AS CIENCIAS MATEMÁTICAS NO SÉCULO XX

*Luís A. Cordero**
Universidade de Santiago
de Compostela

"Entristéceme que a xente culta nin sequera saiba que o meu tema existe"

Paul R. Halmos

Resumi-la evolución das Matemáticas ó longo do século XX nunhas poucas páxinas é unha tarefa imposible. Tanto por razóns obxectivas como por razóns subxectivas, tendo en conta os modos de pensamento que temos os matemáticos e a nosa linguaxe tan especial, achegarlle ó lector os avances habidos neste século no pensamento matemático sen recorrer ás fórmulas paréceme, cando me dispoño a comezar a escribir, algo irrealizable.

Ademais, coido que un matemático, ó enfronta-la tarefa de escribir un artigo como este, que se supón de divulgación, debe ter en conta que polo menos a metade dos seus lectores deixarán de ler ó que atopen nel unha primeira ecuación, e non é difícil imaxinar qué ocorrerá cos que continúen ó daren coa segunda. Así que eu, que comparto este punto de vista, vou tentar escribir este traballo sen utilizar fórmulas, confiado en que o meu lector saberá desculparme polas moitas imprecisións, erros e omisións que sen dúbida hei cometer.

AS CIENCIAS MATEMÁTICAS: A NOSA CULTURA INVISIBLE

Ninguén cun nivel cultural medio pode nega-la existencia do pensamento matemático como algo inherente ó poder racional do home, formando parte da súa natureza e da súa historia.

Na proposición non de lei do Congreso dos Deputados sobre o Ano Mundial das Matemáticas 2000 dise:

> As Matemáticas son unha das máximas expresións da intelixencia humana e constitúen un eixe central na historia da cultura e das ideas. Gracias á súa universalidade aplícanse nas outras ciencias, nas ciencias da natureza, nas

* Catedrático de Xeometría e Topoloxía.

> ciencias sociais, nas enxeñerías, nas novas tecnoloxías, e nas distintas ramas do saber mais nos diferentes tipos de actividade humana, de tal xeito que resultan ser fundamentais no desenvolvemento e progreso dos pobos.

O impacto e influencia das Matemáticas na nosa forma actual de vida é indiscutible e débese ó seu espectacular crecemento e ó aumento das súas aplicacións, principalmene no último tercio do século XX, no que todo se *matematiza*. Moitas das cousas que forman parte da nosa vida cotiá e das que non poderiamos prescindir facilmente, como a radio, o teléfono, a televisión, as calculadoras, os ordenadores, os códigos de barras, os discos compactos, o escáner ou os satélites artificiais, por exemplo, non serían posibles sen a aplicación de numerosos resultados matemáticos. Malia iso, e aínda que a súa historia se mide por milenios, os matemáticos temos que admitir que as Matemáticas son, sen dúbida, as máis impopulares de tódalas ciencias, e ocupan o último posto da lista no que á comunicación e coñecemento do home medio se refire.

F. Hirzebruch sinala:

> Sen Matemáticas non habería un pensamento lóxico estructurado; o pensamento matemático é un compoñente fundamental do mundo moderno. Historicamente as Matemáticas foron a chave que abriu as portas da ilustración. Hoxe, as Matemáticas puras poden aínda ser consideradas como o garda do graal do pensamento lóxico.

O CAMBIO DE SÉCULO: DO XIX Ó XX

Sería imposible falar dos logros acadados polas Matemáticas no século XX sen facer referencia á revolución experimentada polo pensamento matemático ó longo do século anterior. Non só a súa linguaxe, senón os fundamentos lóxicos das Matemáticas actuais, dependen dun xeito esencial do acontecido durante o século XIX.

Unha das características primordiais das Matemáticas é o seu rigor, é dicir, o coidado en non admitir máis que aquilo que fose probado por un razoamento, e fixar con precisión as bases de todo razoamento. Sen embargo, este coidado non existiu sempre, como mostra a historia das Matemáticas nos séculos XVII e XVIII, cando os continuadores da obra de Newton e de Leibniz, aínda que culminan as colosais creacións do Cálculo infinitesimal e do Cálculo integral, inquietaban seriamente os científicos e mais os filósofos polas súas ousadías nos esvaradíos terreos do infinito e do infinitésimo, que se atopaban na base de todo o cálculo, ousadías provocadas por unha incontrolada chamada á intuición.

Non obstante, os rápidos progresos experimentados neses séculos fixeron que as Matemáticas entraran no XIX —para moitos o verdadeiro século da Matemática pura— nun período de axitado crecemento caracterizado por dous feitos: 1) a crítica dos fundamentos, primeiro os da Análise, logo os da

Xeometría, e por último tamén os da Lóxica, e 2) por unha tendencia á xeneralización, tentando libera-las Matemáticas das presuncións intuitivas e lograr que fosen un obxecto de estudio en por si, independentes da Filosofía natural. As melloras nos sistemas de cálculo, coa elaboración dun sistema rigoroso de análise, conducen, nun último termo, á Mecánica cuántica e á Teoría da Relatividade, e, como consecuencia, a un coñecemento e comprensión máis fondos da natureza da materia e do espacio. Doutra banda, ó cuestiona-la lóxica do Cálculo e da Xeometría, descóbrese un novo mundo para as Matemáticas nas teorías dos conxuntos infinitos e das xeometrías non-euclidianas, o que de feito conducirá, ó longo do primeiro tercio do século XX, ó mellor entendemento dos seus propios fundamentos.

Estas dúas direccións, unha aplicada e con influencias alleas, a outra teórica, introspectiva e abstracta, teñen en realidade unhas raíces comúns e mostran a simbiose existente entre Matemática pura e Matemática aplicada.

Dunha parte, J. Fourier (1768--1830) intúe que toda función pode ser expresada como suma de certas funcións básicas simples que representan as vibracións periódicas que forman os tons puros musicais ou as cores básicas da luz. Esta idea de Fourier, motivada pola súa análise da calor nos corpos, é unha das máis importantes da historia das Matemáticas. Os estudios derivados deste descubrimento esténdense ó longo de todo o século XIX e involucran os máis importantes matemáticos da época, como Dirichlet, Riemann, Weierstrass ou Cantor. Eles analizan qué é o que valida o método (a converxencia controlada das sumas infinitas) e qué é o que pode invalidalo. Os seus estudios permítenlles ós físicos teóricos (seguindo o camiño no que a teoría é válida) transforma-la Física clásica por medio destes novos instrumentos matemáticos. Pola súa banda, os matemáticos exploran as moitas vías nas que o método de Fourier non funciona. Descobren deste xeito o amplo mundo, ata entón descoñecido, dos conxuntos infinitos.

