Juan Carlos Del Pin

<u>EL CUBO DESDE LA GEOMETRÍA</u>:

- *Geometría:* (griego; geo: tierra; metria: medición) Parte de la matemática que trata de las propiedades y medida de la extensión.

Cuando nos referimos a un objeto, en varias oportunidades lo hacemos desde los términos de magnitud y dirección. Porque la forma de un elemento geométrico queda definida cuando conocemos su magnitud en varias direcciones.

A través de las expresiones matemáticas correspondiente al área y al volumen hemos aprendido que dependen del cuadrado y del cubo de las dimensiones lineales, respectivamente. Si tomamos ***L*** para designar toda dimensión lineal, podemos escribir las ecuaciones generales en la forma[1]:

$$S \propto L^2, \qquad V \propto L^3$$

Un cuerpo geométrico (sólido) es un espacio limitado, caracterizado por la segunda de las expresiones anteriores, es decir, sus dimensiones son tres: longitud, alto y ancho.

La geometría nos permite clasificar a los sólidos en:

a) Los que tienen una o varias caras con superficies curvas: ***"cuerpos redondos" o "de revolución"***
b) Los que tienen todas sus caras planas: ***"poliedros"***

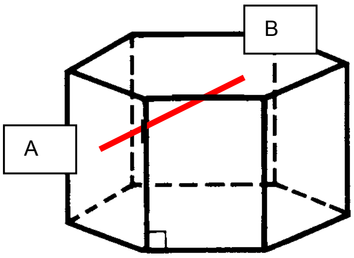
- *Poliedro:* (griego; poli: muchos; hedra: cara) Sólido limitado por polígonos llamados caras. Las rectas en que se cortan las caras se llaman *<u>aristas</u>* y los puntos donde concurren varias caras se llaman *<u>vértices</u>*.

Los poliedros pueden ser ***convexos*** o ***cóncavos***[2].

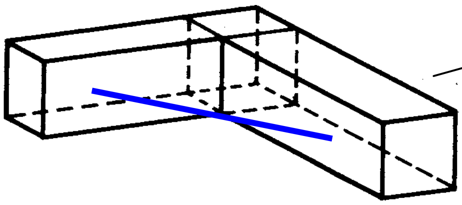
➔ *<u>Definición</u>*:

Un sólido ***convexo*** es un conjunto de puntos ***S***, no todos coplanares, tales que para dos puntos cualesquiera ***A*** y ***B*** en ***S***, todos los puntos entre ***A*** y ***B*** también están en ***S***.

Un sólido ***cóncavo*** es un conjunto de puntos ***S***, no todos coplanares, tales que para dos puntos cualesquiera ***A*** y ***B*** en ***S***, no todos los puntos entre ***A*** y ***B*** están en ***S***.



CONVEXO:
En el sólido de la izquierda, los puntos A y B pertenecen al mismo, entonces todos los puntos del segmento AB también pertenecen



CÓNCAVO:
En este sólido los puntos extremos del segmento pertenecen a él, pero los demás puntos del segmento no cumplen con esta condición, pues quedan fuera del objeto.

---

(1) El mundo de las matemáticas; James R. Newman; Ed. Sigma
(2) Geometría; P. Geltner; Ed. I.T.P.

Los poliedros se clasifican a su vez en regulares e irregulares:

$$\text{Poliedros}\begin{cases}\text{Regulares}\begin{cases}\text{Tetaedro}\\ \text{Hexaedro (cubo)}\\ \text{Octaedro}\\ \text{Dodecaedro}\\ \text{Icosaedro}\end{cases}\\ \text{Irregulares}\begin{cases}\text{Prisma irregular}\\ \text{Pirámide}\end{cases}\end{cases}$$

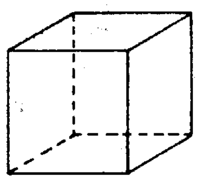
Dentro de las infinitas formas poliédricas que existen hay unas que, por sus simetrías, han ejercido siempre atracción sobre los hombres. Se trata de los poliedros regulares, cuyas caras son polígonos regulares iguales en cuyos vértices concurren el mismo número de caras.

