

NOVOS RECURSOS PARA O ENSINO DAS MATEMÁTICAS: XEOMETRÍA DINÁMICA*

Francisco Botana Ferreiro

Departamento de Matemática Aplicada
Universidade de Vigo

No ensino das matemáticas as computadoras e as calculadoras gráficas e programables despertaron —e ségueno a facer— unha considerable atención e interese. O obxectivo deste traballo é amosar unha nova clase de *software* de baixo custo e pequenas esixencias en *hardware* que ha ter no noso contorno unha significativa influencia no ensino da xeometría elemental.

1. INTRODUCCIÓN

A experimentación é un requisito imprescindible para a aprendizaxe. No desenvolvemento curricular de matemáticas pode lerse que “para construí-lo coñecemento matemático é indispensable a actividade concreta sobre os obxectos de estudio”. No estudio da xeometría a computadora facilita de xeito notable as manipulacións de obxectos.

Tanto no contorno Windows coma no Macintosh existe unha gran

variedade de programas para debuxar figuras bidimensionais. Ámbolos sistemas incorporan sinxelas ferramentas de debuxo como Paint e MacPaint. Sen embargo, estes programas, e aínda outros máis sofisticados, non resultan axeitados para o estudio da xeometría elemental ó non permitiren a manipulación directa das estruturas xeométricas. Consideremos, por exemplo, a tarefa de debuxa-la mediatriz dun segmento dado, usando Paint. A elección obvia é utiliza-las coordenadas ou arreda-lo uso do compás trazando elipses de excentricidade 0, como se mostra na FIG. 1. Ámbolos camiños esixen ter bo pulso e a maior sinxeleza e precisión do primeiro pérdense cando o segmento non é horizontal ou vertical. Ademais, posto que a mediatriz é un obxecto dependente do segmento, interesa que as transformacións experimentadas por este se transmitan a aquela, o que non acontece nos programas mencionados ou noutros semellantes.

* Este traballo foi parcialmente financiado cunha axuda do Vicerrectorado de Innovación Educativa e Estudiantes da Universidade de Vigo.

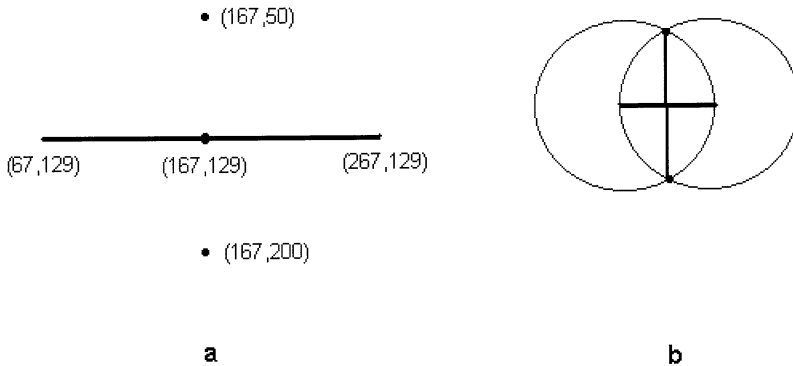


Figura 1. Construcción da mediatriz dun segmento: a) mediante coordenadas, b) simulando un compás.

Un sistema de manipulación de figuras xeométricas ten de construír e redebuxar directamente tales figuras, así como facer depender unhas doutras. Os programas de xeometría dinámica satisfán estas esixencias.

Na Sección 2 expóñense características xerais da xeometría dinámica e a configuración típica dun destes programas. Na Sección 3 lístase o *software* máis coñecido neste campo e descríbense sucintamente algúns destes programas.

2. XEOMETRÍA DINÁMICA

Nicholas R. Jackiw, deseñador dun programa de xeometría dinámica,

afirmaba nunha comunicación en novembro de 1994 á lista de xeometría dinámica do Forum do Swarthmore College (ver Sección 3) que “en esencia, a ‘xeometría dinámica’ non é un modelo matemático ben formulado do cambio, senón máis ben un conxunto de solucións heurísticas proporcionadas polos desenvolvedores de *software* e deseñadores de *interfaces* persoamáquina á pregunta de ‘cómo lle gustaría á xente que se comportase a xeometría nun universo dinámico’”.

