tendría capacidad de aplicar métodos algebraicos para hallar la solución de (a). La solución derivada de la aplicación de un procedimiento mecánico puede ser menos satisfactoria estéticamente que el geométrico, pero ¿puede haber otras objeciones a los métodos algebraicos aparte de las estéticas? Los argumentos contra el uso de métodos algebraicos para la solución de problemas geométricos tienen una larga historia: Simson en el siglo XVIII, se nos dice, consideraba tales mé-

FIGURA 2



(a) ¿Son iguales esos tres segmentos?

(b) Sugiere varios modos en que el problema se pueda generalizar.

(c) ¿Puede generalizarse tu respuesta (a)?

(d) ¿Puede utilizarse el argumento que has utilizado en (a) en casos más generales?

(e) ¿Si tu respuesta a (d) es no, ¿puedes hallar una respuesta que se pueda generalizar?

todos como poco más que una «triquiñuela mecánica», en la cual el alumno procedía «sin ideas de ninguna clase» a fin de «obtener un resultado sin sentido y sin ser consciente de ningún proceso de razonamiento». Se utilizaron objeciones similares por parte de los defensores de la geometría euclidiana al principio del siglo XIX, por ejemplo, Ohm en Alemania y Whewell en Inglaterra. Se ha repetido recientemente en Thom (1973), el cual señaló que el álgebra es rica en «sintaxis» pero débil en «significado», mientras que en geometría es a la inversa.

Esta diferencia entre los dos temas influye grandemente en los exámenes y en las actitudes de alumnos y profesores. La sintaxis es fácil de examinar y aprender, pero la geometría pura es débil en sintaxis, con el resultado de que las preguntas relativas a ella en los exámenes tienden a dividirse entre las casi exclusivamente memorísticas y las que se encuentran a un nivel cognitivo mucho más alto. El resultado es que, allá donde domina la sombra de los exámenes, alumnos y profesores tenderán, si se les da la oportunidad, a ignorar la geometría y concentrarse en el álgebra, que es «más provechosa».

Resumiendo, se diría que los autores de los cursos escolares de los años 90 se enfrentarán a tres posibilidades:

Posibilidad 1. Se abandona la idea de que la geometría debe/puede tratarse en la escuela como un *sistema* de conocimiento (organizado deductivamente o no) donde los conceptos y los hechos deben saberse simplemente porque forman parte del sistema. En vez de eso, la geometría y el espacio se ven como fuentes excelentes de temas para iniciar actividades de muchas clases en una variedad de niveles. Los aspectos «utilitarios» de la enseñanza de la geometría se alcanzarán a través de la provisión de métodos algebraicos.

Consecuencias: 1) Se romperá una larga tradición y se perderá una parte de la matemática escolar que ha cultivado un cierto tipo de creatividad y pensamiento imaginativo a través de la solución de corolarios geométricos.

2) Como tal creatividad y tal pensamiento imaginativo son para muy pocos, la mayoría de los alumnos experimentarán un mayor éxito si se conjugan mejor nuestros objetivos con sus capacidades.

3) La enseñanza a nivel escolar de lo que es la «prueba» se verá severamente restringida (esto podría significar un replanteamiento de los cursos en el nivel universitario *no* basta con quejas de que «los alumnos vienen a nosotros sin comprender la naturaleza de la prueba»).

Posibilidad 2. Se intenta aún impartir un curso escolar de geometría axiomático o pseudoaxiomático, ya se base en Euclides «modificado» (por ejemplo, Pogorelov o SMSG) o, por ejemplo, geometría transformacional.

Consecuencias: 1) Sólo unos pocos serían capaces de satisfacer las demandas intelectuales de tales cursos y serán menos aún los que aprecien la importancia del «juego» al que están jugando.
2) Esos pocos se verán recompensados al introducirse en aspectos del pensamiento matemático que no se pueden expresar a nivel escolar (o puede que a ningún otro) a través de otra área de contenidos.

Posibilidad 3. Presentar, a algunos alumnos al menos, «islas» de geometría, es decir, sistemas deductivos «puntuales» dentro del curso general. (Así, por ejemplo, puede haber unidades sobre las propiedades angulares del círculo y sobre geometría proyectiva elemental.)
Consecuencias: 1) Se pretende conservar algo del viejo espíritu de la geometría escolar, utilizar el repertorio maravilloso de ejemplos y ejercicios amasados a lo largo de los años e introducir la percepción de la prueba y las cadenas deductivas.
2) El joven matemático con capacidad seguirá encontrando los retos y recompensas tradicionales.
3) Es posible que los profesores ignoren la enseñanza de tales «islas», ya que pueden no parecer cruciales para el curso, y porque casi con certeza causarán problemas a los alumnos a causa de los nuevos modos de pensamiento que se les exige.

APLICACIONES

En años recientes se ha hablado mucho de «aplicaciones», de crear una enseñanza matemática «relevante» y de enseñar «modelos matemáticos». De hecho, en otro capítulo ya hemos tratado el lugar que debería reservarse a las aplicaciones en el curso. Sin embargo, hay pocas novedades en este deseo de enseñar matemáticas con el propósito de ser aplicadas: el primer libro que se publicó en inglés, el *Camino hacia el Conocimiento (Pathway to Knowledge*, 1551), hacía hincapié en su título completo de que se pretendía mostrar el modo en que los principios geométricos deberían «más adecuadamente ser puestos en práctica». Hace 70 años Carson (1913, p. 35) escribió:

> «Entre los muchos cambios de la educación matemática durante los últimos 20 años... un elemento, al menos, aparece constante: un deseo de relacionar la materia con la realidad, de exhibirla como un cuerpo vivo de pensamiento que puede influenciar e influye la vida humana en multitud de puntos.»

