"El fractal y los algoritmos en la naturaleza"

2do Seminario Didáctica de las Ciencias
28 de agosto 2004

Ariel Alejandro Amadio

Alumno de 3º año del Profesorado de
Matemática para el tercer ciclo EGB y el polimodal
Instituto Superior Fundación Suzuki.
Trabajo realizado bajo el programa de Becas “Padre Anibal Córdoba”
E-Mail: aru_amadio@yahoo.com.ar

El gran libro de la naturaleza
yace siempre abierto ante nuestos
ojos y en él está escrita la
verdadera filosofía...
Pero no podemos leerla a
menos que primero
aprendamos el lenguaje en
que esta escrito...Esta escrito
en lenguaje matematico
Galileo Galilei

La geometría se ha mantenido fria y seca, ante la incapacidad de describir un árbol, una nube, una costa o una montaña, debido a que las nubes no son esféricas, las montañas no son cónicas, ni la corteza suave, ni tampoco un rayo es rectilíneo. (Benoit Mandelbrot 1980).

Allá por un Alfonso[1], habíamos visto que el Vº postulado de la geometría Euclidiana había producido una serie de insastisfacciones dando el advenimiento a un conjunto de nuevas geometrías llamadas no Euclidianas, la Hiperbólica y la Elíptica, dando entre algunas de sus particularidades algunas explicaciones, a su manera, de algunos sucesos naturales...pero que sucedería si te digo que el Vº postulado no es el problema, que ni siquiera le vamos a dar una mirada a los postulados y teoremas, que el concepto de dimensión natural que tenemos no es el adecuado para acercarnos a las formas naturales...para seguir leyendo vas a tener que abrir tu mente por que como dice Michael F. Barnsley,

" La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas.
Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente
la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas,
plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas.
Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos
objetos que hasta ahora le eran familiares."

Una nueva geometría intenta mostrarnos una realidad matemática impresa en la naturaleza a través de los medios informáticos, esta geometría es llamada **Fractal** que viene del adjetivo latino *fractus* que conjugado significa fragmentado e irregular. Un fractal tiene la siguientes características :

- Un fractal tiene una estructura fina, ésto es, detalle en escalas arbitrariamente pequeñas;
- Un fractal es demasiado irregular para ser descripto con la geometría Euclidea tradicional, tanto local como globalmente.
- Con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de autosemejanza[2], quizás aproximada o estadístistica.
- En general la dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.
- En muchos casos interesantes el fractal se define en forma muy simple, por lo general recursiva.

Todos tenemos una idea intuitiva de las dimensiones, en elementos conocidos: un punto tiene dimensión cero una recta dimensión uno, un plano dimensión dos, esta situación nos da una idea de no fragmentación, de regularidad, ¿Pero qué tiene de regular la naturaleza?... “*No podemos creer*

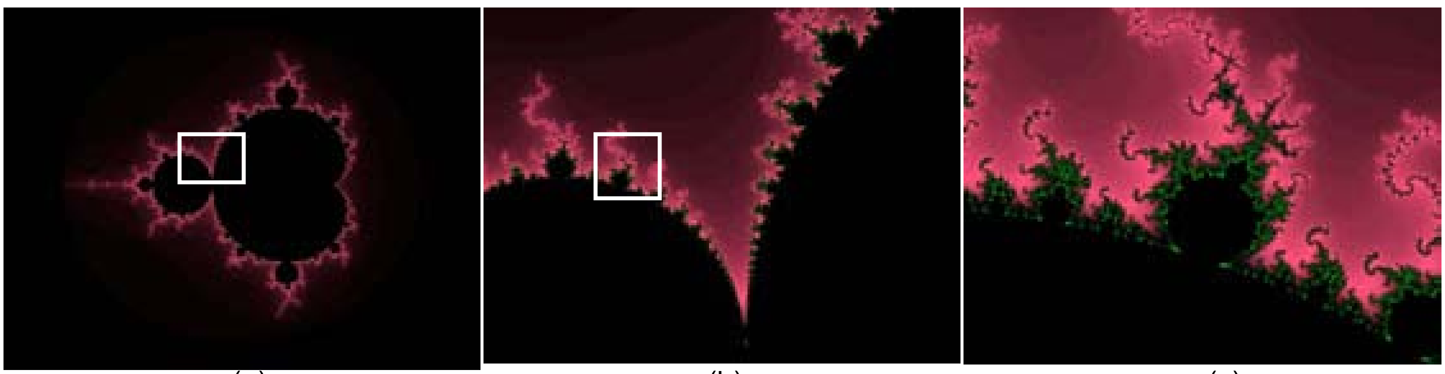
[1] La cátedra Alfonzo X ‘‘El sabio’’ es una espacio en el cual recibimos alguna conferencia sobre diversos temas, en esta ocación el profesor Javier Accinelli a cargo del espacio de Análisis Matemático I y II de la Institución, desequilibró nuestros esquemas con las geometrías no Euclideanas.