Prodúcese asemade un descubrimento sorprendente e desconcertante: a Xeometría euclidiana non é o único tipo de xeometría posible. Hoxe sabemos que este achado se debe a K. F. Gauss (1777-1855), o matemático máis grande de tódolos tempos, quen nunca o publicou por medo ó ridículo; o creto da primeira publicación, en 1826, débese atribuír a N. Lobachevski (1792--1856) e J. Bólyai (1802-1860), que, dun xeito independente e case simultáneo, deron a coñecer o que hoxe chamamos Xeometría hiperbólica. A clave para tal achado atópase no feito de que un dos postulados da Xeometría euclidiana, o Postulado da Paralela ou Postulado V, non é por forza certo. É dicir, dos dez axiomas da Xeometría euclidiana, o Axioma da Paralela pode ser negado e, así e todo, aínda é posible construír cos nove restantes unha Xeometría perfectamente consistente; ou o que é o mesmo, tal axioma é independente dos outros nove. Este descubrimento leva de contado á pluralización das Matemáticas: onde antes había unha xeometría agora temos xeometrías e, nun último termo, álxebras e non só unha álxebra, sistemas numéricos e non un só sistema numérico. O pulo definitivo destas consideracións puramente abstractas sobre as xeometrías non-euclidianas prodúcese coa definición por G. B. Riemann (1826-1866) das "configuracións n-dimensionais", co que se crean os modelos matemáticos que lle permitirán a A. Einstein (1879-1955), anos máis tarde, o desenvolvemento da Teoría da Relatividade.

Estas dúas direccións seguidas no século XIX, se ben poden ser consideradas fundamentais, non foron certamente as únicas. As necesidades da Física matemática provocaron o inicio do desenvolvemento da Análise complexa, é dicir, do estudio das funcións sobre os números complexos. Este progreso, que se leva a cabo canda o da Análise de Fourier, segue a ter hoxe en día aplicacións constantes non só na Física matemática senón tamén, por exemplo, desempeñando un papel central na resolución de arrevesados problemas da moi abstracta e pura Teoría dos Números Primos. Doutra banda, a Teoría de Grupos, iniciada por E. Galois (1811-1832) ó tratar de resolve-lo problema, xa clásico daquela, de atopar as raíces dunha ecuación polinómica, a Álxebra de Boole, xermolo da lóxica matemática (G. Boole, 1815--1864), ou a Álxebra de Matrices (A. Cayley 1821-1895), xorden como consecuencia de consideracións puramente teóricas e como resposta a necesidades puramente intelectuais; con todo, co andar do tempo todas elas se teñen mostrado claramente útiles nas súas aplicacións.

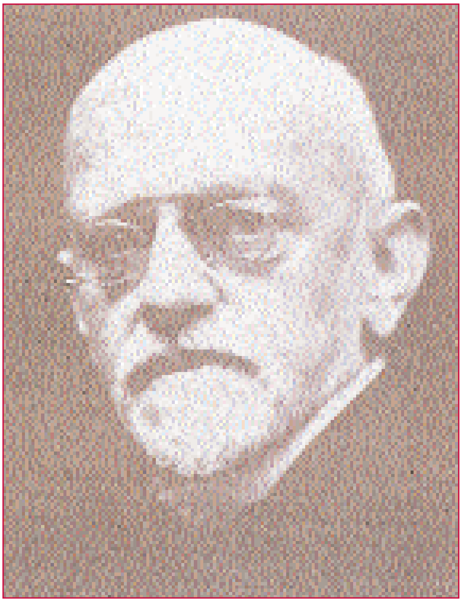
Desta visión do sucedido no século XIX, incompleta e moi superficial, pódese extraer emporiso unha importante conclusión que marca o devir das Matemáticas ó longo do século XX: aínda que as Matemáticas están moldeadas tanto pola necesidade de comprensión da forma pura como pola determinación dun feito científico, ámbolos dous moldes producen estructuras semellantes e, independentemente de se o seu desenvolvemento vén motivado polo seu interese intrínseco, como se se realiza polo interese das súas aplicacións, os problemas que se xeran e as estructuras necesarias para resolvelos comparten unha base lóxica común, e só se diferencian na forma de seren expresados. Por iso, e dun modo case xeral, as Matemáticas eran xa aceptadas, a finais do século XIX, como unha forma de pensamento axiomatizado.

AS CIENCIAS MATEMÁTICAS NO SÉCULO XX

O desenvolvemento experimentado polas Matemáticas ó longo do século XX é, se non maior, si polo menos comparable ó de calquera das outras ciencias. O ocorrido nestes cen anos pódese resumir, dun xeito moi simple, dicindo que a súa primeira metade estivo marcada pola idea de que "canta máis abstracción, mellor"; este concepto foi cambiando co paso do tempo, e semella que na segunda metade do século o principio predominante pasou a ser que "existen niveis óptimos de abstracción".

Postos a sinala-las influencias máis relevantes que condicionan o desenvolvemento das Matemáticas na primeira metade do século, é obrigado asocialas, nunha inicial aproximación, cos nomes de dous ilustres matemáticos: Georg Cantor (1845-1918) e David Hilbert (1862-1943).

Cando a Matemática se movía no medio dun mare magnum de novos conceptos e teorías e dunha nova linguaxe que nacía coa Teoría dos Conxuntos Infinitos de Cantor, prodúcese un feito que marca decisivamente o seu desenvolvemento posterior ó longo de todo o século. En agosto do ano 1900 celebrouse en París o 2º Congreso Mundial de Matemáticas; na sección de Bibliografía e Historia, Ensino e Métodos, nunha sesión presidida precisamente por Cantor, Hilbert pronunciaba unha conferencia titulada "Os problemas futuros das Matemáticas". Nela presentaba unha lista de vintetrés problemas non resoltos que, na súa opinión, eran os máis importantes cos que se enfrontaban as Matemáticas naquel momento e que deberían centra-lo traballo investigador nos seguintes anos. Os problemas propostos por Hilbert marcaron o devir das Matemáticas a partir do momento da súa formulación e ata os nosos días,



David Hilbert presentou na súa conferencia do ano 1900 en París, que acadou moita sona, unha lista de vintetrés problemas matemáticos non resoltos.

nos que, por certo, algún deles aínda segue sen resolver. Tal foi a importancia desa lista de problemas que os matemáticos que lograron solucionar algún deles obtiveron un recoñecemento unánime por parte de toda a comunidade matemática.

Pero máis importante aínda cá lista de problemas de Hilbert foi a súa proclamación de fe persoal na posible resolución de todo problema matemático, feita na primeira parte da conferencia e que se resume nas súas propias palabras como segue: "(Os matemáticos) oímos sempre resoar esta chamada: aquí te-lo problema, búscalle solución. Ti podes atopala polo razoamento puro. Xamais o matemático será levado a dicir: *Ignorabimus*".

Hilbert baseábase no convencemento de que a natureza das Matemáticas consiste en propoñer e resolver problemas, polo que os instrumentos do pensamento puro na mente dos matemáticos creadores deben ser sempre suficientes para resolver calquera problema matemático que se lles propoña. Segundo el, as esixencias e as condicións xerais ás que debe corresponde-la solución dun problema matemático son dúas: 1ª, a exactitude da solución, que debe obterse por medio dun número finito de conclusións; e 2ª, esa solución debe fundamentarse sobre un número finito de hipóteses proporcionadas polo mesmo problema e formuladas, en cada caso, con precisión.