De hecho, históricamente, la enseñanza de las matemáticas casi siempre ha tenido un fuerte componente vocacional: fue sólo con su institucionalización dentro de las escuelas y universidades cuando los lazos con la realidad se empezaron a descuidar o distorsionar. Las razones para ello son complejas, aunque aún son muy importantes.

Hace más de 150 años la naturaleza «práctica» de la enseñanza de álgebra era despreciada por De Morgan:

> «"Una persona tiene dos caballos y una silla que vale 50 libras: si se coloca la silla a lomos del primer caballo, su valor será el doble del segundo, pero si se coloca a lomos del segundo, hará de su valor el triple del primero: ¿Cual es el valor de cada caballo?".
>
> »Si el propósito de esto fuera progresar en la teoría... pero en cuanto a que sean cuestiones prácticas sólo hay que decir... que la gente dispone de mejor modo de determinar el valor de sus caballos.»

Este viejo ejemplo ilustra bien un problema de enseñanza de aplicaciones y de utilizar ejemplos «de la vida real» que aún están por resolver. La «aplicación» dentro de la educación de las matemáticas tiene casi tantas interpretaciones como el «conocimiento» tiene niveles. Las «aplicaciones» pueden servir a una variedad de propósitos y al planear un curso para los años 90 es esencial distinguirlos.

Como observaba De Morgan, el problema dado no es de índole práctica, aunque podría tener considerable valor pedagógico. El alumno debe traducir un problema en palabras a símbolos y luego proceder al acto matemático de plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales. Esta es una operación no trivial y valiosa de aprender y practicar. ¿Es posible asegurar que todas las situaciones que presentamos a los alumnos son *realmente* prácticas y deberíamos intentar que lo fueran? Es de señalar, por ejemplo, que hay mucho en la matemática «lúdica» basado en situaciones que apenas pueden ser descritas como «de la vida real». El problema de transportar un lobo, una cabra y una lechuga a través del río, por muchos siglos que tenga, con seguridad nunca ha sido «práctico». La clave está en la actitud del alumno y en la *aceptación* de la tarea de resolver el problema (ver, por ejemplo, Christiansen y Walther (1986) para un tratamiento de la tarea y la actividad en la educación matemática). Los ejemplos caprichosos y artificiales no son necesariamente malos, con la condición de que no digamos que son «realistas». El arte de aprender a aplicar las matemáticas puede cultivarse sobre otros ejemplos aparte de los «de la vida real».

Otro tipo de ejemplo tradicional estaba tal vez demasiado enraizado en la «realidad». Es el ejemplo estrictamente vocacional, como el mantenimiento elemental de libros, o Bolsa y acciones, o en algunos casos asociados a las matemáticas de una industria local en particular. Como veremos más abajo, tales ejemplos elevan preguntas sobre «la realidad según quién», y en un mundo de demanda profesional en rápido cambio prepara a menudo a los alumnos a satisfacer las demandas de una época pasada. El lugar de tales ejercicios en los cursos de los años 90 debe cuestionarse seriamente. Sin embargo, seguirá habiendo una necesidad de «aplicaciones» que satisfagan una necesidad específica de la sociedad, por ejemplo, impuestos, compra a plazos y otro tipo de préstamos, y (desde el programa de sexto grado para los Estados árabes del Golfo) la distribución del dinero heredado de acuerdo con la ley islámica.

Incluso cuando se excluyen ejemplos del tipo que hemos descrito, las aplicaciones aún pueden tomar una variedad de formas. «¿Dónde debería colocarse el portero para estrechar el ángulo de tiro de su oponente?» «¿A qué distancia desde donde se marca un ensayo debe retrasar la pelota el lanzador para maximizar el ángulo opuesto a los postes desde su posición de tiro?» Tales preguntas son herramientas útiles del repertorio del profesor. Relacionan las matemáticas con situacines reales y pueden tener interés y atractivo para ciertos alumnos; la geometría se vuelve menos académica. Sin embargo, no utilizamos las matemáticas para resolver un problema. Ningún portero o lanzador calcula nunca dónde debería colocarse o disparar de esta manera. Tales ejemplos facilitan *lazos* con el mundo, y en un sentido legitiman el estudio de las matemáticas, pero no es probable que motiven al alumno a estudiar matemáticas. La importancia de la asignatura no reside en tales «aplicaciones».

Más importante aún, el «lazo» puede no ser siempre con la «realidad» del alumno (el cual puede no saber nada de rubgy y sus reglas). Como Carson *(op. cit.)* escribió: «La esencia de la realidad se encuentra en preceptos y conceptos reconocibles y es, por lo tanto, una función del individuo y la época; lo que es real para mí no es necesariamente real para otro, y mucho de lo que era real para mí en la infancia ya no lo es. Es el profesor el de debe determinar las realidades de sus alumnos... También debe encontrar necesario ampliar sus esferas de realidad, pero debe evitar la confusión entre un nombre y una cosa... (es decir, entre darles a conocer nombres nuevos y ayudarles de hecho a adquirir conceptos nuevos).»