O comentario de Jackiw non acerca moito a unha cabal comprensión da xeometría dinámica, pero isto é natural posto que non hai unha definición aceptada do campo do que estamos a falar. O cualificativo de “dinámica”

adxudicado a esta xeometría débese a unha nova característica, o arrastre (*dragging*): a capacidade de efectuar transformacións continuas nos obxectos xeométricos definidos, mantendo as relacións da construción orixinal.

En Abelson e diSessa (1980), estúdase a matemática implicada na xeometría da tartaruga e conclúese que é un sistema próximo á xeometría diferencial. Un achegamento semellante preséntase en Goldenberg e Cuoco (1996): para o estudo identifican os obxectos (puntos, liñas, círculos...) e as transformacións (reflexión, inversión...) da xeometría dinámica, e

buscan os teoremas derivados dos conxuntos anteriores. Con este enfoque faise claro que non se está a falar exactamente da xeometría de Euclides. ¿Como caracterizar matematicamente a transformación consistente en arrastrar un punto extremo dun segmento rotándoo ou dilatándoo, ou ámbalas cousas? En canto ás invariantes, consideremos outro aspecto: no estudio das proporcións en triángulos semellantes construíamos un triángulo ABC e un segmento DE paralelo a AC (Fig. 2). Se desprazámo-lo punto D ó longo do lado AB a razón BD/BE permanece constante, o que é un teorema euclidiano.

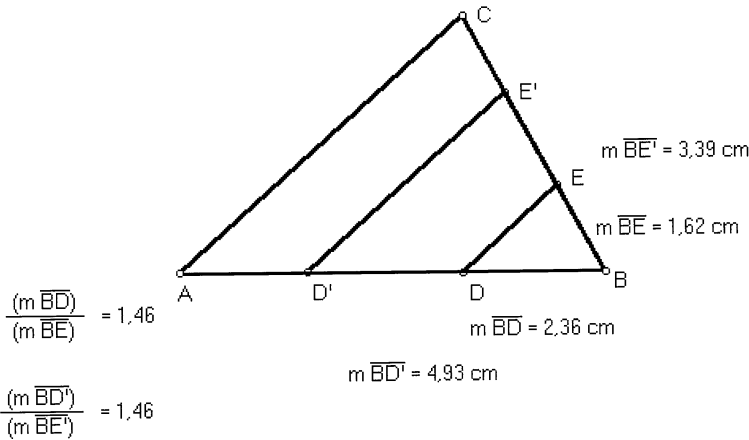


Figura 2. Invariancia dunha razón en triángulos semellantes.

Se desprazámolo punto A, como se amosa na Figura 3, a razón BD/BA tamén permanece constante, pero este feito xa non é un teorema euclidiano,

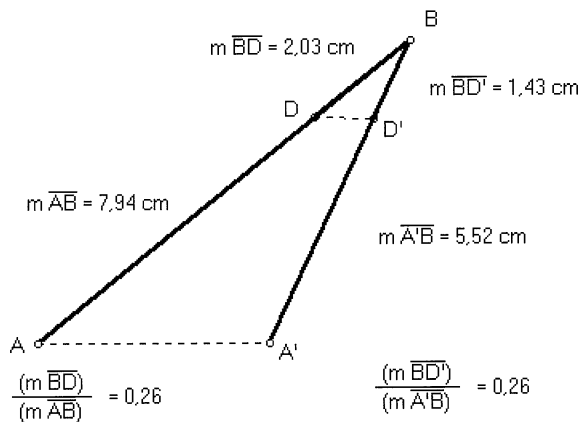


Figura 3. Invariancia dunha razón específica a un sistema.

