ARTÍCULOS

*Ideología, Matemáticas y Ciencias Sociales: V. Pareto, G. Sorel y la ambigüedad en la comparación de las desigualdades **

MARC BARBUT
École des Hautes Études en Sciences Sociales,
Centre d'Analyse et de Mathématique sociales
Universidad de París Sorbonne (París IV)
cams@ehess.fr

1. INTRODUCCIÓN

En 1896-97, se establece una controversia de alto contenido científico, y siempre con una gran cortesía, entre V. Pareto y G. Sorel. El primero acababa de publicar su *Cours d' économie politique*, y el segundo hace la crítica del capítulo del «*Cours*» dedicada a la curva de las rentas. A priori, ambos autores estaban hechos para entenderse. Sus vidas presentan, en todo lo que concierne a su formación e intereses intelectuales, un gran paralelismo, tan sólo les separaba la ideología.

Vilfredo Pareto (1848-1923) estaba titulado por la Escuela de Ingenieros de Turín, donde había terminado sus estudios con una tesis de matemáticas. Ejerció inmediatamente la profesión de ingeniero en la industria ferroviaria, para pasar a orientarse hacia la carrera universitaria durante los años 1890. Titular de la cátedra que deja vacante Leon Walras en la universidad de Lausanne, está considerado un economista liberal, además de uno de los principales promotores de la matematización de la ciencia económica. Comienza a enseñar sociología en la misma universidad, donde demuestra un creciente interés por la disciplina que va a cristalizar en un gran tratado de sociología general en 1916 (Trattato di Sociologia generale).

G. Sorel (1847-1922) es, con la escasa diferencia de un año en las fechas de nacimiento y muerte, totalmente contemporáneo. Había pasado por la Ecole

* Versión francesa: «Vilfredo Pareto, sa loi de repartition et refèrence revenus et le débat sur la comparación des inegalités (1896-1920)», en Histoire des Sciences Sociales. Mèlanges en l'honneur de Giovanni Busino sous la direction de Mohamed Cherkaoui. Ginebra, Droz, 2003. Agradezco a José M.ª Arribas la traducción del texto francés. Marc Barbut.

Polytechnique de Paris, y había mantenido, como veremos, una acusada afición por el cálculo. Ejerce hasta 1892 la profesión de ingeniero de caminos y abandona su carrera para convertirse en economista y sociólogo, pero a diferencia de Pareto que ejerce dentro de una institución universitaria, Sorel lo hace como publicista independiente y socialista revolucionario. En este contexto, publica en 1903 su introducción a la economía (*Introduction à l' economie moderne)*, en 1908, sus célebres reflexiones sobre la violencia (*Reflexions sur la violence)* y en 1919, los materiales para una teoría del proletariado (*Materiaux pour une théorie du proletariat*).

Última característica común a estos dos personajes a la vez paralelos y divergentes, es la influencia que tanto uno como otro ejercieron sobre el fascismo italiano. Pareto, a través de la sociología: es sabido que Benito Mussolini mientras estuvo exiliado en Suiza, siguió los cursos de Pareto en Lausanne durante los años 1902-1904, y debió de llevarse una gran impresión, porque una vez que el fascismo toma el poder en 1922, le ofrece un cargo de senador. Oferta que fue rechazada por Pareto. Sorel, a su pesar, influye en el fascismo a través de su teoría de la acción violenta, aunque en su concepción, la violencia debería conducir a la instauración del socialismo.

El objeto del debate sobre las desigualdades en el reparto de la renta era, sobre todo, conocer la tendencia, es decir, si la desigualdad había disminuido o aumentado. Pareto va a sostener, como lo haría cualquier hombre de «derechas», que las desigualdades han disminuido. Sorel, que milita en el socialismo y en la distribución de la riqueza, quiere demostrar, por el contrario, que las desigualdades aumentan, lo que por otra parte es una posición normal entre los hombres de «izquierda». Las ideologías de ambos personajes, a pesar de las evidencias del cálculo al que uno y otro presumen de someterse, expresan dos puntos de vista irreconciliables. Dos citas nos dan una idea de este antagonismo:

> «*En nuestra época, hemos podido observar esta disminución (de las desigualdades) porque, gracias a los descubrimientos que se han hecho en las ciencias, el arte y la industria, la riqueza ha experimentado un crecimiento que ha sido más considerable y más rápido que la destrucción debida al proteccionismo aduanero, los robos de los políticos y el socialismo de Estado*» (Pareto, 1964, 325).