El ensayo de Carson sobre «lo útil y lo real» es aún provechoso de estudiar, pues muestra claramente la complejidad y la naturaleza perenne del desafío de la incorporación de «aplicaciones» dentro del curso.

Los ejemplos dados hasta ahora en esta sección son del uso de la «realidad» al servicio de la enseñanza de las matemáticas. Un tipo completamente distinto de elemento aparece cuando se utilizan las matemáticas al servicio de la realidad, es decir, cuando usamos las matemáticas para *resolver* problemas, no que la realidad los suministre. Un ejemplo interesante del uso de las matemáticas para describir, comprender y ayudar así a resolver un problema social muy familiar para unos alumnos lo da Grugnetti (1989), que considera la transmisión hereditaria de dos de las enfermedades más graves que afectan a los sordos. Este ejemplo, por supuesto, difiere de los ofrecidos previamente no sólo por su importancia social, sino también en que no está unido a la comprensión o la práctica de una única técnica matemática: abarca muchos aspectos del conocimiento existente en los alumnos y ofrece motivación para extenderlo en direcciones que serán inmediatamente aplicables.

Una vez más se trata de un trabajo llevado a cabo en una larga tradición educativa: «Actividad con propósito en una situación social» fue la descripción de W.H. Kilpatrick en 1918. El uso de proyectos (Dewey, Kilpatrick) «centros de interés» (Decroly) o el «método de complejos» (URRS post revolucionaria) para motivar el estudio es viejo. Ha habido muchos ejemplos recientes (ver, por ejemplo, la obra de Mellin-Olsen y otros descritas en Howson y Mellin-Olsen (1986). Es más, las líneas maestras establecidas hace más de 50 años para tal trabajo siguen teniendo valor al contemplar el diseño de proyectos interdisciplinares de los años 90.

— ¿Es el material lo bastante cercano al alumno para ser real para tal alumno?

— ¿Da oportunidades la unidad de acometer problemas, propósitos e intereses en el nivel mental presente del alumno?

— ¿Estimula la unidad muchas clases de actividades, creativas, intelectuales y sociales, satisfaciendo diferencias individuales y la integración de actividades diversas?

— ¿Ofrece la unidad la posibilidad de subir peldaños desde el nivel presente a individuos y grupos?

— ¿Estimula la unidad un deseo por parte del individuo para proceder por su propia iniciativa y tomar responsabilidad en ampliar sus intereses y comprensión?

— ¿Ayuda la unidad a satisfacer las demandas de la sociedad y a clarificar conceptos sociales?

— ¿Lleva la unidad a costumbres deseables de tipo intelectual, social y moral tales como perseverancia, cooperatividad, amplitud de miras, buen juicio, autodirección e iniciativa?

(Ver Connell, 1980, p. 286, para detalles sobre las fuentes.)

Como hemos señalado en capítulos anteriores, existe un deseo creciente por ver introducido en la escuela el trabajo en proyectos interdisciplinares con base social. Es importante que al defender tal trabajo examinemos bien los intentos previos de introducirlo y tratar de entender por qué tales esfuerzos probaron tener corta vida excepto dentro de unas pocas instituciones individuales. Este tipo de trabajo no es fácil de introducir en la escuela: exige el apoyo de todos los profesores y una disposición a reajustar metas; no puede llevarse a cabo fácilmente dentro de un sistema gobernado rígidamente por exámenes establecidos sobre líneas disciplinares estrictas.

En tales proyectos, los alumnos ven que las matemáticas pueden aplicarse a problemas genuinos «de la vida real», y se espera posteriormente que adquieran motivación para estudiar la asignatura. Las oportunidades de crear «modelos matemáticos» surgirán con naturalidad. Sin embargo, debemos distinguir bien entre dedicarse a una actividad y estudiarla. M. Jourdain, para su gran deleite y sorpresa, descubrió que había aprendido a improvisar prosa sin haberlo estudiado. De modo similar se pueden seguir con éxito cursos de mecánica newtoniana —como muchos estudiantes— permaneciendo totalmente ignorantes de la actividad del modelo matemático al que uno se dedica. El aprendizaje real *de* un modelo matemático implica moverse a un nivel diferente, puesto que será necesario considerar muchos modelos y abstraer principios y procedimientos incluidos en ellos. (Tal vez el modelo de Fujita tenga valor aquí. Pues es parte del alfabetismo matemático saber sobre algunas aplicaciones típicas de las matemáticas; es parte del pensamiento de «matemática aplicada» desarrollar aptitudes modelísticas.) No siempre se pone de manifiesto qué se pretende exactamente cuando se clama por «modelos matemáticos» en la escuela.

¿Qué nivel de exigencia cognitiva estamos creando? ¿Cuál es exactamente la relación entre «comprender» y «conocer» las matemáticas y tener la confianza necesaria para aplicarla? ¿Cómo se ayuda/prepara a los profesores para que se conviertan en profesores de modelos? Queda aún por hacer mucho trabajo de desarrollo. (Es más, ¿qué debe inferirse de la preparación de un curso modelístico en términos probabilistas, es decir, concediendo cierto «peso» a la introducción efectiva de un nuevo tema o tratamiento y asignar cierta probabilidad subjetiva a la innovación que lleve a las aulas de forma aprovechable?)

Un gran desafío para los años 90 no es ofrecer simplemente ejemplos de aplicaciones que puedan estudiarse con utilidad en la escuela, sino investigar más profundamente propósito y justificación pedagógicas de los varios tipos de aplicaciones y considerar por qué a pesar de muchas décadas de esfuerzos se ha logrado tan poca cosa dentro de los sistemas educativos en general (ver, por ejemplo, Burkhard (1983)).