Un programa xenérico de xeometría dinámica presenta unha folia de traballo onde se crean e manipulan os obxectos e as relacións entre eles. Nunha ou varias zonas da pantalla ofrécense menús de texto ou iconas, ou ámbolos dous, para selecciona-las tarefas que se desenvolverán. Estes menús poden dividirse en *a)* creación e construción (Figura 4), cos que se definen os obxectos elementais (punto, segmento, semirecta, triángulo, círculo...) e se constrúen outros a partir destes (mediatriz, bisectriz, paralela, perpen-

dicular...), *b)* edición e xestión, ben da computadora (tarefas de impresión, salvagarda de arquivos...), ben tarefas específicas do programa (redefinición de menús, etiquetaxe de obxectos, zoom, (de)selección de obxectos, animación, mostrar/ocultar obxectos, elección de unidades e aspectos...), *c)* medir e calcular (Figura 4) e *d)* contido mixto, onde hai que resaltar dúas cuestións: a posibilidade de incorpora-las construcións realizadas ó programa, de xeito que se eliminen os pasos intermedios, e a utilización da recursión.

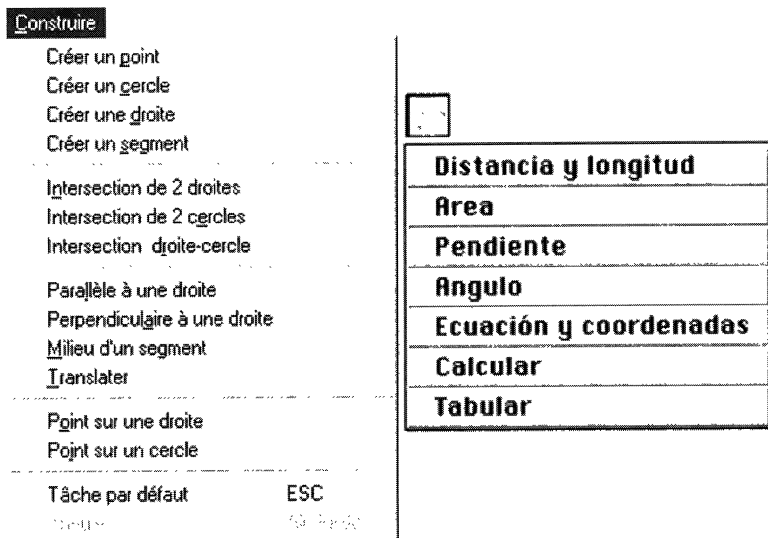


Figura 4. Menús de construción de Calques2 (esquerda) e medir e calcular de Cabri (dereita).

3. SOFTWARE DE XEOMETRÍA DINÁMICA

Existe hoxe unha ampla oferta de programas de xeometría dinámica. A continuación listanse, en orde alfabética, algúns deles. Por mor dos sistemas cos que traballo (Unix e Windows) e cos que penso que o fai a maioría dos lectores, referireime fundamentalmente a ferramentas baixo Windows, mencionarei os complementos para Macintosh cando os haxa e omitirei as que só existen baixo Unix. Non se fala pois de Geometer de Silicon Graphics nin doutros produtos desta especializada empresa.

3.1. Cabri-Géomètre

Le Géomètre, le CAhier de BRouillon Interactif pour un nouvel apprentissage de la géométrie (Baulac, Bellemain e Laborde, 1994), que deu no acrónimo Cabri, foi desenvolvido a partir de 1985 por Jean Marie Laborde, Philippe Cayet, Yves Baulac e Franck Bellemain no Laboratorio de Estructuras Discretas e de Didáctica do Instituto de Informática e Matemática Aplicada (IMAG) da Universidade Joseph Fourier de Grenoble e presentado no VI Congreso Internacional de Educación Matemática celebrado en Budapest no 1988.

Cabri é un dos primeiros programas de xeometría dinámica, probablemente o máis coñecido e utilizado en Europa. Aplicado inicialmente a máquinas Apple, portouse logo a PC, baixo MS-DOS. A versión 1 estivo no mercado dende 1987. Cómpre sinalar que a Generalitat de Cataluña, a través do seu Programa de Informática Educativa, distribuíu nos seus centros de ensino a versión 1.7 traducida ó catalán. Os contactos entre o IMAG e Texas Instruments, a partir de 1989, fructificaron na versión 2, CABRI Geometry (FIG. 5), distribuída dende 1995, e na calculadora TI-92, que contén Cabri e Derive (The Soft Warehouse, 1991).