[2] Relacionando el significado de semejanza geométrica, (que tiene la misma forma pero de diferente magnitud) la autosemejanza significa a grandes rasgos obtener la misma forma aun proporcionalmente con la primera en este caso variando su escala . Este concepto se te aclarará con la (fig 1).

*que las orrillas del mar sean realmente deformes por no tener una forma regular, que las montañas hayan perdido las forma porque no son exactamente como pirámides o conos; ni que las estrellas esten desmañadadamente por no estar a una distancia uniforme...”(*Richard Bentley)

Veamos algunas diferencias entre la geometría Euclideana y la geometría Fractal, si trabajamos con figuras euclideanas, por ejemplo una circunferencia, seleccionamos un intervalo y variamos su escala de manera tal que se magnifique, observaremos una curva, si reproducimos nuevamente esta secuencia de manera que magnifiquemos ese tramo hasta el infinito, se convertirá en una recta, por el contrario si reducimos su escala hasta llegar al cero lo más cerca posible que podamos, esta se convertirá en un punto. En cualquiera de las dos situaciones mencionadas se pierde la forma original, en este caso la circunferencia, esta situación solo se da en la geometría euclideana porque dentro de la geometría Fractal, la autosemejanza es tal que el uso del lápiz y el papel se torna muy difilcultoso y la imaginación se torna insuficiente por el alto contenido de irregularidad ¿te imaginás esta función recursiva[3] compleja?

$Z_{n+1} = Z^2{}_n + c$ donde c es la constante compleja , ojo es ¡sencilla de calcular!¡ Pero no de graficar ! (fig. 1)



(a) (b) (c)

(fig.1) (a) Fractal de Mandelbrot. (b) Magnificación del la zona recuadrada en blanco de la figura (a) y (c) nueva magnificación de la zona recuadrada de la figura (b) Imágenes generadas con Francint

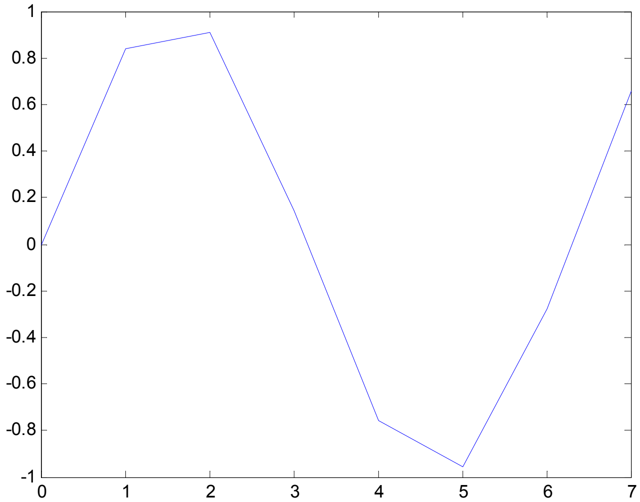
En las figuras anteriores habrás percibido a que me refería con una estructura fina en escalas arbitrariamente pequeñas.
En toda función recursiva esta implícito el algoritmo[4], situación presente de algún modo en la naturaleza de la que trataré de convencerte sin acudir a una matemática compleja.