Enseñar a los estudiantes a aplicar sus matemáticas debe ser, por lo tanto, una meta principal en la década de los 90. Existen tres posibilidades (que no se excluyen una a otra) que exigen consideración.

Posibilidad 1: Las matemáticas se aplican dentro de las clases de matemáticas.
Consecuencias: 1) La motivación es inmediata.
2) En muchos casos surgirán problemas porque se requerirá conocimiento extramatemático si se quiere dar sentido a los contextos.
Posibilidad 2: Las matemáticas se aplican en clases de otras materias.
Consecuencias: 1) Se puede enlazar la enseñanza de las matemáticas con la de Física, Biología, Geografía...
2) Aparecen problemas de coordinación y de combinar las necesidades de otras asignaturas con la preparación y madurez matemática de los alumnos.
Posibilidad 3: Las matemáticas se aplican en proyectos interdisciplinares.
Consecuencias: 1) Se consigue una meta educativa largo tiempo vigente.
2) Los problemas surgen a causa del trabajo cooperativo requerido y choca con esquemas tradicionales de organización académica.

Pero, ¿es una meta en sí misma aprender a aplicar las matemáticas?

Algunos pensarían que no. Las matemáticas juegan ahora un papel importante dentro de la sociedad: ¿Cuántos alumnos *se dan cuenta* de esto? ¿Procede entonces ayudar a los alumnos a apreciar los usos de las matemáticas?

La educación de las matemáticas se ha concentrado tradicionalmente en la adquisición de aptitudes y técnicas (productos) por parte del alumno. Ahora, como hemos visto, se hace mayor hincapié sobre los procesos. Sin embargo, la meta predominante sigue siendo hacer que el alumno se dedique a varios tipos de actividad matemática. ¿Procede entonces que exista algún tipo de «apreciación de las matemáticas»? El objetivo de los matemáticos debe ser, con toda objetividad, no sólo animar a la participación en actividades matemáticas, sino también en hacer que el público —y futuros creadores de políticas— se dé cuenta del papel vital de las matemáticas en la vida de la nación.

Un trabajo así no encajará dentro de esquemas normales de enseñanza ni será examinable con facilidad. Sin embargo, sí que parece ser digno de un serio trabajo exploratorio de desarrollo en los próximos años.

CALCULADORAS

Tal vez la mayor preocupación relacionada con el contenido del curso escolar de matemáticas en los años 90 es la medida en que se verá/debería verse afectado por la nueva tecnología y, en particular, por la calculadora electrónica de mano y el ordenador personal. Hoy en día es práctica corriente considerar juntos estos dos objetos. Sin embargo, se diría que es más ventajoso en nuestro contexto considerarlos por separado. Para países más pobres puede ser una posibilidad contar con una cantidad razonable de calculadoras, es decir, a una escala que permita su uso individual por parte del alumno, mientras que no es probable que puedan disponer con facilidad de un PC aunque continúe la caída de los precios. Digamos que sucede que el ordenador abre nuevas vistas de un modo que las calculadoras no, puesto que tiene el potencial, a través de, por ejemplo, el proceso de la información, de afectar materialmente a nuestros conceptos sobre las matemáticas y cómo se aplican.

La rápida explosión tecnológica ha tenido muchas consecuencias para los educadores de matemáticas. Algunas de ellas han sido expuestas previamente. Fijémonos ahora en primer lugar en que sólo recientemente se ha organizado un debate abierto en el ICMI 3 (Karlsruhe, 1976) sobre el efecto de la calculadora en la educación de las matemáticas. Como resultado de la enormemente creciente disponibilidad de la calculadora se dirigió hacia ella una atención considerable a finales de los años 70. Sin embargo, la atención se vino pronto a concentrar en el uso de PC's. Considerando la extensión mucho mayor de posibilidades que ofrece el PC y el hecho de que la investigación y desarrollo experimentales están con frecuencia en manos de relativamente pocos individuos que trabajan independientemente, este cambio de énfasis es comprensible, aunque de algún modo es de lamentar. Ciertamente, la potencialidad de la calculadora para ayudar a los niños a encontrarse con la aritmética no se ha explotado en profundidad; lo mismo ocurre con su uso para la enseñanza de ideas y conceptos matemáticos más sofisticados.

No hay duda de que las calculadoras son ahora las herramientas naturales con las que llevar a cabo operaciones aritméticas. Por esa razón, aprender a usar la calculadora —y utilizarla con juicio— debe formar parte del aprendizaje de la aritmética. Cualquier intento de prohibir su uso sería estúpido y sólo produciría alumnos alienados de la matemática escolar. Necesitamos construir actitudes positivas sobre el cálculo, y la calculadora puede ayudar a ello. Las calculadoras permiten a muchos niños utilizar la aritmética en situaciones reales incluyendo otras asignaturas escolares, pues facilitan el trabajo inmediato con números grandes y pequeños. El acceso a una calculadora permite a los niños generar patrones numéricos, explorar las propiedades de los números y elaborar y probar hipótesis, mientras que su uso hace que la atención de los niños se dirija al orden de las operaciones. Ayudan en la adquisición de las aptitudes importantes de estimación y aproximación. Sin embargo, sigue sin haber consenso en cuándo exactamente debería introducirse la calculadora y cómo pueden explotarse mejor sus capacidades en las matemáticas de primera enseñanza.