No sitio Web <http://www-cabri.imag.fr> pode atoparse cumprida información sobre este programa (referencias, histórica, telecarga dunha versión de avaliación para PC ou Mac en inglés, francés ou castelán, subscripción á interesante lista cabri-forum-imag.fr,...). Outra fonte de información sobre Cabri, de carácter comercial, enfocada principalmente á TI-92, é <http://www.ti.com/calc/docs/92.htm>.

De Cabri hai que sinalar que foi un dos primeiros programas en incorporar macroconstrucións, procedementos automatizados que constrúen obxectos finais baseados en obxectos iniciais. Sen embargo, na utilización dunha *macro* non poden ser recreados polo usuario os obxectos intermedios,

o que sería unha opción interesante. A capacidade de proba neste sistema é pobre e está reducida á comprobación de propiedades como aliñación, paralelismo, pertenza, etc. Tamén é salientable a utilización rudimentaria da linguaxe natural: seleccionada unha ferramenta, por exemplo crear un punto nun obxecto, e apuntando un obxecto para o que a ferramenta teña sentido, por exemplo unha curva, aparece un texto, "Neste *obxecto*", que reforza a comprensión da operación. Quizais isto compense a pobreza da axuda en liña, limitada a un máximo de tres liñas na parte inferior da pantalla.

3.2. Calques

Calques Géométriques, unha ferramenta para Windows 3.1 e 95, na súa versión 2 (Figura 6) foi presentada polo seu autor, Philippe Bernat, do Centro de Investigación Informática da Universidade Henri Poincaré en Nancy, no VIII ICME celebrado en Sevilla en 1996 (Bernat, 1996). Xunto con Cabri é amplamente utilizada no ensino secundario francés. Ofrece facilidade de macroconstrucións e recursividade. Na páxina Web do autor, <http://www.loria.fr/bernat/bernat.htm> 1, ofrécese versións demo Calques2 (en francés) e mais dun paquete irmán de axuda ó razoamento en xeometría Chypre (en francés ou inglés).

Mentres que conceptualmente Calques non achega novidades

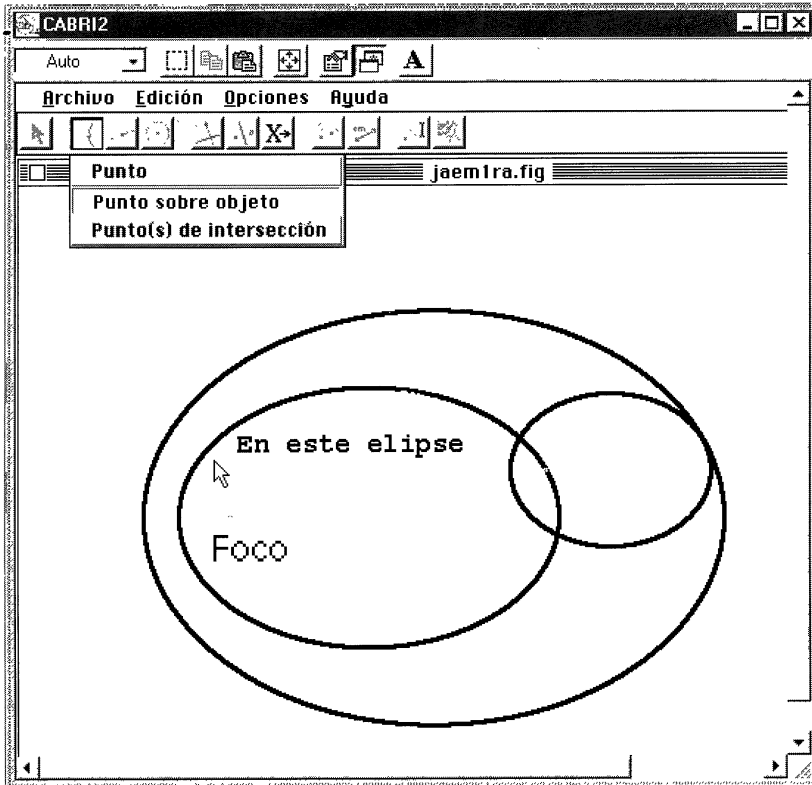


Figura 5. Simulación en Cabri do avance dunha fronte de onda segundo o principio de Huygens.

substanciais, Chypre é unha interesante contribución no eido da demostración semiautomática en xeometría.