Para los que sufrimos con Analisis Matemático I, nos hemos topado con funciones que presentan un alto grado de suavidad, aun en las que son altamente discontinuas, para que entiendas a que me refiero con suavidad tomemos la función trascendente y periódica $f_{(x)} = sen(x)$ y representésmosla,

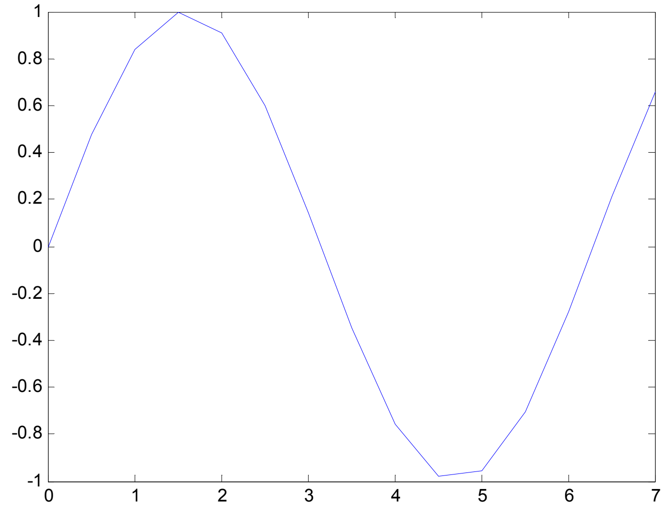
[3] Una función recursiva consiste en reutilizar el úlimo valor calculado y tiene esta forma $f_{(n+1)} = f_{(n)}$ por ejemplo la función $f_{(x)} = x+1$ si comenzamos con un número elegido por el azar o por nosotros obtendriamos lo siguiente $f_{(1)} = 1+1 = 2$ y el siguiente valor no lo ponemos nosotros o el azar, sino que tomamos el útltimo valor calculado $f_{(2)} = 2+1 = 3$ y así sucesivamente.

[4] Se denomina algoritmo a una repetición de secuancias para alcanzar un fin determinado.

primero tomando números naturales para los valores de x. (fig. 2)

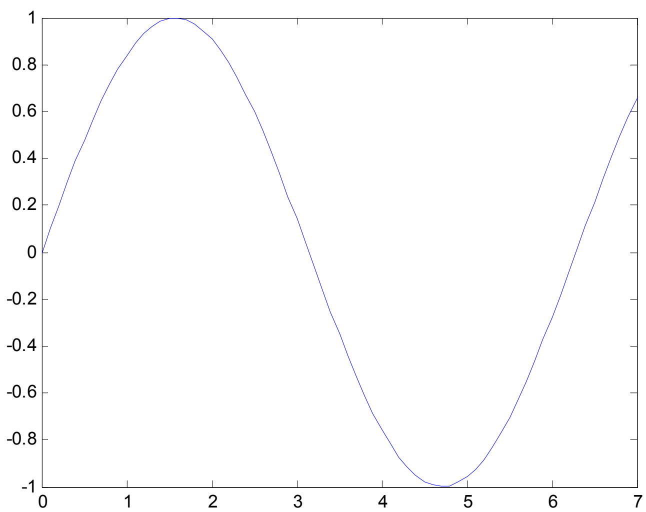


(fig. 2) $f: N \rightarrow R / f_{(x)} = sen(x)$

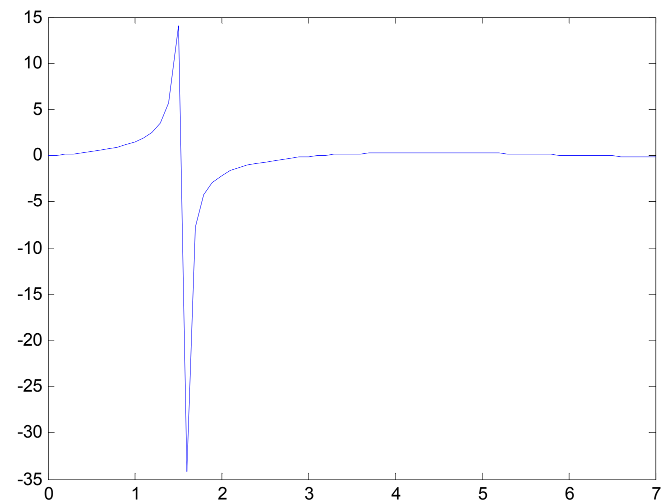


(fig.3) $f: Q \rightarrow R / f_{(x)} = sen(x)$

Luego redefinamos el dominio de manera que sean los números racionales los que intervengan e incrementemos la variable x de ½ en ½ (fig. 3), y por último, con la ayuda de un buen pistolete o un graficador como es mi caso, usemos como dominio al conjunto de los números reales (fig. 4).