Los resultados disponibles de tales investigaciones se diría que están a favor de una introducción temprana y no apoyan la teoría de que el uso de la calculadora pueda causar que el cerebro del alumno se oxide. Ver, por ejemplo, Hembree y Dessart (1986), que es una síntesis del estudio de unos 80 casos en los que, excepto una anomalía en cuarto grado, los alumnos de todos los cursos se benefician en cuanto a logros y actitudes del uso de la calculadora en la instrucción matemática.

Es, sin embargo, en los primeros niveles de escolarización donde se intenta sentar las bases del entendimiento aritmético, que sigue habiendo alguna controversia y duda acerca del uso de la calculadora. Se necesita con urgencia más trabajo de investigación y desarrollo sobre este punto.

Hacia cursos superiores la pregunta no es tanto «¿cómo puede ayudar la calculadora?», sino «¿cuánto tiempo puede dedicarse a explorar en las muchas posibilidades que abre su uso?».

La enseñanza de la estadística ha cambiado completamente por nuestra capacidad de manejar tan rápidamente datos numéricos (y por tener programas incorporados para, por ejemplo, calcular desviaciones típicas).

Progresiones geométricas, exponenciales, series infinitas, factoriales (y con ellos combinaciones y probabilidad) pueden ya estudiarse con más dedicación.

La iteración se ha convertido en una operación numérica directa, por ejemplo, estudiar el límite cuando n de x_n cuando

$$x_n + 1 = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

o resolver ecuaciones por el método de Newton-Raphson.

Un tema omitido durante muchas décadas en los programas escolares porque pocos podían manejar la artimética necesaria, las fracciones irracionales, ahora reafirma su inclusión. Los niños de hoy en día encontrarán los números decimales tales como 1,047619 más familiares que fracciones como 22/21. Para ir de la segunda al primero sólo hay que apretar unos botones. Pero, ¿cómo llevar a cabo la operación inversa? Un trabajo así puede llevar a los alumnos a pensar en las fracciones no como simples resultados de una división, sino como números especiales e interesantes que a veces dan aproximaciones sorprendentemente fáciles y buenas a números reales y racionales (2, 3...).

Los procesos para la obtención de resultados ofrecen nuevas materias de investigación. Esto puede hacerse a dos niveles. Uno es cómo el operador puede aprovechar al máximo la calculadora, por ejemplo comparando distintas sucesiones de teclas que pueden usarse para generar los valores de una función en particular, como x $x^2 + 3x + 4$. El otro es estudiar el modo en que opera la calculadora:

¿Hasta qué punto es precisa?

¿Cómo tabula las funciones?

No todos los estudiantes serán capaces de acometer estas últimas preguntas, pero su estudio dará muchas recompensas matemáticas.

Las calculadoras tienen entonces un papel esencial que jugar en los cursos de matemáticas de los años 90. Es esencial poner mayor énfasis en el estudio del mejor modo en que pueden usarse para permitir mejor a los niños ganar comprensión aritmética.

ORDENADORES

Nunca en la historia de la educación de las matemáticas un desarrollo ha abierto una escala tan amplia de posibilidades y retos nuevos para el educador como el ordenador personal.

Ha sido así de tres formas:

(1) Las mismas matemáticas y el modo en que trabajan los matemáticos han quedado afectados.
(2) Como resultado de (1) y de la disponibilidad de software para llevar a cabo una amplia variedad de tareas matemáticas, ahora deben reconsiderarse cursos enteros.
(3) Se abren nuevas oportunidades para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través del uso del ordenador como ayuda.

El primer estudio ICMI (ICMI, 1986a) se dedicó al tema de «El impacto de los ordenadores y la informática en las matemáticas y su enseñanza». Ese estudio se dirigiría particularmente a los niveles de Universidad y últimos cursos de segunda enseñanza, aunque gran parte de la información sirve a otras partes de los sistemas escolares.

Tal vez los cambios reales en la propia matemática sean menos preceptibles a nivel escolar, pero incluso en él nos damos cuenta de que los nuevos métodos disponibles por los que un alumno puede llegar a los conceptos de, por ejemplo, «función» y «variable» harán casi con toda certeza que su significado evolucione gradualmente. (Nos damos cuenta, por ejemplo, de que la noción de «función» ha cambiado gradualmente a lo largo de cuatro siglos. Que deba continuar evolucionando como resultado de nuevos usos y aplicaciones no debería sorprendernos.)

El hecho de que los matemáticos profesionales de ahora utilicen ampliamente los ordenadores puede, por supuesto, avanzarse como argumento para asegurar que los alumnos tengan más acceso a ellos particularmente desde que ese acceso tiene muy buen uso a nivel escolar.

Sin embargo, aun en el caso de que los alumnos no vieran un ordenador hasta abandonar la escuela, seguiría siendo necesario replantearse los cursos a causa de los cambios de énfasis que han traído los ordenadores. Aquí sólo mencionamos tres:

(a) Algoritmos

Los procesos algorítmicos se sitúan en el corazón de las matemáticas y siempre ha sido así. Sin embargo, ahora se pone nuevo énfasis en los métodos algorítmicos y en comparar la eficacia de diferentes algoritmos para resolver el mismo problema, por ejemplo, ordenar nombres alfabéticamente o invertir una matriz.