Cita de la que Sorel se hace eco:

> «*Ciertamente, el objetivo del impuesto progresivo sería un completo fracaso si se propone mejor repartir la riqueza por la vía de la autoridad: esta opinión solo puede ser sostenida por ignorantes, diputados radicales o profesionales de la sociología*». (Sorel, 1897, 598)

El tono es vivo; la última alusión se refiere probablemente al mismo Pareto, pues en esta fecha, julio de 1897, Vilfredo Pareto lleva ya tres meses enseñando sociología.

Esbozado el plano ideológico de la discusión, entramos en el debate.

2. EL DEBATE PARETO-SOREL

Es en los párrafos 964 y 965 (pp. 318-325) del *Cours* de Vilfredo Pareto, (1896, libro III, capítulo primero: la curva de las rentas) donde Pareto aborda la cuestión de la desigualdad en la distribución de las rentas o de los patrimonios. No obstante, queremos hacer dos precisiones previas:

1. Pareto no se aferra a una definición absoluta del concepto de desigualdad, sino que como casi todos los economistas contemporáneos, utiliza una definición relativa: ¿cuándo podemos decir que la desigualdad ha aumentado o ha disminuido?
2. Bien entendido que, en lo que concierne a los factores que pueden acarrear estas variaciones, hará siempre referencia a su celebre ley de reparto de las rentas y a los parámetros de la que depende.

Recordemos lo que es esta ley en su forma más simple (primera ley de Pareto) , pues ello será suficiente para comprender su forma de razonar, y nos permitirá seguir mejor los cálculos. Lo que afirma la «ley de Pareto», es que aproximadamente, las rentas superiores a un valor dado x están en proporción $P(x)$:

(1) $$P(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^a, \quad \alpha > 0, x \geq x_0$$

El exponente a está comprendido entre 1 y 2 en todos los casos estudiado empíricamente por Vilfredo Pareto, y es, como veremos, el parámetro esencial para la discusión que presentamos a continuación. En cuanto a x_0, Pareto lo define como la renta mínima de la distribución estudiada; tenemos, en efecto $P(x_0)=$ 1, lo que significa que todos los ingresos son superiores a x_0. Veremos posteriormente que es necesario interpretar esta definición.

Planteados esos preliminares, veamos ahora algunas definiciones que Pareto da (hay, al menos, tres) de la disminución de *desigualdad.*

En la página 320, 964 del Curso, encontramos dos en solo unas líneas de distancia (aquí soy yo quien subraya ciertos términos).

D. I): «*La **disminución** de esta desigualdad será, por tanto, **definida** por el hecho de que el **número** de **pobres** va **disminuyendo** en relación al número de ricos, o lo que es igual, en relación al número total de miembros de la sociedad. Es este el sentido que parece haber prevalecido, es por tanto el que nosotros adoptaremos*».

Cuatro líneas más abajo vemos otra definición:

D. II): *«En general, mientras que el número de personas que tienen una renta inferior a x aumenta en relación al número de personas que tienen una renta superior a x, diremos que la desigualdad de la renta **disminuye**»*.

Estas dos definiciones parecen *a priori* contradictorias porque de forma lapidaria, podrían formularse así:

I: Cuantos menos pobres, menos desigualdad.
II: Cuantos más pobres, menos desigualdad.

Pareto debió de sentir esa contradicción porque añade comentarios a cada una de las definiciones:

> «*....hay que resignarse a no enfrentarse demasiado a los prejuicios dominantes*» (comentario a I)
> «*....con estos términos, queremos indicar simplemente esto y nada más*» (comentario un tanto oscuro de II)

En cualquier caso, veamos a través de un simple cálculo, cuales son las implicaciones lógicas de cada una de las dos definiciones. Cálculo que, por otra parte, nunca llegó a realizar Pareto, pues el que realiza (párrafo 965, p. 320) es mucho más complicado y no facilita ninguna conclusión evidente.