(fig. 4) $f: R \rightarrow R / f_{(x)} = sen(x)$

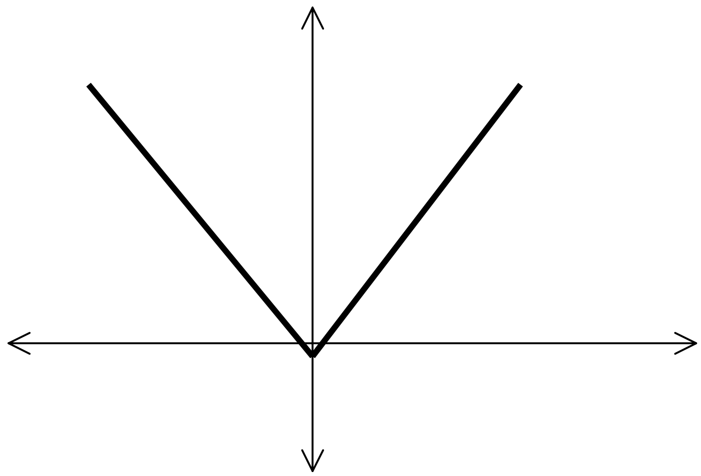


(fig 5) $f: R \rightarrow R / f_{(x)} = \dfrac{sen(x)}{\frac{\pi}{2} - x}$

A medida que fuimos cambiando de campo numérico la curva se ha suavisado, ha dejado de tener esos picos molestos que impresionan como poco estéticos, (luego te pareceserán naturales).

Si tomamos otra función como por ejemplo: $f_{(x)} = \dfrac{sen(x)}{\frac{\pi}{2} - x}$ (fig.5) la cual presenta una discontinuidad en $\frac{\pi}{2}$ y, pese a ese corte abrupto, si es acotada tanto $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ como en $\left(\frac{\pi}{2}, \infty\right)$ mantiene una

grado de suavidad.
También aprendimos el concepto de derivada y trazamos rectas tangentes a un punto en alguna función, aprendimos que si no había continuidad en un intervalo dado no podíamos trazar la recta en el punto que provocaba la discontinuidad, pero si nos topábamos con una función como esta: $f_{(x)} = |x|$ (fig. 6) no podíamos trazar ninguna recta tangente en ningún punto.

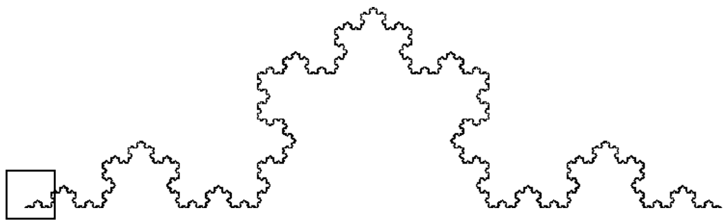


(fig. 6) $f_{(x)} = |x|$

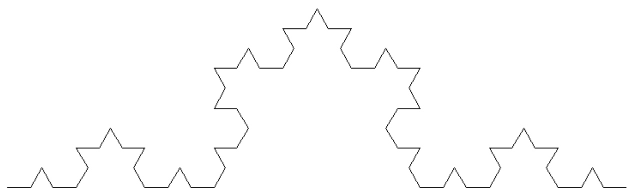
Sin darnos cuenta, las ubicamos en el conjunto de aquellas funciones que no son diferenciables en ningún punto, creyendo, ingenuidad de nuestra parte, que éstas son solo casos particulares. Reflexionemos un poco, en el mundo donde habitamos, la naturaleza nos muestra otra cosa, si intentamos trazar una tangente en algún punto de una montaña, implicaría tener que acotarla, porque de lejos y a simple vista parece estar llena de puntos cuspidales azarosos, si nos acercamos, variamos la escala, tenemos más precisión, pero...cada roca que elegimos parece contener a la montaña misma...¡gran problema!...y nuestro cálculo solo caerá dentro de la imprecisión. Si cambiamos de objeto, como por ejemplo un árbol, es tan grande la autosemejanza de éste que desisto en intentar trazar una tangente. En este punto no me queda otra que decir,que las funciones continuas y derivables son solo un mero caso particular, al revés de lo que creíamos, obviamente a esta deducción le falta el grado de rigurosidad matemática pertinente, pero no me preocupo porque el ganador del premio nobel Jean Perrinn (1913)[5] ya había afirmado esto y por halgo los grandes matemáticos, demostraron no haber ignorado esta cuestión ya que en en muchos de sus teoremas comienzan de esta manera "*Si una funcion es continua y deribable en el intervalo..".* ...Yo, por lo pronto, prefiero trazar tangentes en funciones particulares.