Todos ellos verifican la fórmula de Euler, que establece la igualdad:

(3) $\boxed{\text{Vértices + caras = aristas + 2}}$

El poliedro que nos interesa estudiar es el ***hexaedro o cubo*** , que presenta las siguientes características:

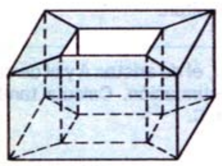
Número de caras	6
Número de aristas	12
Número de vértices	8
Caras en un vértice	3
Aristas por cara	4
Ángulo diedro	90°



Al cubo se lo estudia en algunos textos como ***paralelepípedo rectangular*** o ***prisma***, porque cumple con las condiciones definidas para ellos(4).

---

(3) Esta expresión vale para todos los poliedros convexos y aun para los no convexos, siempre y cuando no tengan agujeros que vayan de un lado a otro, como la siguiente figura.



Iniciación a la creatividad; L. Santaló ; Ed. Kapelusz

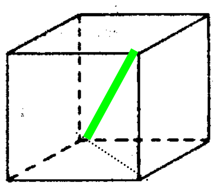
(4) **Prisma**: es un poliedro con dos caras paralelas congruentes y tantos paralelogramos como lados tienen estas.
Paralelepípedo rectangular: es un prisma con seis caras que son paralelogramos distribuidos a 90° entre si.
Geometría; P. Geltner; Ed. I.T.P.

Características observables del cubo:

- ✓ Todas las líneas que determinan las superficies del cubo son segmentos de rectas.
- ✓ Todas las superficies de sus caras son planas (para probarlo basta apoyarlo sobre una mesa).
- ✓ Las aristas, los ángulos y las superficies son isométricas (congruentes).
- ✓ Es suficiente conocer una arista del cubo para poder construir un único cubo.

De las cuatro características anteriores, la última es la mas difícil de ver directamente: **“Es suficiente conocer una arista del cubo para poder construir un único cubo”**
Ahora veamos algunas expresiones matemáticas que nos permitirán comprobar lo anterior.

Diagonales de un cubo(5):
Son segmentos de recta cuyos puntos extremos son vértices que no están en la misma cara del cubo.



El cubo presenta cuatro diagonales iguales, cuya longitud depende del valor de la arista; si a la arista la llamamos ***a*,** tendremos:

$$d_1^{\,2} = a^2 + a^2 \qquad (\textit{por teorema de Pitágoras})$$
$$d_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2.a^2}$$
$$d_1 = a.\sqrt{2} \qquad (\textit{corresponde a la diagonal de la base})$$
$$d^2 = d_1^{\,2} + a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3.a^2}$$
$$d = a.\sqrt{3}$$

es decir que la expresión obtenida para la longitud de la diagonal nos quedó en función de la arista ***a***.

Área superficial(6):
Es la suma de las áreas de las caras del poliedro.
Continuamos asignando a la arista la letra ***a***

$$S = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 \qquad (\textit{porque sus seis caras son cuadrados})$$
$$S = 6.a^2$$

la expresión también nos quedó en función de ***a.***

Volumen(7):
Es igual al área de la base multiplicada por la distancia a su base paralela.

$$\textit{El área de la base es}: S = a^2; \qquad \textit{la distancia a su base paralela es}: a$$
$$V = a^2.a = a^3$$

(5),(6),(7) Geometría; P. Geltner; Ed. I.T.P

Radio de la esfera circunscripta[8]:

Corresponde a la mitad de la diagonal del cubo.

$$si \quad d = a.\sqrt{3}$$

$$entonces:$$

$$r = \frac{d}{2} = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Radio de la esfera inscripta[9]:

Corresponde a la mitad de la arista.

$$r = \frac{1}{2}.a$$

Ahora observando todas las expresiones obtenidas podemos afirmar la característica mencionada en la página anterior: **“Es suficiente conocer una arista del cubo para poder construir un único cubo”**

(8), (9) pagina web de la ACADEMIA DE CIENCIAS LOVENTICUS

EL CUBO DESDE LA HISTORIA:

Euclides en el libro XI (geometría de sólidos y método de exhauscion**)** inicia el tratamiento de los volúmenes o sólidos.