O método axiomático así propugnado por Hilbert non era algo novo, xa que foi o utilizado por Euclides, por exemplo; pero a Hilbert se debe que comezara a ser coñecido e utilizado, na súa forma moderna, a finais do século XIX. Como auténtico mestre da axiomática, o espírito de Hilbert exerceu unha profunda influencia no universo matemático de principios do século, e por iso debe ser considerado como un deses grandes homes que dominan e caracterizan toda unha época. O rigor da súa linguaxe e a marabillosa perfección dos seus razoamentos fixeron que o seu traballo fose un modelo para tódolos matemáticos posteriores. O seu libro *Grundlangen der Geometrie* (Fundamentos da Xeometría, 1ª ed. 1899) marca o inicio da axiomatización das Matemáticas, ou, por sermos máis precisos, da utilización dos sistemas de axiomas formais como base de cada unha das disciplinas matemáticas e, eventualmente, de tódalas Matemáticas.

Non obstante, a implantación desta concepción hilbertiana, esencialmente formalista, non foi doada; el mesmo coñecía mellor ca ninguén a grande influencia exercida polas outras dúas escolas de pensamento sobre a fundamentación das Matemáticas que xurdiron nos comezos do século.

Dunha parte estaba a Escola loxicista; os seus principais impulsores foron os ingleses B. Russell (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947). Os membros desta escola sostiñan que a Matemática é unha rama da Lóxica e, xa que logo, avogaban pola definición dos conceptos matemáticos en termos de nocións lóxicas e a proba das súas proposicións como teoremas de lóxica. Este enfoque non era novo xa que o principio de que as Matemáticas son derivables da Lóxica se remonta a Leibniz, quen distinguía entre verdades da razón, ou necesarias, e verdades de feito, ou continxentes. En 1903, na súa obra *Principios da Matemática,* Russell escribía: "O feito de que tódalas Matemáticas son lóxica simbólica é un dos achados máis grandes da nosa época..."

Doutra banda estaba a chamada Escola intuicionista, fundada por L. E. J. Brouwer (1881-1966), ó que máis tarde se une Hermann Weyl (1885-

-1955). Brouwer concibía o pensamento matemático como un proceso de construccións mentais que crea o seu propio universo, independente da experiencia e restrinxido só na medida en que debe de estar baseado na intuición matemática fundamental. Brouwer escribia: "O único fundamento posible para as Matemáticas ten que buscarse neste proceso constructivo, limitado pola obriga de captar con reflexión, cultura e refinamento de espírito qué teses son aceptables á intuición e evidentes á mente e qué teses non o son". Como non recoñecía ningún principio da Lóxica *a priori*, tampouco non recoñecía a tarefa matemática de deducir conclusións a partir de axiomas; para el, os paradoxos eran un defecto da Lóxica e non da verdade matemática, así que negaba a lexitimidade absoluta das regras aristotélicas da Lóxica, chegando a citar a Lei do Tercio Excluso para conxuntos infinitos como exemplo de principio lóxico que se estaba a aplicar con excesiva liberdade. Hilbert, reaccionando contra esta corrente, chegaría a declarar, alporizado, no ano 1924: "Despoxa-lo matemático da Lei do Tercio Excluso equivale a negarlle o telescopio ó astrónomo, ou o uso dos seus puños ó boxeador".

Co fin de salva-la Matemática clásica da demoledora crítica intuicionista, así como tamén a Teoría Conxuntista de Cantor, que se estaba a crebar polo mal dos paradoxos, Hilbert propuxo que a Matemática fose formulada como unha teoría axiomática formal. Impulsou deste xeito unha terceira escola, a Escola formalista, baseada na filosofía de que todo o contido das Matemáticas pode transformarse nun sistema de fórmulas simbólicas; xunto a este sistema formal existe un eido chamado Metamatemática, dominio separado que serve de xustificación para o sistema de fórmulas, xa que o seu obxecto de investigación son as propias demostracións das Matemáticas ordinarias. Esta concepción formalista ou hilbertiana distingue os enunciados 'reais' dos 'ideais', segundo o seu uso implique ou non a posesión dun significado intuitivo. Ademais, o engadido de 'elementos ideais' a un sistema para completa-la súa estructura e simplificar así o desenvolvemento da correspondente teoría, resultou ser un procedemento moi proveitoso.

Hilbert e os seus seguidores crían que co procedemento de edificar e formaliza-la demostración matemática por medio dun sistema de postulados non contradictorios, podería introducirse nas Matemáticas o mesmo tipo de certeza que as Leis de Newton introduciran na Mecánica dous séculos antes. Sen embargo, do mesmo xeito que a Mecánica cuántica botou por terra o determinismo newtoniano, así a publicación do Teorema de Incompletitude por Kurt Gödel (1906-1978), no ano 1931, fixo o mesmo coa certeza hilbertiana. No seu teorema —sen dúbida un dos resultados máis profundos da historia do pensamento—, Gödel establece a sorprendente conclusión de que as Matemáticas non poden ser encadeadas á Lóxica, deixando sentado que a Aritmética e, *a fortiori*, a Ciencia matemática, é unha teoría incompleta. Isto viña a significa-lo seguinte: dado un conxunto calquera de axiomas que inclúa os da Aritmética, non existe ningún proceso de demostración con forza abonda para probar que tal conxunto é, ó mesmo tempo, consistente e completo, xa que se fose completo tería que ser contradictorio, e se non contén contradiccións entón sempre existen enunciados matemáticos verdadeiros que non poden derivar do conxunto de axiomas de partida. Utilizando as palabras de Hilbert, Gödel probou que nas Matemáticas sempre existe un "*Ignorabimus*".

Gödel facía ver así que as Matemáticas non son unha ciencia todopoderosa e que estaban moi lonxe de probalo todo como algúns pretendían, xa que nin sequera daban constatado a súa propia consistencia. Poñíase así mesmo en evidencia que se a Teoría de Conxuntos non é contradictoria cando se basea nun sistema de axiomas no que non figure o Axioma da Elección (que estipula a posibilidade de elixir un elemento en cada conxunto dunha familia de conxuntos), entón tampouco o é a teoría obtida engadíndolle ó sistema o Axioma da Elección e a Hipótese do Continuo (que di que todo conxunto non numerable de números reais ten a potencia do continuo, entendendo por 'continuo' o conxunto de tódolos números reais). Polo tanto, non se puido probar nin a veracidade nin a falsidade do Axioma da Elección e da Hipótese do Continuo, disxuntiva que dividía os matemáticos e coa que rematou no ano 1963 o americano P. J. Cohen (1934-...) ó probar no seu Teorema de Indicibilidade que se trata de dous axiomas independentes do resto, e que a supresión dun ou de ámbolos dous, e mesmo a negación de calquera deles, daría orixe a Matemáticas diferentes. Por certo, Cohen deu así resposta ó primeiro dos problemas da lista proposta por Hilbert en 1900.

En resumo, todas estas convulsións experimentadas pola axiomática primitiva ó longo da década dos trinta provocaron modificacións substanciais na forma de pensamento matemático e conduciron, en definitiva, á inclusión dun formalismo-clase no sistema e á fusión dos axiomas da Teoría de Conxuntos cos do Cálculo lóxico. En todo caso, un feito predominante acabou por ser incuestionable: o triunfo das ideas de Cantor.

A introducción por Cantor, nos últimos anos do século XIX, dos conxuntos infinitos no vocabulario das Matemáticas deu orixe á Teoría de Conxuntos, e con ela proporcionou unha nova e rica linguaxe que permitiu achar novas demostracións de feitos xa coñecidos e, sobre todo, considera-las Matemáticas desde unha nova perspectiva, con resultados tan afagadores que logrou estimular enerxicamente as xeracións posteriores. A Teoría de Conxuntos, que deixara estampada unha impresión indeleble nas cuestións filosóficas máis fondas dos fundamentos das Matemáticas, impulsou que os problemas máis arrevesados das súas principais áreas fosen repropostos e moitas veces resoltos; acusáronse daquela os efectos do poderoso pulo innovador xerado por ela.