(b) Matemáticas Discretas

Los ordenadores son esencialmente máquinas discretas, y la matemática que se necesita para describir sus funciones y desarrollar el software necesario para usarlas es también discreta. Como resultado, el interés en matemática discreta —álgebra de Boole, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos...— se ha incrementado enormemente en años recientes, hasta el punto de que el énfasis tradicional dado al cálculo tanto en la escuela como en la Universidad se ha puesto en tela de juicio.

(c) Manipulación Simbólica

La posibilidad de usar el ordenador para manipular símbolos en vez de números se previó ya con las primeras computadoras. Sin embargo, ahora hay software disponible para PC que lleva a cabo efectivamente todas las técnicas de cálculo que se enseñan en la escuela —diferenciación, integración por partes y por sustitución, expansión en series de potencias— y para tratar con la mayor parte del álgebra polinómica que también se enseña. ¿Sigue siendo necesario enseñar a los alumnos a hacer lo que puede hacerse con el ordenador?

Finalmente, indicamos algunos de los modos varios en que el ordenador puede usarse como ayuda para la enseñanza y el aprendizaje:

1. Como pizarra electrónica o ayuda en la enseñanza para el profesor.
2. Como ayuda en clases particulares del alumno, facilitando el aprendizaje de nuevos temas ayudado y asistido por el software del ordenador.
3. Para la instrucción individual de los alumnos (incluyendo «ejercicios y prácticas» y autoexamen).
4. Como herramienta que ejecute cálculos, dé valores de funciones, dibuje funciones...
5. Como agente de experimentación y exploración, incluyendo, por ejemplo, aprender más sobre el comportamiento de objetos matemáticos haciendo que el ordenador simule esos objetos.

Dado que no es más que una selección de las posibilidades y los retos abiertos por el PC, no es sorprendente que al mirar hacia los años 90 sigamos teniendo dudas sobre el punto hasta que el ordenador influirá/debería influir en el curso escolar.

Una cuestión básica que aún no puede responderse es el punto hasta el que deberíamos esperar que los propios alumnos desarrollaran aptitudes de programación. Se diría que la disponibilidad cada vez mayor de software elimina la necesidad de adquisición de aptitudes sofisticadas —al menos en la clase de matemáticas—. Por otra parte, la mayor disponibilidad de PC's en casa y la experiencia que los alumnos han ganado con ellos ha hecho que la gente se pregunte con qué otros tipos de aprendizaje podemos comparar más provechosamente el de aprender a usar el ordenador. ¿Es comparable a aprender a usar un teléfono, a conducir un coche, la lengua nativa, una lengua extranjera?

Ciertamente, nuestro trato tradicional a los últimos cuatro tipos de aprendizaje tiene muchas formas. Sin embargo, se diría que cada una comparte ciertas similitudes con aprender a usar el ordenador. Según avancemos por los años 90, puede que tales problemas se resuelvan. Mientras tanto, deberán modificarse constantemente los tratamientos a la luz de la experiencia cambiante en ordenadores que los alumnos ganen fuera de la clase de matemáticas.

Más claro queda que no es probable que cambien las metas últimas de la matemática escolar por la presencia del ordenador en la clase y que el manejo de ordenadores no reemplazará a las matemáticas. Sin embargo, es probable que en el nivel secundario se den cambios de énfasis dentro de los cursos.

Ya hemos llamado la atención hacia la necesidad de más énfasis en los algoritmos (ver, por ejemplo, Engel, 1977). Aunque no se espera ver que la teoría de los complejos entre las escuelas, se diría apropiado que en los últimos cursos se llamara la atención sobre la eficiencia de los algoritmos y a distinguir entre, por ejemplo, complejos polinómicos y no polinómicos.

Es probable que haya presión para que se incluya más matemática discreta en la escuela, aunque es improbable que esto lleve al abandono de la enseñanza del cálculo. Sin embargo, a aquellos que al dejar la escuela deseen estudiar ciencias sociales o biología, por ejemplo, antes que matemáticas, física o ingeniería, se les puede permitir optar por módulos de matemática discreta por delante de los de cálculo (ver, por ejemplo, ICMI (1986a) para argumentos más detallados).

Sin embargo, con seguridad la enseñanza de cálculo debe cambiar. Ya existe software (ver, por ejemplo, Tall y West en ICMI (1986a)) que cualquier profesor de cálculo puede emplear con provecho. La posibilidad de crear grafos en el PC y de magnificar secciones hasta que el grafo parezca lineal, o ver alternativamente que, por mucho que se magnifique, el grafo nunca aparece recto, revoluciona la enseñanza de la diferenciación. No podemos permitirnos descuidar una ayuda tan poderosa para la enseñanza. Es más, no escasean los ejemplos de cómo se ha mostrado, ya que el PC ayuda a la enseñanza de cálculo tradicional.

Hasta qué punto el cálculo tradicional sigue siendo apropiado es una pregunta mucho más difícil de responder. Vemos primero que, aunque el cálculo retenga su lugar en los cursos, aún será necesario, a causa de los cambios que ha traído el ordenador, dar énfasis adicional a sus aspectos numéricos, por ejemplo, integración numérica. Es más, bien puede ocurrir que la matemática discreta no encuentre acomodo dentro del curso general como entidad distinta, separada del módulo de calculo, sino que se revise y amplíe el curso de cálculo para incluir contenido discreto. Un ejemplo de curso planeado sobre estas líneas lo describen Seidman y Rice en ICMI (1986a). Pero si todos los integrales definidos pueden evaluarse numéricamente y hay software disponible para todas las técnicas de integración que se enseñan en la escuela, ¿qué deberíamos enseñar ahora sobre integración?