3.3. Cinderellas Café

En <http://www.cinderella.de> preséntase un contorno de aprendizaxe da xeometría aplicado en Java. A indepen-

dencia da plataforma que supón Java e a xeneralización do acceso a Internet fan presumir que este tipo de ferramentas acadarán de contado grandes cotas de utilización. Tanto en Cabri (<http://www-Cabri.imag.fr/apropos/index-e.html>, <http://www-Cabri.imag.fr/Preuve>) coma en The Geometer's Sketchpad (<http://www.edc.org/LTT/ConnGeo/CP.html>,

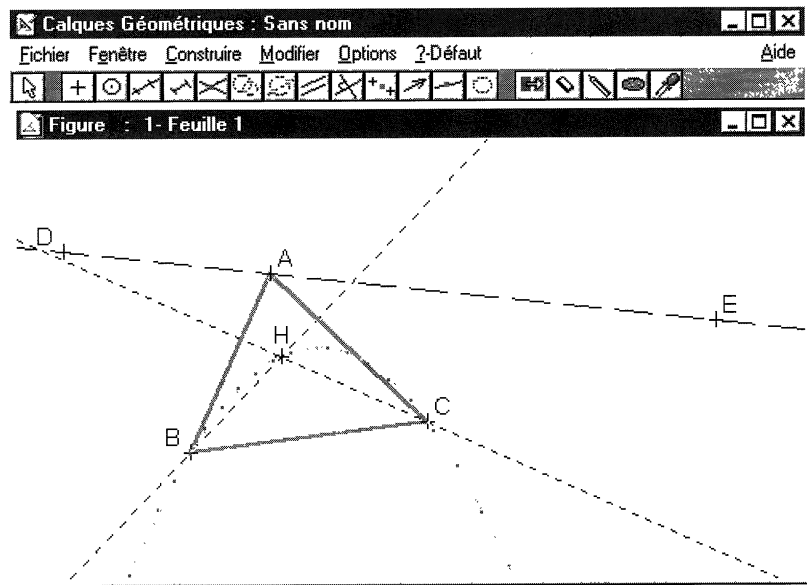


Figura 6. Trazado do lugar xeométrico do ortocentro dun triángulo cando A se move por DE.

http://forum.swarthmore.edu/dynamic/java_gsp/jsp_home.htm) estanse a facer grandes esforzos por estimular a xeometría interactiva na rede mediante o uso de *applets*.

Os autores, Juergen Tichter-Gebert e Ulrich Kortenkamp, da Universidade Técnica de Berlín, ofrecen unha versión test do Café e anuncian versións completas para finais de 1997. Na Figura 7 pode verse o menú da aplicación (que é o único en inglés) e na FIG. 8 as visións plana e esférica dunha construción relativa a unha cónica.

O Café incorpora un sistema automático de demostración que, sen ser completo, permite a verificación de proposicións sinxelas. A traza das demostracións visualízase na consola Java do navegador.