Por exemplo, cuestións sobre a estabilidade das solucións das ecuacións diferenciais, nas que as solucións representan traxectorias de obxectos en movemento, foron traducidas en problemas de xeometría de certos conxuntos de puntos chamados superficies, o que axudou ó afianzamento dun novo campo nacente: a Topoloxía. Dun xeito análogo, cuestións sobre a estructura común das matrices, dos grupos e dos conxuntos, conduciron ó amplo dominio hoxe coñecido como Álxebra abstracta. E métodos similares, ó seren aplicados á Análise do século XIX, levaron á Análise abstracta, na que as integrais e derivadas do cálculo clásico se aplican en espacios de dimensión infinita. Estas tres disciplinas, Álxebra, Análise e Topoloxía, representan a cultura común dun matemático do noso século. As definicións, teorías e métodos destes tres campos conforman hoxe o fundamento da educación matemática, e ninguén pode ser considerado culto en Matemáticas se non pode lelas e escribilas na linguaxe da Álxebra, da Análise e da Topoloxía. Partindo destes tres campos, nados nos albores do século XX, xorde a incrible variedade das Matemáticas dos nosos días.

Esta rápida exposición das orixes, artífices e principais áreas que levan ás Matemáticas contemporáneas, quedaría incompleta se non se cita a decisiva influencia exercida, entre os anos corenta e ata ben entrados os setenta, pola aparición no mundo matemático dunha iniciativa moi singular coñecida baixo o nome de Nicolás Bourbaki.

No primeiro semestre do curso 1934-35, un grupo de matemáticos franceses mozos, case todos antigos alumnos da Escola Normal Superior de París, formado ó principio por H. Cartan (1904-...), C. Chevalley (1909--1984), J. Delsarte (1903-1968), J. Dieudonné (1906-1992) e A. Weil (1906--1998), decidiron escribir xuntos un libro sobre Análise. Nun primeiro momento concibírono pensando nos estudiantes das universidades francesas e como substituto dun libro de E. Goursat, que consideraban xa anticuado, polo que decidiron redactar un novo texto que respondera axeitadamente ás necesidades das Matemáticas do século XX. Con este fin, comezaron a reunirse unha vez ó mes para discutiren o seu plan. Axiña, chegaron nesas reunións á conclusión de que non lles sería posible limitarse só a escribir un texto de Análise. A Álxebra, por exemplo, que cambiara por completo nos últimos anos como resultado dos impulsos vidos desde Alemaña, debidos principalmente ó traballo de Emmy Noether (1882-1935) e dos seus estudiantes, estaba xa a muda-la cara de toda a Matemática. Doutra banda, as distintas ramas das Matemáticas tiñan acadado un desenvolvemento de tal magnitude que a especialización era xa

Henri Cartan (esquerda) e Jean Dieudonné (dereita) son dous dos fundadores do grupo Bourbaki. Os dous cóntanse entre os máis brillantes especialistas, á marxe das súas publicacións baixo o pseudónimo do *matemático pantasma*.

absolutamente necesaria para case tódolos matemáticos. Só aqueles da estatura científica dun David Hilbert ou dun Henri Poincaré podían pensar en abranguer todo o conxunto da Matemática. Para un matemático medio, sen embargo, era xa pouco menos que imposible ter unha perspectiva completa da Matemática e coñecer tódalas relacións existentes entre as súas diferentes ramas.

Todo isto fixo que o grupo comezara a decatarse do enorme que tería de ser o seu traballo, polo que decidiron que tal tarefa non podía facela un só individuo e que a súa división entre os distintos membros do grupo de acordo coa especialización de cadaquén sería contraproducente para o seu obxectivo final: expoñe-los conceptos básicos comúns a tódalas ramas das Matemáticas, en primeiro lugar, e, unicamente unha vez feito isto, dedicarse a cada unha das súas áreas.

Desde o principio, Bourbaki non dubidou en adopta-lo método axiomático, polo que ten sido criticado duramente en moitas ocasións, pero el considerábao absolutamente necesario para poder acada-lo seu obxectivo. A idea, moi simple, que inspira o método axiomático é a seguinte: no canto de defini-los obxectos que se van investigar, o que hai que facer é unha lista das propiedades fundamentais dos obxectos que se van utilizar no estudio. Estas propiedades tómanse como axiomas, e a partir de aquí xa non é importante cáles son os obxectos que se estudian. As demostracións constrúense de tal xeito que as súas conclusións poden ser aplicadas tamén a calquera outro obxecto que satisfaga eses mesmos axiomas. É case incrible que unha idea tan sinxela, que transformou completamente as Matemáticas, tardara tanto tempo en ser posta en práctica.

Esta decisión de Bourbaki de utiliza-lo método axiomático levouno á necesidade de adoptar un novo ordenamento das diferentes ramas das Matemáticas, xa que non era posible mante-la división clásica en Análise, Cálculo diferencial, Xeometría, Teoría de Números, etc.; no seu lugar xurdiu a noción de 'estructura', que permitiu a introducción do concepto de 'isomorfismo' e, con el, unha nova clasificación das disciplinas fundamentais dentro das Matemáticas.

Os primeiros fascículos da obra de Bourbaki, que titulou *Elementos de Matemática,* apareceron no ano 1939 e chegou a publicar arredor de cincuenta volumes; o emprego do singular no título, Matemática e non Matemáticas, plasma a idea que inspira o seu traballo, e que queda nidiamente exposta cando sinala: "O tratado toma as Matemáticas na súa orixe e dá demostracións completas".

Con partidarios entusiastas, pero tamén con detractores moi importantes, ninguén, sen embargo, se atreverá a nega-la influencia da obra de Bourbaki, sen a cal as Matemáticas do século XX serían algo totalmente distinto do que son: unha ciencia robustecida e unificada, cimentada sobre unha fonte única, a Teoría de Conxuntos, tal e como Hilbert preconizara. E, se ben quedan ramas das Matemáticas que deberán ser axiomatizadas sobre ese fundamento, e aínda que as Matemáticas seguen apuntando cara á abstracción e a xeneralización, co paso dos anos comezan a recordar que os seus intereses e estímulos máis importantes sempre se atopan nas súas aplicacións. Morris Klein sinala: "Pretender desterrar das Matemáticas as súas aplicacións equivalería a querer concentra-la vida dun animal unicamente nos seus ósos, sen dedicar atención ós seus músculos, nervios e vísceras".

MATEMÁTICA PURA E MATEMÁTICA APLICADA

Armand Borel, membro destacado do grupo Bourbaki, dixo nunha ocasión:

> As Matemáticas son coma un grande iceberg; por baixo da superficie atópanse as Matemáticas puras, fóra da vista da xente. Por riba da auga está a punta do iceberg, a parte visible que se deu en chamar Matemática aplicada. A maioría da xente só ve esa punta que emerxe sobre a auga e non se decatan de que esa porción que eles ven non existiría sen a outra porción, moitísimo máis grande, que permanece agachada da súa vista por baixo da agua, a Matemática pura.