Esta pregunta no se responde con facilidad. Bien puede ser que, por ejemplo, futuros ingenieros encuentren que cierta noción vaga de la integración como una antidiferenciación, cierto tipo de suma y/o área bajo una curva sea suficiente. ¡Aunque esto se parece poco a una base firme para un futuro matemático! Si la calculadora elimina la necesidad de adquisición y perfeccionamiento de aptitudes aritméticas y el PC elimina las asociadas con álgebra polinómica y cálculo elemental, ¿dónde —y cuándo— adquirirán los matemáticos profesionales las aptitudes que aún les serán necesarias?

Se describe un intento de atajar este problema por parte de Lane, Ollengren y Stoutemyer en ICMI (1986a). El alumno aprende a trazar el grafo de una función racional usando el PC para hallar los ceros de polinomios y diferenciar. Por supuesto, habría sido más fácil dejar simplemente que el PC trazara el grafo sin recurrir para nada al cálculo. Sin embargo, vemos aquí un intento deliberado de apartar objetivos pedagógicos generales de las operaciones que pueden llevarse a cabo en el PC. Podemos no estar de acuerdo con la solución con que experimentan estos autores, pero su trabajo es un indicativo del tipo de decisiones que los educadores tendrán que tomar en los próximos años.

Habrá muchas presiones para recortar contenido del curso tradicional en la próxima década. Será necesario que al hacerlo prestemos gran atención a las consecuencias posibles de nuestros actos. Ciertamente, no hay duda de que el uso del ordenador puede mejorar el entendimiento que tengan los alumnos del cálculo y de otras partes de la matemática (por ejemplo, estadísticas y probabilidad, donde se gana enormemente al poder crearse simulaciones, o el estudio de transformaciones geométricas). Aún no está claro, sin embargo, que esto lleve a un ahorro apreciable del tiempo utilizado para enseñar temas —es más, hay fuertes indicios de que en general no se ahorrará tiempo, sólo existirá la promesa de una mejor comprensión.

El uso del ordenador como un medio de enseñanza —es decir, para los propósitos de instrucción individualizada— se tratará en el próximo capítulo. Más inmediatamente relevante al contenido de los cursos es el uso del PC para animar a la experimentación y a la investigación.

Como se señala en el ICMI (1986a, pp. 22-23) la exploración y el descubrimiento son componentes importantes del proceso educativo de las matemáticas y se facilita grandemente su progresión a través del uso de la tecnología del ordenador. Objetos de dos, tres, hasta de cuatro dimensiones pueden investigarse con la ayuda de gráficos de ordenador, así como geometrías tan interesantes como las de tipo «flatland» o de tortuga. Pueden diseñarse y ejecutarse diferentes algoritmos para tareas similares o relacionadas. El paradigma inductivo —computar, conjeturar, probar— puede emplearse en muchas situaciones diferentes. Por supuesto que la lista podría hacerse más larga.

Además, mucho trabajo al que ya nos hemos referido, por ejemplo, el uso de hojas de sábana y paquetes CAD (diseño asistido por ordenador), aún debe ser desarrollado y puesto a prueba, aunque se diría que poseen un potencial tremendo para influir en la enseñanza de las matemáticas según avancen los años 90.

Los autores del informe ICMI (1986a) aluden a tres problemas clave asociados con este tipo de trabajo. Uno, la preparación de profesores para trabajar de esta nueva forma es un problema perenne que afecta a cualquier innovación importante en procedimientos de enseñanza. Las otras dos están relacionadas con la selección de tareas o situaciones adecuadas que explorar por parte de los alumnos y la dificultad no sólo en examinar, sino también en reconocer, reforzar y consolidar lo que los alumnos han aprendido. Ciertamente, no siempre es fácil hallar tareas adecuadas para los alumnos. Hacer simplemente que se sienten delante del PC no es suficiente. Hallar el mayor número perfecto posible con la ayuda del PC *no* es una tarea matemática seria. Programar el ordenador para detectar un número perfecto, sí, pero sentarse mientras el PC va goteando, no. Por lo mismo, no es probable que sea de mucho valor «investigar» para diferentes valores de x_1 el comportamiento de la secuencia definida por $x_n + 1 = x_n/2$ si x_n es par, $x_n + 1 = 3x_n + 1$ si x_n es impar. Sin embargo, hemos visto que se han sugerido ambas tareas. Tal vez el objetivo primero de las investigaciones sea adiestrar a los alumnos a hacer preguntas serias. En el pimer caso se les presenta una pregunta matemática débil como modelo, es decir, «¿cuál es el mayor número perfecto que puedes hallar?». En el segundo, por seria que sea la pregunta que formulen, será poco probable que sus intentos de responderla tengan éxito.

Por lo mismo, hay un riesgo de que el ordenador se utilice como una apisonadora que, al producir resultados tan desprisa y de modo tan simple, haga más difícil apreciar la naturaleza auténtica del problema. Por ejemplo, una investigación interesante para niños no basada en el ordenador es determinar los totales que no puedan darse usando, por ejemplo, sólo sellos de 5 y 7 peniques (ver, por ejemplo, Ahmed en Damerow *et al.*, 1986). Un PC puede, por ejemplo, ofrecer una impresión de números obtenibles en segundos. Como escribe Atiyhah en ICMI (1986a) sobre un tipo similar de situación a un nivel educativo mayor: «¿Va a ser éste el camino del futuro? ¿Se resolverán cada vez más problemas por la fuerza bruta? Es más, si es esto lo que nos espera, ¿debería preocuparnos el declive de la actividad intelectual humana que esto representa, o es simplemente un punto de vista arcaico que debe ceder ante las fuerzas del "progreso"?» (p. 48).