3.4. Euklid

Unha ferramenta *shareware* distribuída vía Internet é Euklid (<http://home.tonline.de/home/roland.mechling>). A versión actual, de 16 bits, está en inglés e alemán. Ten as funcionalidades xerais de tódolos programas

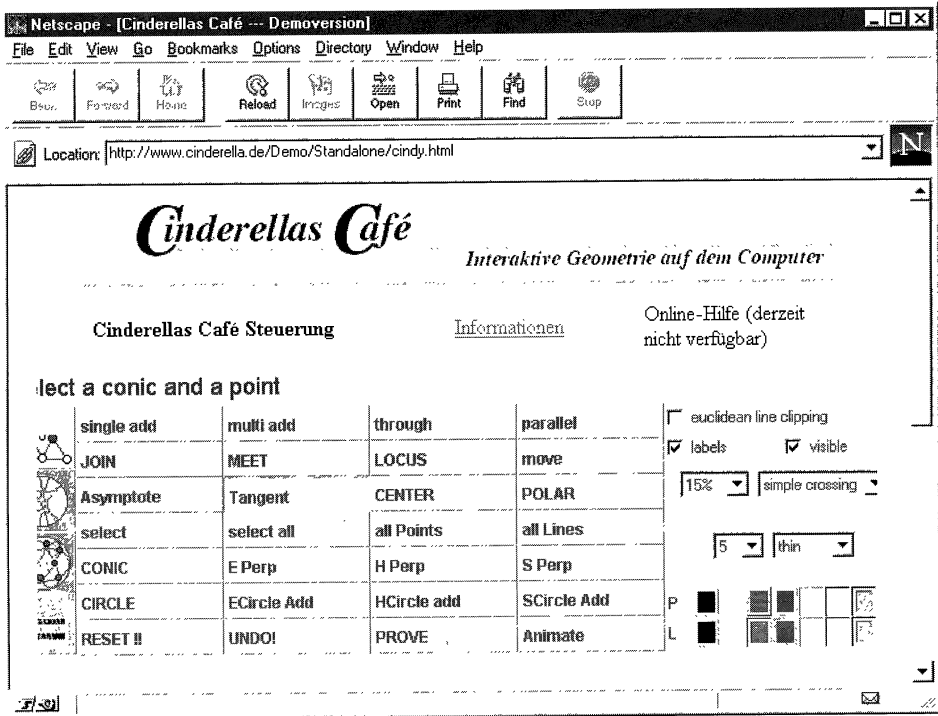


Figura 7. Menú Cinderella's Café.

comentados. Unha sinxela construción preséntase na Figura 9.

3.5. The Geometer's Sketchpad

Xunto con Cabri, The Geometer's Sketchpad, GSP, (Jackiw, 1995) é o programa máis coñecido e utilizado, principalmente na área anglosaxona. Existen versións (3.0x) para Windows e Macintosh, das que se poden telecarregar demos en

<http://forum.swarthmore.edu/dynamic.html> ou no sitio Web da empresa que o comercializa, cun servidor moi lento, <http://www.keypress.com/>.

O GSP foi deseñado por N. Jackiw e naceu como parte dun proxecto de investigación no Swarthmore College. Máis tarde chegou Key Curriculum Press, onde se está a facer principalmente o desenvolvemento actual do programa.

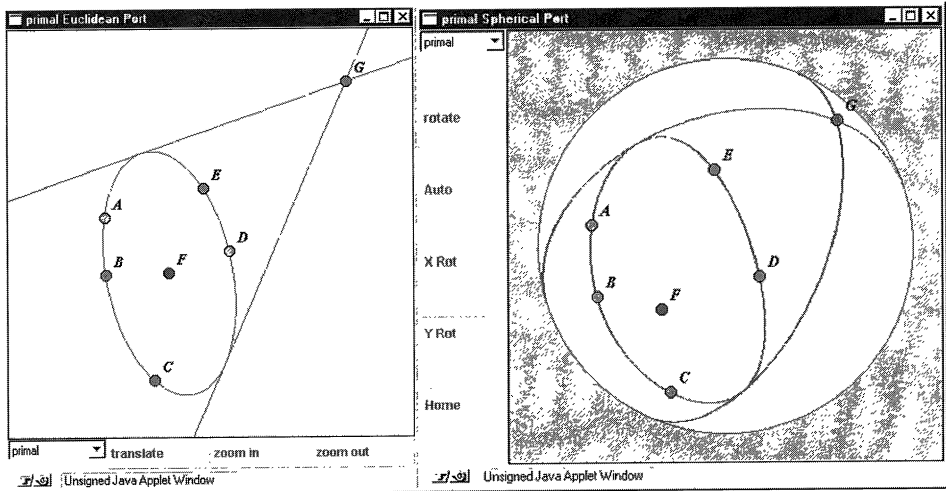


Figura 8. Visións plana e esférica do centro e tanxentes dunha cónica.