A Matemática aplicada pode ser considerada como aquela actividade ou actividades nas que as Matemáticas atopan a súa aplicación máis alá dos seus propios intereses. Pola súa mesma natureza, a Matemática aplicada é interdisciplinar e a ela deberían dedicarse, en termos ideais, só aqueles que non teñen o principal interese nas Matemáticas por si mesmas. Desde este punto de vista, por exemplo, se a outra materia implicada fose a Física, sería difícil decidir se os interesados nela son físicos teóricos ou matemáticos aplicados, e mesmo se estamos a falar de Física teórica ou de Matemática aplicada.

É indiscutible que a relación entre as Matemáticas e moitas das outras ciencias leva experimentando un cambio substancial ó longo das últimas décadas, cambio que en xeral foi positivo e deu froitos claramente perceptibles. O desenvolvemento dos ordenadores, cada vez máis potentes, ten moito que ver con este cambio, pero non é o seu único responsable, aínda que nun nivel popular semella identificarse a Matemática aplicada con aquela que utiliza os ordenadores como ferramenta. Emporiso, este cambio non afecta o feito de que a Matemática continúa sendo unha ciencia esencialmente distinta de calquera outra.

Á Matemática chamáronlle, algunhas veces, a 'raíña das ciencias'. Para algúns é algo superior, e a súa existencia xustifícase de seu; nesta visión plásmase un sentimento de autosuficiencia e presunción, que se reafirma coa consideración tan estendida entre moitos matemáticos de que só necesitan deles mesmos. Esta actitude mostra unha especie de sentimento case divino ou celestial, polo que a superioridade da mente sobre a materia atopa a súa mellor expresión nas Matemáticas, xa que elas son, ó mesmo tempo, a máis nobre e pura forma do pensamento. Seguramente unha das máis apaixonadas confesións, neste sentido, foi a do matemático inglés G. H. Hardy (1877--1947), quen afirmou que a mellor forma de xustifica-la práctica das Matemáticas é a de consideralas como unha forma de arte.

Diante desta actitude extrema de Hardy, que defendeu o estudio das Matemáticas como unha forma superior do coñecemento humano, independentemente da súa utilidade social, atópase a postura oposta, que entende que só se deben considerar e estudiar aqueles aspectos das Matemáticas que sexan útiles socialmente. Esta visión atopou, probablemente, a súa máxima expresión na China, polo que é coñecida como 'Maoísmo matemático'. Baixo o réxime de Mao declarouse, nun certo momento, unha moratoria sobre a investigación científica en xeral que afectou tamén as Matemáticas. Os investigadores foron obrigados a realiza--lo seu traballo de acordo co principio de que "a investigación científica debe servi-la política proletaria, os traballadores, os campesiños e os soldados, e estar integrada totalmente no proceso productivo". Durante ese período funcionaron na China comités asesores que informaban sobre a importancia da investigación que se estaba a realizar en Matemáticas, así como sobre a súa conformidade con ese principio político; é dicir, sempre baixo o criterio de que a investigación que se fixese debía estar dirixida á resolución de problemas prácticos, e que o seu ensino debería basearse en aplicacións concretas. Ata se fixo presión sobre os investigadores para que abandonasen o seu traballo en certas áreas inútiles para tal obxectivo, como ocorreu, por exemplo, coa Topoloxía[1] .

As Matemáticas tamén teñen sido consideradas, durante longo tempo, como o "servente da Ciencia"; é dicir, como un operario cuantitativo que proporciona as ferramentas, e tamén moitas veces o marco axeitado, ás outras ciencias. Esta consideración non ten sentido na actualidade; hoxe son xa tantas as actividades nas que os matemáticos colaboran co resto dos científicos que as Matemáticas son máis un compañeiro de viaxe ca un servente.

Unha terceira forma de concibi-las Matemáticas é consideralas como a linguaxe da que dependen as outras ciencias para cuantifica-lo que fan. R. Feynmann, premio Nobel de Física no ano 1965 polo seu traballo sobre a electrodinámica cuántica, dixo: "O Universo semella ser indescritible non sendo coa linguaxe das Matemáticas". Non é difícil ilustrar esta afirmación, xa que os exemplos ó longo da historia son innumerables. Pola súa relevancia, citarei só tres.

Primeiro exemplo: Newton quería achar un marco teórico que lle permitise describi-lo movemento dos obxectos baixo a influencia da forza da gravidade, incluíndo nese marco as Leis de Kepler do movemento planetario, e logrou o seu obxectivo ó enuncia-la súa Lei de Gravitación Universal. Pero ó mesmo tempo desenvolveu o cálculo infinitesimal, un dos maiores logros da ciencia ó longo da historia.

Segundo exemplo: Einstein empregou moitos anos en tratar de formular dun xeito preciso o feito de que a gravitación é unha consecuencia da curvatura do espacio-tempo, pero non sabía cómo expresalo en termos matemáticos. Contan as crónicas que, certo día, dirixiuse ó seu amigo M. Grossman e díxolle: "Grossman, tes que me axudar ou vou tolear". Este amigo faloulle entón a Einstein do traballo de Riemann sobre os espacios con curvatura. Neste contexto, o da Xeometría non-euclidiana, xa se desenvolvera unha inxente cantidade de investigación básica ou pura, que se atopaba en disposición de ser usada. Einstein, que era ante todo un físico e matemático só por necesidade, respirou entón aliviado e continuou co seu traballo sobre a Teoría da Relatividade Xeral.

1 En 1976, unha delegación de matemáticos americanos visitou a China, e tiveron entón a oportunidade de celebrar encontros informais con algúns matemáticos chineses. No informe que elaboraron sobre a visita recóllense descricións das súas entrevistas que permiten constata-la terrible realidade daquela situación.

Esta conexión entre as Matemáticas e a Física, tan clara nestes dous exemplos, ten estado presente en tódolos tempos, xa que a motivación máis importante da Matemática foi desde sempre a Física, ou, se se prefire, o mundo que nos rodea, motivación que segue a medrar co paso do tempo, tanto en extensión coma en profundidade. S. Weinberg, tamén premio Nobel de Física, fala da existencia de coincidencias 'sorprendentes' ou 'fantasmais'. Segundo el, sempre resulta sorprendente para o físico que imaxina un novo concepto ou idea constatar, *a posteriori*, que os matemáticos xa estiveran antes alí. A Teoría Abstracta de Grupos, que ninguén dubidaría en situar dentro da Matemática pura, proporciona un claro exemplo desta situación.

Terceiro exemplo: en esencia, un grupo é simplemente unha forma matemática de expresa-la noción de simetría. Cando os físicos descobren, na primeira metade do século, a existencia da Teoría de Grupos, atópanse con que iso é precisamente o que eles necesitan para unifica-las grandes leis da Física (da conservación da enerxía, do momento, do spin, da carga, etc.). Estas leis resultan ser un reflexo da simetría do mundo que nos rodea, e este sutil principio é un dos conceptos fundamentais na ciencia actual. Por exemplo, é ben sabido que, por razóns bastante complexas, a pregunta máis básica que se pode facer sobre unha partícula elemental é cál é o seu grupo de simetrías.