Hay también definiciones para planos paralelos, sólidos semejantes, ángulo sólido, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, cubo, octaedro, icosaedro, dodecaedro(10)

La primera escuela ateniense, llamada la de los sofistas, incluía eruditos maestros en gramática, retórica, dialéctica, elocuencia, moral y geometría , astronomía, y filosofía. Uno de los objetivos principales era el de usar la matemática para entender el funcionamiento del universo.

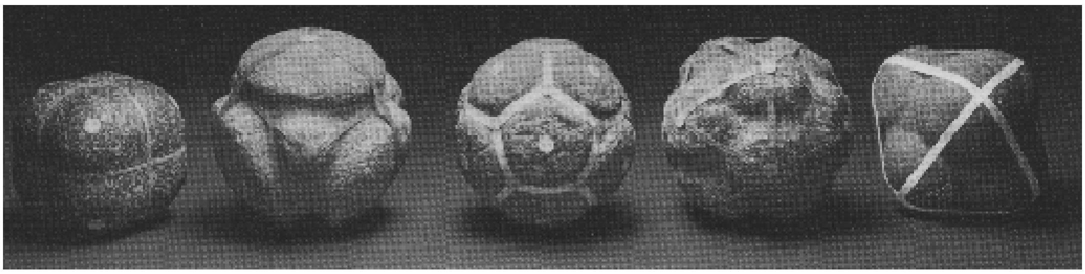
Muchos de los resultados matemáticos obtenidos, fueron subproductos de los intentos de resolver los tres famosos problemas de construcciones: construir un cuadrado de área igual a un circulo dado; construir la arista de un cubo de volumen doble de otro de arista dada; y trisecar un ángulo cualquiera: todo ello debía ser realizado con regla y compás únicamente.

Se han dado diversas explicaciones sobre el origen de estos famosos problemas de construcciones. Por ejemplo, una versión del origen del problema de la duplicación del cubo, encontrada en una obra de Erastótenes (c.284-192 a.C.), nos muestra que "*los habitantes de Delos, bajo el azote de una peste, consultaron al oráculo sobre la manera de librarse de ella, a lo que el oráculo respondió que debían construir un altar de tamaño doble del que ya existía, de forma cúbica.*

Los habitantes de Delos comprobaron que duplicando la arista no se duplicaba el volumen, y se dirigieron a Platón, quien les dijo que el dios del oráculo no había contestado así porque quisiera o necesitara un altar doble, sino para censurar a los griegos por su indiferencia con respecto a la matemática y su falta de respeto por la geometría". Plutarco cuenta la misma historia.(11)

Del ***Papiro de rhind*** se obtuvo información de las reglas empleadas por los egipcios para el cálculo de volúmenes del cubo, paralelípedo, cilindro y figuras sencillas. En algunos casos estos métodos conducen a aproximaciones, pero en otros los cálculos son correctos.(12)

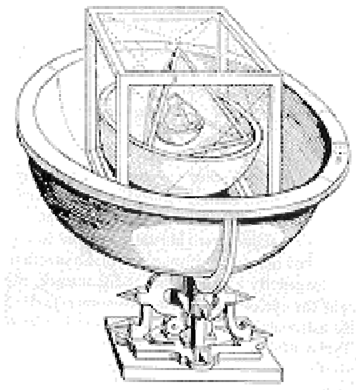
Los pitagórico, "*quienes veían en los resultados matemáticos algo parecido a una verdad religiosa*", pensaban que era muy importante la observación de que había sólo cinco poliedros regulares posibles. Muchos creen que fueron ellos quienes la hicieron por primera vez y por eso llaman "sólidos pitagóricos" a los poliedros regulares. Sin embargo, los arqueólogos han hallado imágenes en piedra de los poliedros regulares considerablemente más antiguas.(13)



(14)

(10), (11), (12) www.matemáticas.uclm.es
(13), (14) Página web de la Academia de Ciencias Luventicus

Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro "elementos" de los griegos antiguos. Luego "*Platon asoció el dodecaedro con el Universo pensando que, dado que era tan distinto de los restantes debía ser la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas. (Por entonces se creía que los cuerpos celestes debían estar hechos de un elemento distinto del que estaban hechas las cosas que rodean al hombre en la Tierra.)*" De ahí que a los poliedros regulares se los conozca también como *sólidos platónicos*.(15)