As macroconstrucións de Cabri chámanse aquí *scripts*, que poden ser executados paso a paso e ser recursivos. Na FIG. 10 pode verse un *script* para a construción do círculo dos nove puntos.

Unha diferenza entre Cabri e GSP formula cuestións pendentes de investigación de cara a determina-la súa importancia na aprendizaxe: en GSP (tamén en Euklid e Calques) é necesario ter seleccionados os obxectos pertinentes para poder efectuar unha construción; pola contra en Cabri primeiro hai que escolle-la construción e logo selecciona-los obxectos. Por exemplo, para construí-la

perpendicular a un segmento nun punto en Cabri hase selecciona-la ferramenta "Recta Perpendicular" e logo, co cursor, apuntar a un segmento (aparece o texto "Perpendicular a este segmento") e a un punto ("Por este punto") ou a un obxecto que conteña puntos ("Deste círculo"). En GSP hai que ter seleccionado un punto e un segmento para poder executar "Liña perpendicular", pero se ademais está seleccionado outro punto, entón trazaranse dúas perpendiculares, o que non se pode facer nun só paso en Cabri.

En GSP tamén hai unha intensa actividade cara á interacción na rede e

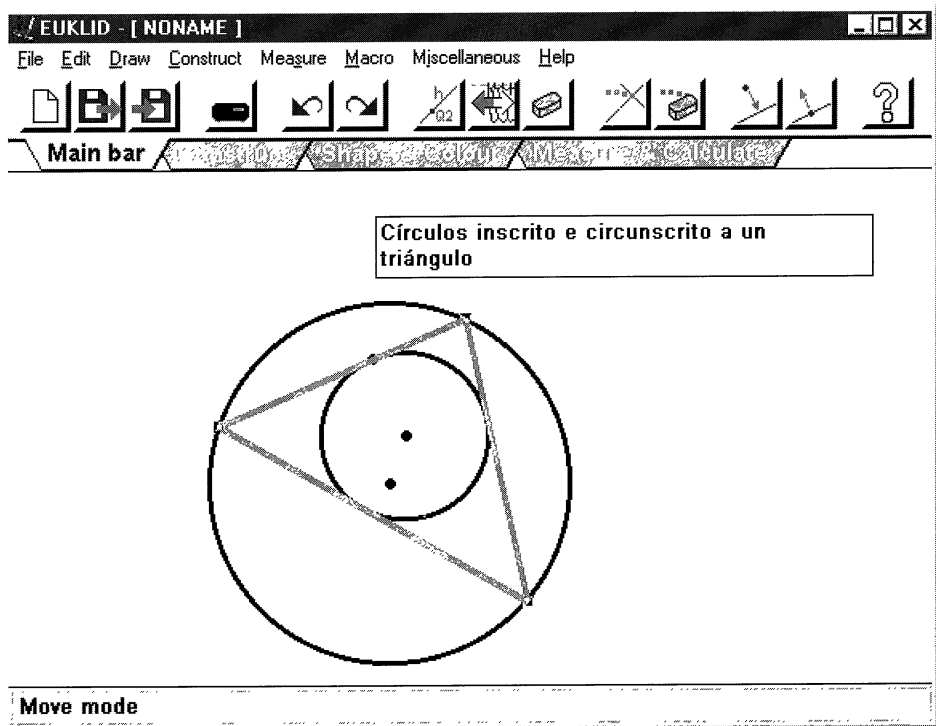


Figura 9. Pantalla de traballo de Euklid.

a utilización de Java. Un moi extenso almacén de información concernente á xeometría dinámica, con especial énfase en GSP, é o Forum de xeometría do Swarthmore College, en <http://forum.swarthmore.edu>, onde tamén se administra a lista geometry-software-dynamicforum.swarthmore.edu, que xunto coa mencionada sobre Cabri constitúen referencias imprescindibles para manterse informado dos avances neste campo.