O PODER DAS MATEMÁTICAS

En termos xerais, ós matemáticos sempre se nos acusa de vivir nunha torre de marfil, perdidos nun mundo de abstracción formado por puntos infinitamente pequenos, circunferencias perfectamente redondas ou liñas infinitamente delgadas, por exemplo; é dicir, obxectos ideais que son irrelevantes para o mundo que nos rodea.

Pero coido que a abstracción non é, en absoluto, algo malo ou negativo, e que a construcción de modelos ideais do mundo ó noso redor sobre unha base matemática ten resultado positiva en innumerables ocasións. Lémbrese que o mundo non é como semella ser. Por exemplo, ¿quen podería imaxinar, mirando pola fiestra, que a masa se aproxima ó infinito cando un se achega á velocidade da luz? Certamente, poderiamos preguntar: ¿a quen lle interesa iso? É obvio que lles interesa ós físicos, e supoño que tamén ós matemáticos, e, se a historia serve para algo, temos que admitir que tamén lles interesa a moitos máis, aínda que a miúdo ese interese xurda anos, ou mesmo décadas ou séculos, despois de que a correspondente teoría matemática fora desenvolvida. Por exemplo, a Xeometría de Riemann, que foi esencial para a formulación da Teoría da Relatividade, foi formulada sesenta anos antes de que Einstein a utilizara. A Teoría de Grupos de Lie (S. Lie, 1842-1899), fundamental na Física actual, desenvolveuse polo menos trinta anos antes de se comezar a aplicar na Física de

Partículas. A Teoría de Galois, ferramenta indispensable na Criptografía moderna, iniciou o seu camiño hai máis de cento cincuenta anos.

Doutra banda, o descubrimento do positrón polo físico P. A. M. Dirac (1902-1984) amosa como, ás veces, as Matemáticas chegan a ser "máis reais cá propia realidade". Dirac estableceu as ecuacións de movemento do electrón baseándose fundamentalmente en consideracións de simetría. Pero sucedeu algo inesperado: as súas ecuacións predicían a existencia dunha certa partícula, idéntica ó electrón en todo agás na súa carga. Ninguén observara esta hipotética 'antipartícula', pero os físicos experimentais confirmaron rapidamente a súa existencia. Este descubrimento ten sido catalogado como un dos grandes triunfos da Física, pero teño para min que máis ben foi, de feito, un gran triunfo das Matemáticas.

Permítanme que describa outros exemplos, máis recentes no tempo, que amosan esa interrelación que se produce, sempre dun xeito inesperado e sorprendente, entre as Matemáticas e as outras ciencias, e que levan por medio das Matemáticas a obter elegantes solucións de problemas propostos nesoutras ciencias.

Os químicos xa sabían, desde comezos do século, que cando un fluxo de raios X atravesa un cristal, cada un dos seus raios sofre unha difracción ó bater cun átomo dentro do cristal; así, ó obte-la imaxe do cristal por medio dos raios X, o que se consegue é unha imaxe bidimensional na que o nivel de escuridade varía de acordo coa situación no espacio dos distintos átomos que forman o cristal. Isto era unha especie de xeroglífico para os químicos, pois o que eles querían era poder describir con precisión a situación espacial dos átomos dentro do cristal. O problema co que topaban era o seguinte: os raios X, o mesmo ca calquera outra radiación electromagnética, pódense ver como ondas, ben determinadas pola súa amplitude e a súa fase; pero as imaxes bidimensionais obtidas por medio dos raios X detectan só as amplitudes das ondas e non as súas fases, o que en definitiva facía aparentemente imposible a deducción da estructura tridimensional do cristal.

Este problema, que durante décadas intrigou ós químicos, non foi resolvido ata corenta anos máis tarde, ó redor de 1950, e a súa solución débese a un matemático chamado H. Hauptman, quen se decatou de que podía ser formulado en termos puramente matemáticos, e que para el existía xa unha solución moi elegante. Ata aquel momento os cristalógrafos só podían observa-lo que poderiamos pensar como a 'sombra' dun fenómeno físico, pero Hauptman probou que se podía reconstruí-lo fenómeno físico real a partir desa 'sombra', utilizando unha maquinaria matemática xa clásica e que se atopaba a disposición da comunidade científica desde había arredor de cen anos: as técnicas da Teoría de

Fourier[2] . Por certo, Hauptman recibiu o premio Nobel de Química en 1985.

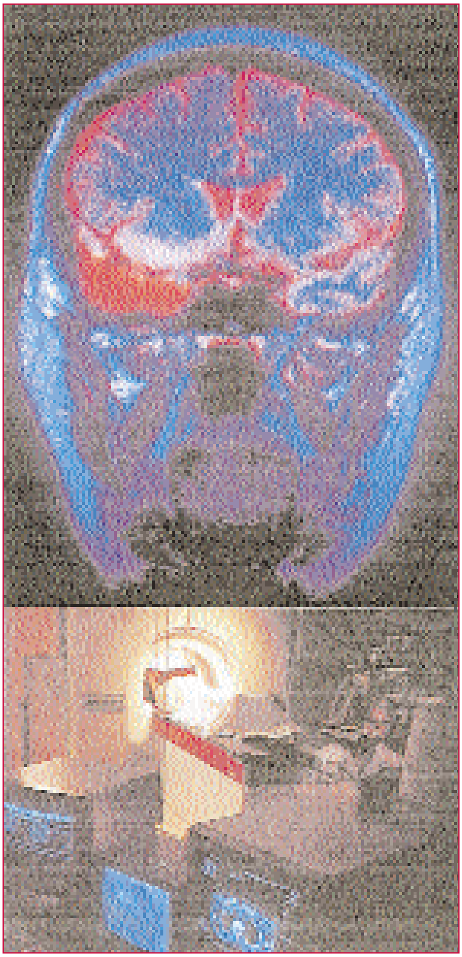
O feito certo e indiscutible é que a aplicabilidade ou non aplicabilidade dunha determinada teoría matemática é algo non predicible. P. A. Griffiths, matemático e director do Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, abunda nesta afirmación ó dicir: "Canto máis fundamental é a Matemática implicada tanto máis ampla resulta se-la súa aplicación".

Unha excelente ilustración deste feito xurdiu hai só unhas décadas, cando o enxeñeiro A. M. Cormack andaba á busca dun método que lle permitise precisa-la localización e densidade dun obxecto no interior do corpo humano sen ter que recorrer á cirurxía. Daquela os médicos só dispoñían dos raios X que, como xa diximos, proporcionan información unicamente en dúas dimensións.

O problema que se propón é o seguinte: se se fai pasar un feixe de raios a través dun obxecto de densidade variable, é posible medi-la cantidade de radiación que sae polo outro lado do obxecto e, polo tanto, cánta materia existe no obxecto ó longo da traxectoria de cada un dos raios do feixe. A cuestión é cómo se poden reconstruí-las distintas densidades no interior do obxecto a partir da información así obtida. A solución para este problema, desde o punto de vista puramente matemático, era xa coñecida desde moitos anos atrás, a partir dos traballos dun matemático chamado J. Radon (1887-1956). Usando as técnicas de Radon[3] , Cormack observou que é posible determinar con toda precisión a localización e maila forma dun obxecto no interior do corpo humano a partir das imaxes do obxecto obtidas por medio dos raios X desde distintos ángulos. Naceu así o xa popular escáner ou TAC, é dicir, a tomografía axial computarizada. Este mesmo principio foi estendido posteriormente para obte-las imaxes por resonancia magnética, aínda dunha maior precisión. En ámbalas técnicas se realiza unha gran cantidade de medidas que son esencialmente unidimensionais, e utilízase unha técnica puramente matemática para reconstruír, a partir delas, unha imaxe tridimensional. Máis recentemente, facendo uso das antipartículas descubertas por Dirac, desenvolveuse a tomografía por emisión de positróns, que permite medir non só a anatomía, senón tamén o metabolismo do órgano en cuestión. A. M. Cormack, enxeñeiro, foi galardoado co premio Nobel de Medicina no ano 1979.