[5] Ganador al premio nobel por el movimiento browniano.

La curva de Von Kosch es un fractal famoso (fig 7), te invito a que intentes trazar una tangente en el punto que elijas:



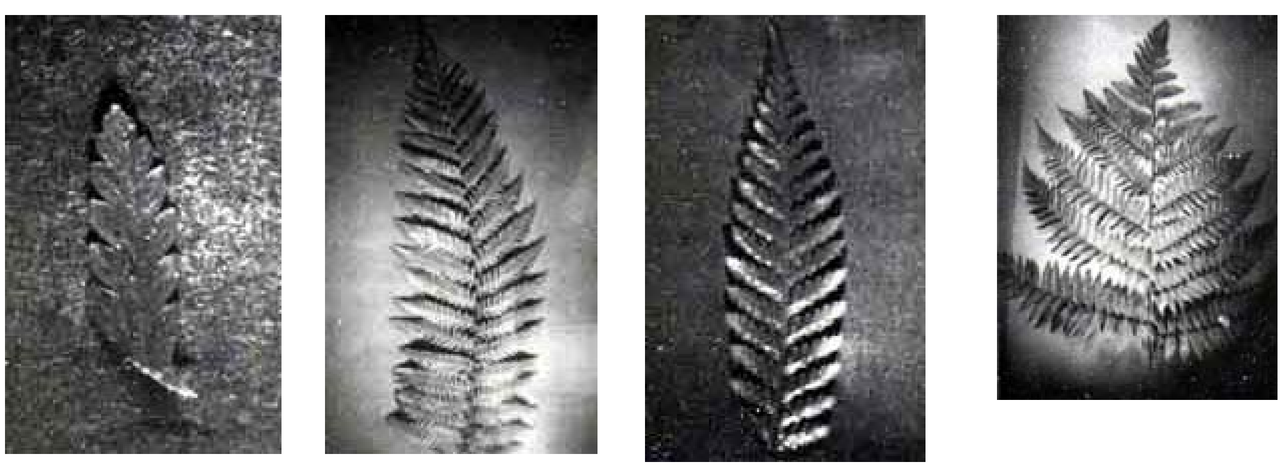
(fig. 7) Curva de Von Kosch
¡esperá...esperá! que le cambio la escala para que la veas mejor (fig. 8)



(fig. 8) Ampliación de una pequeña porción de la curva de Von Kosch.

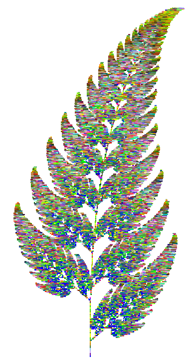
¿Te rendiste? No te preocupes entiendo porque.
A este tipo de curva, y aunque te sea dificil comprender que es una curva, (Mandelbrot te lo explicaría mejor que yo), las denominó monstruosas, (mi esposa me recomendó que aclarara que fué Mandelbrot quién la bautizó, porque cuando se la nombré no paró de reirse y de matemática no sabe poco) y creo que vas a entender porqué. Mi objetivo no es enseñarte a construirla porque existe mucho material sobre eso en Internet, pero si te despertó curiosidad quiere decir que no te aburrí.

Aquí el tema es la naturaleza, que tiene de fractal y de algoritmo para construir este tipo de monstruos para que se acerquen en cierto grado a un modelo matemático que la represente. Estudiemos un poco las siguientes fotografías:



(fig. 9) Fotografía de un helecho *cuerno de ciervo.* La repetición del mismo patrón de crecimiento se presenta a varias escalas. (Fotos: Guillermo Sosa.)