3.6. Outros programas

Ademais dos citados, outros programas de xeometría dinámica que paga a pena citar son: Geometry Inventor (Brock *et al.*, 1994), SuperSupposer (Schwartz e Yerushalmy, 1992), Geoblock (Hidaka, 1995) e o único que coñecemos feito en España, Geomouse (Castañeira, 1992).

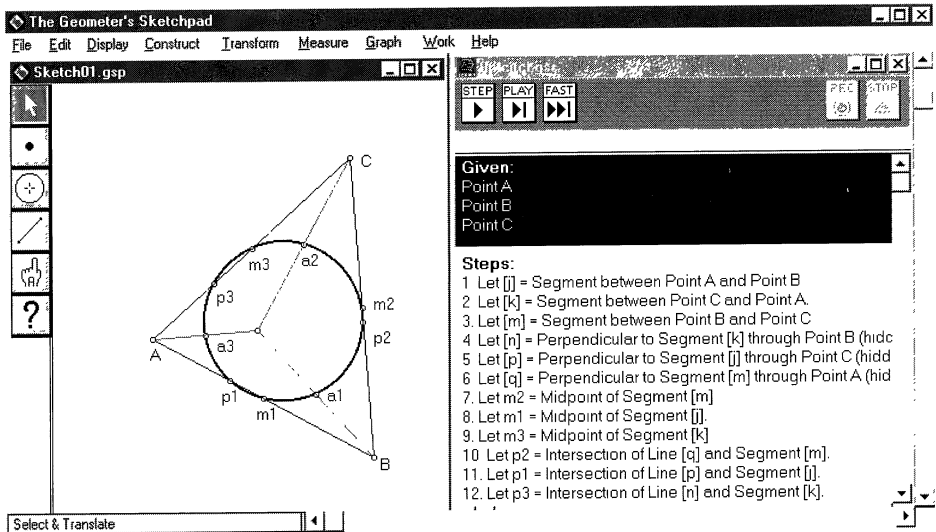


Figura 10. Script en GSP para a construción do círculo dos nove puntos.

4. CONCLUSIONES

Presentamos unha exposición acerca dun novo paradigma para o ensino interactivo da xeometría: os contornos de aprendizaxe baseados na computadora coñecidos como xeometría dinámica. A cualificación de dinámica xorde da capacidade de arrastre dos obxectos xeométricos construídos.

Coméntanse algúns dos programas máis coñecidos, así como novas propostas experimentais deste tipo de soporte lóxico. Dos programas citados danse as referencias necesarias para experimentar con eles na computadora, de xeito que se faga realidade o concepto de interacción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abelson, H., e A. diSessa (1980): *Turtle Geometry*, Cambridge, MA, MIT Press.
- Baulac, Y., F. Bellemain, e J. M. Laborde (1994): *Cabri II*, Dallas, Texas Instruments.
- Bernat, P. (1996): "Using Dynamic Geometry Environments for Problem Solving, *Actas del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática*, Sevilla, 1996 (aparecerá).
- Brock, C. F., e outros (1994): *Tangible Math: Geometry Inventor*, Cambridge, MA, Logal Educational Software and Systems.
- Castiñeira, J. (1992): *Geomouse. Manual de Referencia*, Madrid, MEC.

- Goldenberg, E. P., e A. Cuoco (1996): "What is Dynamic Geometry?", en R. Lehrer e outros (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- Hidaka, K., (1995): "Development of GeoBlock: a Micro-World for Learning and Teaching Geometry", *Lecture Notes in Computer Science*, 602, pp. 294-306.
- Jackiw, N. R. (1995): *The Geometer's Sketchpad, v3.0*, Berkeley, CA, Key Curriculum Press.
- Schwartz, J., e M. Yerushalmy (1992): *The Geometric SuperSupposer*, Pleasantville, NY, Sunburst Communications.
- The Soft Warehouse (1991): *Derive*, Honolulu, HA, The Soft Warehouse.