Todos los ejemplos hacen que surja la pregunta clave: «¿qué ocurre cuando la máquina se desconecta?», (ver Mason, 1985). Dada una lista de, por ejemplo, los primeros cuatro números perfectos, ¿se buscan esquemas posibles e incluso tal vez conjeturar cómo sería un quinto número? ¿Se intenta examinar los resultados con sellos de 5 y 7 peniques y formular una hipótesis sobre, por ejemplo, sellos de 7 y 9 peniques? ¿O aparecen los resultados en la pantalla, se graban y se cierra el caso?

Si la respuesta a la última pregunta es «sí», ¿qué se ha aprendido entonces? Pero puede ocurrir con mucha frecuencia, por ejemplo, en un experimento con el LOGO, que se haya aprendido mucho: por ejemplo, el niño puede haber desarrollado una estrategia particular para hacer algo y que el aprendizaje real —la creación de hipótesis, ajuste, replanteamiento del trabajo— no se ponga de manifiesto inmediatamente en el resultado final. ¿Cómo puede ayudar el profesor a fijar y reforzar lo que se ha aprendido? Aunque no sea en absoluto una pregunta fácil de responder, si no intentamos acometerla, la mayoría de lo que han sembrado las investigaciones basadas en ordenadores no llegarán a germinar.

El uso de ordenadores para trabajos experimentales y de exploración probablemente será difícil, y dificultará la relación normal profesor-alumno. Sin embargo, las recompensas potenciales son muy grandes y se necesita más trabajo de desarrollo, *así como la evaluación y valoración detalladas del trabajo ya existente.* Buen software sí que existe. En algunos países, sin embargo, es difícil de obtener, ya que la producción comercial de software destinada a la escuela no es particularmente rentable, y así, la distribución de información y software tiende a ser anárquica.

El área problemática entera de cómo los ordenadores pueden y deben influir en las matemáticas de la escuela está, por lo tanto, muy abierta. Debemos intentar guiar un curso entre usar simplemente el ordenador para ayudarnos a lograr metas tradicionales y, en la otra dirección, abandonar antiguas prácticas valiosas en busca de metas nuevas, tal vez ilusorias. Se requerirá una mezcla de atrevimiento y comedimiento. Es esencial entonces que en los próximos años haya una extensa cooperación internacional, así como intercambio de ideas e información en este campo en particular.

Referencias

BURKHARDT, H. (1983). *Aplications in School Mathematics-the elusive El Dorado.* REIC, Ohio State University. Carson, G. St. L., 1913, *Essays on Mathematics Education,* Ginn.

CONNELL, W. F. (1980). *A History of Education in the twentieth Century,* Curriculum Development Centre, Canberra.

CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A.G., y OTTE, M. (Eds.) (1986). *Perspectives on Mathematics Education,* Reidel.

ENGEL, A. (1977). *Elementarmathematik voni algorithmischen Standpunkt,* Klett (trs. 1984, *Elementary Mathematics from an Algorithmic Standpoint,* Keele Mathematical Education Publications, England).

FUJITA, H. (1985). «The Present State and Proposed Reform or Mathematical Education at Senior Secondary Level in Japan», *J. Sci. Educ.* Japan, 9 (2), 39-52.

GRUGNETTI, L. (1979). «School mathematics makes Sardinians healthier», *Maths in School,* 8 (5), 22-23.

HEMBREE, R. y DESSART, D. J. (1986). «Effects of and-held Calculators in Pre-college Mathematics Education: a meta-analysis», *J. Res. Math. Ed.,* 17, 83-99.

HOWSON, A. G., y MELLIN-OLSEN, S. (1986). «Social Norms and External Evaluation» in Christiansen et al., (1986), 1-48.

ICMI (1978). *Change in Mathematics Education since the late 1950's: Ideas and Realisation, Reidel.*

ICMI (1986a). *The Impact of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching* (Ed. R.R. Churchhouse et al.), Cambridge. University Press. 1986b. «Mathematics as a Service Subject» (A. G. HOWSON, et al.), *L'Enseignement Mathématique.*

THOM, R. (1973). «Modern mathematics: does it exist? In Howson, A. G. (ed.), *Developments in Mathematics Education,* Cambridge University Press.

La enseñanza de contenidos específicos en matemáticas. *Geoffrey Howson y Brian Wilson.* *CL&E,* 1991, 11-12, pp. 121-137

Datos sobre los autores: *Los autores trabajan en el Centre for Mathematics Education, The University. Southampton S09 5NH Inglaterra.*

Dirección: Centre dor Mathematics Education, The University. Southampton S09 5NH Inglaterra.

Artículo original: On Particular Content Issues. En School Mathematics in the 1990's. Cambridge University Press, 1986. Reproducido con autorización. Traducción de Eduardo Braun.

Agradecimientos: Este artículo es un capítulo del libro «School Mathematics in the 1990's», elaborado por los autores sobre las discusiones mantenidas en el seminario internacional con el mismo nombre que se celebró en Kuwait en febrero de 1986.