El conjunto de imágenes de la (fig. 9) muestra un cierto patrón de autosemejanza como el de los fractales, en la (fig. 10) te presento el modelo fractal de un helecho.



(fig. 10) Helecho de Barnsley

Para explicarte que es lo que pretendo con esto del algoritmo, juquemos un rato y como dicen los chicos, “a que somos la naturaleza y construimos un Abeto”,... si asi nomás de la nada... solo podemos usar matemática (porque creemos que ese es su lenguaje), sin lapiz y sin papel, que contenga una pizca de azar y autosemejanza.
Si estas curzando Algebra y Geometría II deberías estar incursionando dentro de las transformaciones lineales con algunos dolores de cabeza, aquí en este pequeño espacio le vamos a dar una aplicación, si bien no toda transformación lineal nos da un fractal estas secuencias de transformaciones nos lo dibujarán:

Sean f_1, f_2, f_3, f_4 las cuatro transformaciones de $R^2 \to R^2$ representadas por

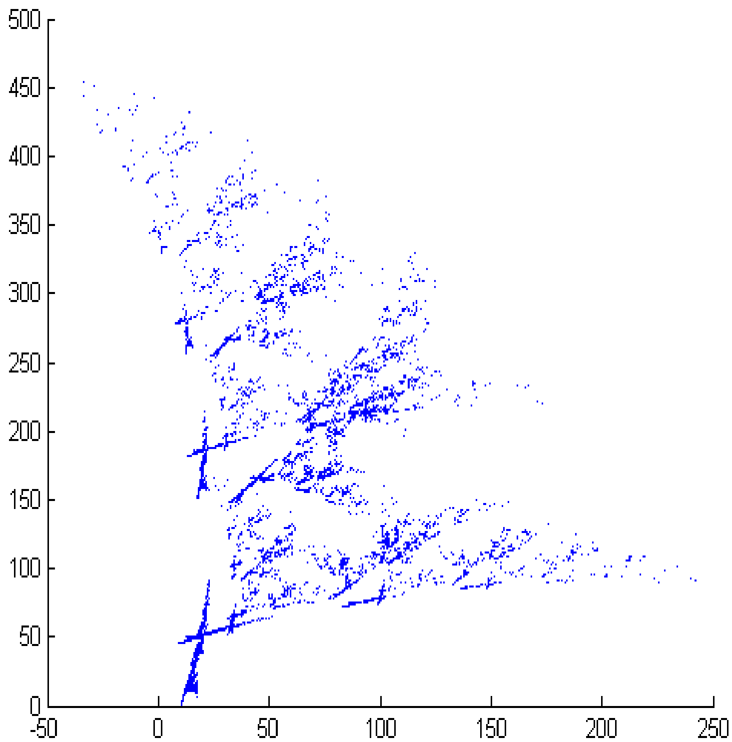
$$f_{1(x)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.03 \\ -0.07 & 0.7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$f_{2(x)} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.51 \\ 0.5 & 0.15 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$$
$$f_{3(x)} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.25 \\ 0.21 & 0.4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 30 \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$f_{4(x)} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.05 \\ 0.03 & 0.2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora tomemos una coordenada al azar como por ejemplo el punto $(10,2)$ y tiremos una dado, si sacamos 1 elegimos f_1, si sacamos 2 elegimos f_2, si sacamos 3 elegimos f_3, si sacamos 4 f_4 en cambio si sacamos un número distinto a los anteriores volvemos a tirar hasta que entremos en el intervalo $[1,4]$, y repitamos esta secuencia hasta que nos agotemos, tomando como nueva coordenada la que nos han devuelto las transformaciones, como esto se hace muy tedioso escribamos un programa computacional, en este caso lo haré con el lenguaje de computación técnica MATLAB[6] porque no le tenemos que enseñar las operaciones matriciales y...