2 A función densidade de electróns é unha función triplemente periódica, non negativa e con soporte moi pequeno, e é posible determina-los valores absolutos dos seus coeficientes de Fourier a partir de medidas experimentais. A partir disto, Hauptman foi quen de deduci-las fases das ondas a partir das intensidades na placa de raios X.

3 Existen moitas outras aplicacións da técnica de Radon, posiblemente non tan coñecidas nin de tanta repercusión popular. Por exemplo, a técnica de Radon utilízase en Oceanografía para determina-la temperatura dos océanos, o que non é algo intranscendente, xa que esa temperatura ten unha enorme influencia sobre o clima.



Imaxe do cerebro por resonancia magnética R.N.M. Os estudios de Cormack deron pé ó nacemento do TAC e posteriores modificacións.

Posiblemente unha das razóns polas que as Matemáticas chegaron a ser de tanta utilidade é que lograron romper coas súas barreiras internas. Téñase en conta que Henri Poincaré (1854-1912) foi, probablemente, o último matemático do que se podería dicir que tiña un coñecemento global das Matemáticas. O inmenso desenvolvemento acadado ó longo do século XX fai imposible que ninguén posúa hoxe tal coñecemento.

É un feito indiscutible que a Segunda Guerra Mundial pode considerarse como unha fronteira no avance da maioría das ciencias, e podemos falar dun antes e un despois dela, polo menos no tocante ás Matemáticas. Lamentablemente, a guerra foi desde sempre unha das motivacións máis importantes para o desenvolvemento de aplicacións en tódolos ámbitos da ciencia, e as Matemáticas non son alleas a esta influencia.

Nos Estados Unidos, durante a Segunda Guerra Mundial, os matemáticos con máis talento foron recrutados para traballar nos centros de investigación do Goberno, nas industrias de guerra, etc. Unha lista non exhaustiva das actividades nas que eses matemáticos estiveron directamente implicados inclúe, por exemplo, a aerodinámica, a hidrodinámica, a balística, o desenvolvemento do radar e do sonar, a fabricación da bomba atómica, a criptografía e a intelixencia militar, a fotografía aérea, a meteoroloxía, a investigación operativa, o perfeccionamento dos ordenadores, a econometría, os foguetes, a progresión de teorías de control, etc. Foron innumerables os investigadores de sona involucrados nestas e noutras moitas actividades, igual que moitos dos seus discípulos.

A explosión da bomba atómica sobre o Xapón e a posterior invención de novas bombas máis potentes, fixo que os físicos atómicos, que vivían nas súas torres de marfil académicas, experimentaran un fondo sentimento de culpabilidade, tamén estendido á comunidade matemática. As Matemáticas, que se consideraban a si mesmas como unha doutrina arredada, allea ás influencias e condicionamentos impostos ás outras ciencias polas realidades do mundo e libres da súa contaminación, mostráronse de súpeto como algo que tamén posuía a capacidade de producir un enorme dano. Algúns matemáticos comezaron entón a distinguir no seu traballo unha parte boa, a Matemática pura, e unha parte mala, a Matemática aplicada de calquera tipo que fose. De feito, algúns matemáticos, e con eles toda unha xeración de discípulos, abandonaron para sempre o estudio das aplicacións. Por exemplo, N. Wiener (1894-1964), que estivera involucrado na evolución de teorías de control, renunciou a todo apoio do Goberno ó seu traballo e dedicou o resto da súa vida a un “traballo bo”, en Biofísica, e ó activismo a prol dos dereitos humanos.

Despois da Segunda Guerra Mundial chegou a Guerra Fría e o inicio da carreira espacial. De novo, milleiros de matemáticos foron empregados nas actividades das industrias aeroespaciais, tanto nos Estados Unidos como na Unión Soviética; e algo semellante está pasando no momento actual co perfeccionamento teórico e industrial dos ordenadores.

A implicación das Matemáticas nas actividades que, directa ou indirectamente, gardan algunha relación coa guerra ten acadado tal grao de importancia que xa se teñen escoitado voces afirmando que, da mesma forma que a Primeira Guerra Mundial foi a guerra dos químicos, e a Segunda Guerra foi a dos físicos, a Terceira Guerra, que confiemos nunca se chegue a producir, será a guerra dos matemáticos. Quizais este sería un bo momento para lembrarlles ós científicos en xeral, e ós matemáticos en particular, a advertencia que os alquimistas facían ós seus discípulos: “Apartade os poderosos dos vosos laboratorios, pois abusan do sagrado misterio para poñelo ó servicio do seu poder egoísta”.

En definitiva, por unha ou outra razón, o feito certo é que as Matemáticas veñen caracterizándose nestes últimos tempos por unha tendencia á especialización en subcampos cada vez máis pequenos. Unha primeira consecuencia disto é que algúns destes subcampos están sendo explorados moi a fondo. Unha segunda consecuencia é que os matemáticos temos un enorme problema de comunicación entre nós mesmos. É innegable a persistencia desta fragmentación en pequenos subcampos[4] , pero os seus efectos negativos quedan paliados polo feito de que

4 O “Mathematics Subject Classification 2000”, publicado por Math. Reviews e Zentralblatt für Math., abrangue 63 áreas, 557 subáreas e 5031 sub-subáreas.

moitos problemas especialmente interesantes poden estudiarse agora desde unha perspectiva moito máis xeral.

OUTRAS APLICACIÓNS DAS MATEMÁTICAS

Do que levo dito ata agora, o meu lector podería deducir que a relación das Matemáticas con outras ciencias só se produce, ou polo menos fundamentalmente, coa Física. Tal conclusión, quizais válida antano, non sería correcta hoxe en día. As Matemáticas están a facer numerosas contribucións a moitas outras disciplinas, ó tempo que esoutras disciplinas propoñen tamén novos retos ás Matemáticas, con distintos tipos de problemas que levan a novas aplicacións, e así sucesivamente.

Un exemplo ilustrativo disto proporciónanolo o estudio da dinámica dos fluídos. O aparello matemático deste campo xira, fundamentalmente, ó redor das chamadas ecuacións de Navier-Stokes. Actualmente estas ecuacións estanse utilizando para estudiar unha incrible cantidade de fenómenos, como por exemplo a aerodinámica, a formación e comportamento dos furacáns, o fluxo sanguíneo no corazón, os fluxos a través de membranas porosas, a mestura do combustible nun carburador, a formación de cristais líquidos, o comportamento do plasma nun reactor de fusión, o movemento das galaxias, as correntes, as nubes, os ventos, etc. Esta lista, aínda que incompleta, pode dar unha idea de por qué tanta xente se interesa nestas ecuacións.