En el siglo XVI, los poliedros regulares inspiraron al Kepler una teoría sobre el movimiento de los planetas. Él creía que los radios de las órbitas (circulares) de los planetas estaban en proporción con los radios de las esferas inscriptas en sólidos platónicos dispuestos uno dentro de otro. El grabado de la derecha ha sido tomado de su tratado *Mysterium Cosmographicum* (*"El Misterio del Cosmos"*). (Kepler concluyó que ese modelo era erróneo y que los planetas se movían describiendo trayectorias elípticas recién cuando conoció los resultados de las observaciones de Tycho Brahe.) (16)

(15), (16) Página web de la Academia de Ciencias Luventicus

"EL VALOR DEL CUBO":

Presentación:

En el año 2003, en la E.E.M.N° 4 de Del Viso su puso en funcionamiento el Consejo Institucional de Convivencia (C.I.C.), en el cual participé durante los primeros meses de funcionamiento. En aquella oportunidad, durante una de las reuniones para la implementación del C.I.C., se decidió usar como eje transversal la ***convivencia.***

La convivencia, y los valores que ella tiene relacionados, fue el tema elegido para aplicar sobre el cubo.

Desarrollo de la idea:

El cubo siempre fue utilizado como sustento geométrico para construir sobre él un dado. Los dados legales presentan un valor fijo en cada una de sus caras, entre 1 y 6.

El dado que construí presenta en cada cara un número que variará de acuerdo a la persona que lo utilice. Dicho valor se obtendrá con la expresión matemática que se encuentra impresa en cada cara.

Estas expresiones matemáticas se refieren a valores tales como **amistad**, **humildad**, **respeto**, **solidaridad**, **bien total realizado** y **cantidad de buenas acciones**.

Cada expresión esta construida con "valores" que suman, restan o dividen de acuerdo a la característica que indican (si es algo positivo, suma; si es negativo, resta o divide), y así poder encontrar la magnitud del valor correspondiente a la cara.

En algunas expresiones, introduje características humorísticas que le pertenecen a un grupo de alumnos de 1° año de la escuela.

Las expresiones matemáticas son las siguientes:

$$S = \frac{C}{8}$$

S = solidaridad
C = cantidad de buenas acciones
Nota: se divide por 8, porque generalmente se exagera con la cantidad de buenas acciones

$$C = N + T + (...) - 370$$

C = cantidad de buenas acciones
N = cantidad de veces que ayudamos a un compañero
T = cantidad de veces que le hacemos los mandados a la **"vieja"**
(...) = lugar destinado a colocar otros valores mentirosos
Nota: se resta el valor fijo 370, porque el lugar destinado a colocar valores mentirosos es muy utilizado.

$$B = \frac{C}{M}$$

B = bien total realizado
C = cantidad de buenas acciones
M = número de macanas cometidas ($M \neq 0$)
Nota: M tiene que ser distinto de cero porque "es imposible que alguien no tenga alguna macana en su haber".

$$\%H = \left(\frac{B - V_E - I}{B^* - V_E^* - I^*} \right).100$$

%H = porcentaje de humildad
B = bien total realizado
V_E = valoración de nuestro ego
I = número que depende del club que somos hinchas
Nota: B*, V_E*, I* representan los mismos elementos que los anteriores, pero valorados por nuestros padres, que son mas exagerados cuando hablan de nosotros

$$R = C^* + V_H - Y$$

R = respeto
C* = cantidad de buenas acciones realizadas con los mayores
V_H = valoración de nuestro cotidiano hablar
Y = cantidad de veces que le sacamos la lengua a nuestra hermana

$$A = Q + Z - L$$

A = amistad
Q = cantidad de años que dura la amistad
Z = cantidad de consejos pedidos al amigo
L = cantidad de veces que le miramos la novia al amigo

Como corolario de esta idea, quiero presentar una similitud con el cubo legal. Mientras que en este, la suma de los números correspondientes a dos cara paralelas nos da un valor constante, en mi cubo la suma de dos caras cualquiera siempre tiene que dar ***"un valor".***