[6] MATLAB es marca registrada de The MathWorks, inc.

```
%Abeto
%Fecha de inicio: 22/03/04
%Hora de inicio: 08:15pm
%Hora de finalizacion: 08:25pm

function Abeto(x,y)
coordenada=[x y] ;                    %Primera coordenada
T1=[0.75 0.03; -0.07 0.7];          %Transfornaciones
T2=[-0.15 0.51; 0.5 0.15];
T3=[0.2 -0.25; 0.21 0.4];
T4=[0.02 -0.05; 0.03 0.2];
%Buscando numero aleatorio entre 1 y 4
aleatorio=round(rand(1)*10); %round: recorta los decimales
                             %rand(1)*10: genera un numero aleatorio < a 1 y e
                             %multiplicado por 10 para que sea un número
                             %decimal de dos cifras.

aleatorio=round(rand(1)*10);
while or(aleatorio<1, aleatorio >4)  %por si no cae dentro del intervalo.
   aleatorio=round(rand(1)*10);
end

switch aleatorio
   case 1,
         coordenada=coordenada*T1 + [10 150];
   case 2,
         coordenada=coordenada*T2 + [10 40];
   case 3,
         coordenada=coordenada*T3 + [30 150];
   case 4,
         coordenada=coordenada*T4 + [10 1];

hold on;
plot(coordenada(1), coordenada(2),'b');    %Graficamos cada punto
Abeto(coordenada(1), coordenada(2));       %La función se llama a si misma, con la nueva
                                           %coordenada obtenida de la transformación.
end
```

y con solo escribir en la lina de comandos del MATLAB......Abeto(10, 2)....(fig. 11)



(fig. 11) Abeto generado en MATLAB.

Naturalmente que un Abeto no es azul pero lo que nos interesa es la forma y la construcción.

Estamos acostumbrados a que el lápiz, el papel y los elementos de dibujo tales como la regla, escuadra, compás y pistoletes son los adecuados para representar en cierto grado a la naturaleza, y lo es de un cierto modo artístico, pero dependiendo del grado de exactitud que deseemos, cambiaremos los elementos de dibujo por los elementos matemáticos algorítmicos que nos proporciona una computadora, para ello deberemos de aprender a utilizarlos, dirás que te es dificil y poco natural para vos, claro está que no dibujaste en una mesa desde niño haciendo tus primeros monigotes con una computadora, pero si te gusta la matemática, esta nueva herramienta elaborada a través de los pensamientos del metematico Jhon Von Neuman, te será de gran utilidad.

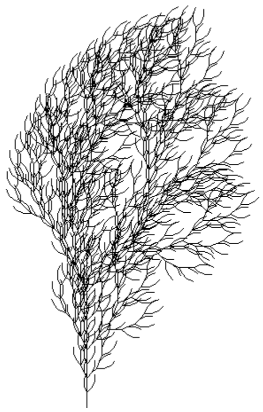
Ni siquiera he arañado los umbrales de la geometría Fractal con este artículo, porque como las geometrías elíptica y hiperbólica, ésta tiene un su mochila una gran complemento teórico.

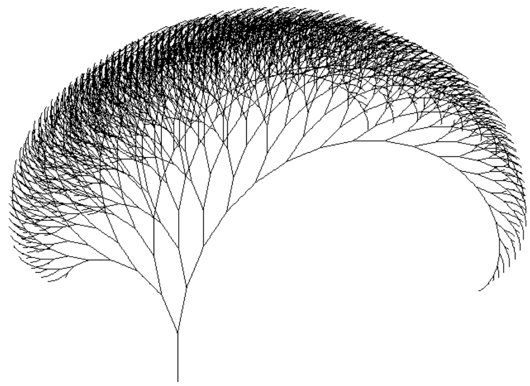
Todavía me queda lugar en la hoja para pedirle a Luis A. Santaló que me ayude con mi refexión*..."la información llega a través de los sentidos y con ella, junto con principios muy generales del conocimiento (simplicidad, razón suficiente) se llega a los primeros resultados. En general estos fenómenos a escala humana, vale decir, de fenómenos observables por los sentidos y cuya duración sea del orden de la vida del hombre. Fuera de estos límites, los sentidos no sirven, se carece de información directa, y nada es de extrañar que la intuición fracase."..."Al descubrir el telescopio , Galileo pudo realizar observaciones más finas y con ello se se dudó de la inmutabilidad de los astros."..."Si nuestros sentidos fueran más potentes, la duración de la vida del hombre fuera de otro orden , nuestra intuición del mundo sería muy distinta..."* nuestra percepción de la naturaleza esta ligada a nuestros sentidos, que son los mismos tanto para el hombre primitivo como para el hombre de hoy, pero nuestra interpretación del mundo que nos rodea a través de los siglos a cambiado gracias a que la tecnológía ha ampliado nuestros sentidos, y quizás por ello debemos crear nuevos modelos matemáticos para reintrepretarla.