En particular, o estudio das turbulencias e do caos esperta un interese especial hoxe en día, tanto desde o punto de vista teórico como desde o práctico. O estudio do comportamento caótico, é dicir, desas situacións nas que pequenos cambios producen grandes efectos, é probablemente un dos aspectos das Matemáticas implicadas que atrae unha maior atención popular (lémbrese o terrible efecto que unhas poucas moléculas de clorofluorocarbonados producen no ozono da nosa atmosfera).

Algunhas outras áreas das Matemáticas, aínda que non moitas, certamente, teñen sido tamén utilizadas no pasado nas chamadas Ciencias da Vida, como ocorre por exemplo coa Estatística, se ben esa utilización se producía nun nivel non fundamental. Esta situación está cambiando. Gracias ás novas técnicas creadas en tempos recentes e á aparición dos ordenadores, a Matemática pode xa traballar coa complexidade dos organismos biolóxicos e contribúe dun xeito importante ó seu mellor coñecemento. A capacidade das Matemáticas para distinguir modelos e organizar información comeza a penetrar sistemas tan básicos como, por exemplo, as redes de neuronas. O desenvolvemento do escáner, xunto cos estudios sobre a dinámica dos fluídos, permitiu, por exemplo, a elaboración de modelos por ordenador do ril, do oído e do páncreas e os do corazón permitiron xa melloras no deseño das válvulas artificiais.

Hoxe, biólogos e matemáticos traballan xuntos no estudio dos mecanismos de duplicación do ADN. A denominada Teoría de Nós, que moi poucos matemáticos dubidarían en cualificar como pura, xunto coa Teoría de Probabilidades e a Combinatoria, axudan a que os biólogos comprendan mellor a complexidade da mecánica tridimensional nas cadeas do ADN.

¿E que dicir da Economía? As aplicacións das Matemáticas na Economía son tamén innumerables. O modelo do economista americano K. Arrow, premio Nobel de Economía, permite predici-lo comportamento dos mercados libres; o éxito deste modelo foi tal que se está producindo unha matematización do conxunto das ciencias económicas.

Na industria, a modelización por ordenador está a revolucionar todo dun xeito tal que aquelas industrias que non se adapten ó cambio corren o risco de quedar desfasadas. As melloras, tanto no *hardware* como na modelización matemática ou nos algoritmos implicados no *software*, fan avanzar estas aplicacións dunha forma extremadamente rápida. Un bo exemplo desta situación proporciónao o deseño dos microchips, que se realiza por métodos matemáticos utilizando a denominada Matemática discreta[5] . Outra área básica da Matemática, a Teoría de Corpos Finitos, atopou numerosas e importantes aplicacións na teoría de ordenadores e nas comunicacións[6] .

¿MATEMÁTICA PURA OU MATEMÁTICA APLICADA?

Hoxe en día estamos xa afeitos a falar de que hai que elixir entre investigación 'pura' ou investigación 'aplicada', dos Plans I+D, etc., e coido que tal disxuntiva é puramente artificial, polo menos en Matemáticas. De feito, unha gran parte do que se adoita chamar Matemática pura ten a súa orixe en investigación moi práctica, e reciprocamente. Nada impide que algún día, nun futuro quén sabe se moi próximo ou aínda moi distante, o traballo realizado nun contexto esencialmente 'puro', e por xentes visceralmente tan puras como o foi Hardy, retorne nun contexto de importante investigación práctica. E xa que a historia debe de

5 Unha tarefa estándar para comprobar placas con circuítos integrados consiste en mover un instrumento ó longo de centos ou milleiros de puntos no circuíto e realizar algunha tarefa ou proba en cada un deles. Cómo levar a cabo tal test no mínimo tempo posible é un caso particular do denominado "problema do vendedor", é dicir, determina-lo camiño para visitar tódolos vértices dun grafo de forma que tal camiño sexa de lonxitude mínima.

6 Por exemplo, un reto para as compañías telefónicas consiste en construír sistemas que sexan ó mesmo tempo eficientes e robustos; é dicir, que utilicen o menor número posible de liñas para conduci-las chamadas, pero que asemade as dean reconducido con rapidez e eficacia cando o sistema sofre unha sobrecarga. Matematicamente isto pode ser calculado mediante un grafo do que os vértices serían as centrais telefónicas implicadas e as arestas representan as liñas telefónicas entre as distintas centrais.

servirnos sempre como guía, non resulta aventurado pensar que as aplicacións máis importantes aínda están por chegar, e farano moi probablemente en áreas que non poderiamos nin imaxinar neste momento.

Penso que a forma más apropiada de describi-la relación entre a Matemática pura e a Matemática aplicada é consideralas como simbióticas; ningunha das dúas podería sobrevivir sen a outra. A Matemática aplicada necesita da pura para exerce-las súas funcións e acada-los seus obxectivos, e para que a Matemática pura non resulte estéril, sen sentido e morta, necesita da revitalización e o contacto coa realidade que só a Matemática aplicada lle pode proporcionar.

Paul R. Halmos, matemático puro 'militante', ó reflexionar sobre ámbalas Matemáticas, escribe:

> Comprende-lo mundo e, quizais, cambialo, é a motivación do matemático aplicado. Unha vez fixado un problema, as técnicas para resolvelo son elixidas e xulgadas en función da súa efectividade; e a satisfacción atópase de acordo co grao de coincidencia da solución obtida coa realidade e a súa utilidade para realizar prediccións. Pola contra, a motivación dun matemático puro é, con frecuencia, simplemente a curiosidade. A elección da técnica para resolver un problema está dictada, polo menos en parte, pola súa harmonía co contexto que o rodea, e a satisfacción é maior na medida en que a solución atopada amose conexións insospeitadas entre ideas ou conceptos que parecían moi distantes entre si.

Moitos matemáticos puros consideran a súa actividade como unha arte. Os matemáticos aplicados parecen considera-lo seu tema, ás veces, como unha simple sistematización de métodos. Moitos matemáticos puros cren que a Matemática aplicada non é outra cousa que unha bolsa chea de trucos, sen máis mérito que o feito de que eses trucos funcionan. Para moitos matemáticos aplicados a maior parte da Matemática pura merece ser descrita como unha abstracción sen máis sentido que o seu amor por si mesma e, polo tanto, sen mérito ningún.

Este clima de tensión entre Matemática pura e Matemática aplicada non é novo, nin tampouco é algo polo que debamos lamentarnos. De feito, esta tensión é unha fonte inesgotable de novas matemáticas; primeiro a teoría acada a práctica e logo a práctica conduce a unha nova teoría. Esta situación é algo tan vello coma a propia Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Cartan, H., "Nicolas Bourbaki and Contemporary Mathematics", *The Math. Intelligencer* vol. 2 (4) 1980, 175-180.

Casacuberta, C., e M. Castellet (eds.), *Mathematica Research Today and Tomorrow*, Lecture Notes in Math. 1525, Berlín, Springer-Verlag, 1992.

Halmos, P. R., *Selecta. Expository Writing*, Berlín, Springer-Verlag, 1983.

Kline, M., *Mathematics in the Western Culture*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1971.

____*Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI de España Eds., 1985.

Steen L. A. (ed.), *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Berlín, Springer-Verlag, 1978.

____*Mathematics Tomorrow*, Berlín, Springer-Verlag, 1981.