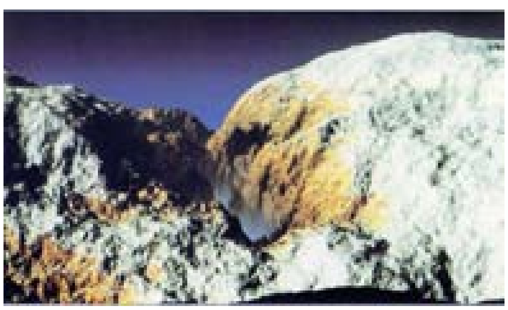
Espero no haberte aburrido y que mires a la naturaleza con otros ojos, te paso la posta para que nos muestres otro tipo de geometría no euclideana. Hasta la próxima...

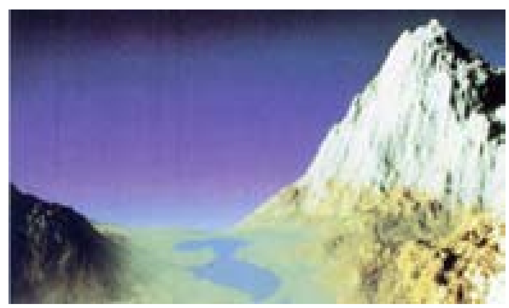
Ariel Alejandro Amadio
Alumo de 3º año del Profesorado de Matemática para el tercer ciclo y el polimodal Fundación Suzuki.

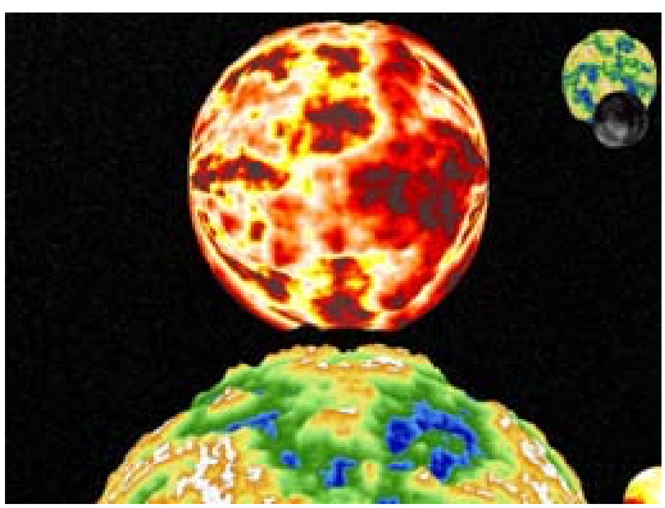
Algunas imagenes fractales...











Bibliografia:

BENOIT MANDELBROT. “*La geometría fractal de la naturaleza”.* Tuquets Editores.1997
VERA DE SPINADEL - JORGE G. PERERA - JORGE H. PERERA. “Geometría Fractal”. Nueva libreria.1994
GEORGE NAKOS - DAVID JOYNER. *“Álgebra lineal con aplicaciones”.* Internacional Thomson Editores.1999
LUIS A. SANTALÓ. *“Geometría y física”.* Conceptos de matemática Nº 43. Julio-Agosto-Septiembre 1977.

Agradecimientos:

Al profesor Javier Accinelli por haberme presentado el tema, y corregido este texto, si me hubiese encontrado con la frase de Barnsley al comenzar y no al finalizar este trabajo quizás hubiese huido despavorido.

Al profesor Nestor Clauss por haberme prestado el libro de Mandelbrot, y por darme una buena idea para que el algoritmo del Abeto fuese más rápido.

A mi esposa por la paciencia y las correcciones.

A mis compañeros Mara, Stella, Lili y Hernán por corregir los horrores de ortografía.