Comencemos por la definición II: según la ley de Pareto (1), la proporción de personas que tienen rentas inferiores a x viene dado por

$$1-P(x)=1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^a$$

Su relación con las personas que tienen rentas superiores a x, viene dado por

$$\frac{1-P(x)}{P(x)}=\frac{1}{P(x)}-1=\left(\frac{x}{x_0}\right)^a-1 \tag{2}$$

Como x es por definición superior a x_0, la razón $\left(\frac{x}{x_0}\right)$ es superior a 1, y aumenta para un valor fijo de x, si x_0 *disminuye*. En $\left(\frac{x}{x_0}\right)$, para valores de x y x_0 dados, la razón aumenta mientras que el exponente a va en aumento.

Según la definición II, es porque la relación (2) aumenta, que la desigualdad disminuye; lo que se produce cuando x_0 disminuye, o α aumenta. Para *disminuir la desigualdad*, hay que *rebajar el mínimo* x_0 (y no aumentarlo como Pareto dirá más tarde), o *aumentar el exponente* α (y no disminuirlo, como afirmara siempre nuestro autor).

Que pasa ahora con la Definición I? Contrariamente a II, utiliza los términos «pobres» y «ricos». Es por tanto, el sentido de estos términos, lo que Pareto no define en ningún momento, lo que hay que aclarar antes que nada.

Un primer procedimiento, a veces utilizado por los economistas, consiste en fijar un cierto umbral x de la renta (el «umbral de la pobreza») en virtud del cual se es «pobre», y más allá del cual, se es considerado «rico». Debería, no obstante, decirse «no pobre», pues lo que hace Pareto en la definición I es la asimilación a ricos de los «no pobres», ya que la razón entre el número de pobres y el «número de ricos», o lo que es lo mismo, la razón con el número total de miembros de la sociedad...», es para él en la primera definición, el indicador del mayor o menor grado de desigualdad. Solamente para esta primera definición, cuando esa razón *disminuye*, la desigualdad aumenta, lo que según hemos visto, está en completa contradicción con la definición II.

Pareto no define en ningún momento el sentido que da a los términos «pobres» y «ricos», acabamos de ver un primer sentido posible que descansa sobre un umbral de pobreza fijo, pero que hace las definiciones I y II, incompatibles una con otra.

Felizmente, hay otras maneras de definir «el umbral de pobreza». La que adoptan generalmente los economistas, consiste en decir que son «pobres» todos aquellos que tienen una renta inferior a cierta fracción λ fijada ($0<\lambda<1$) de un «valor central» (tal como la media, la moda o la mediana) de la distribución de rentas.

A menudo, el valor central adoptado es la renta mediana μ, y el umbral de pobreza es la mitad de este (i.e., $\lambda = 1/2$).

Para la ley de Pareto (1), la mediana se calcula fácilmente y vale:

$$\mu = x_0 \; 2^{1/\alpha} \tag{3}$$

Para un valor dado de λ, los «pobres» son entonces, aquellos cuyas rentas están comprendidos entre el mínimo x_0, y el umbral $\lambda\mu = \lambda\, x_0 \; 2^{1/\alpha}$. Todavía hay que elegir λ de manera que él solo sea superior al mínimo, es decir que

$$\lambda\, x_0 \; 2^{1/\alpha} > x_0\,, \quad \text{i.e.} \quad \lambda\, 2^{1/\alpha} > 1 \tag{4}$$

Como $\alpha>1$, esta relación (4) no podrá ser realizada más que para $\lambda>1/2$, y estando definido λ, por los valores de α comprendidos entre 1 y α_0 de modo que $\lambda\, 2^{1/\alpha_0} = 1$, es decir:

$$\alpha_0 = \frac{L2}{L(1/\lambda)}, \text{ donde L es el logaritmo}$$

En particular, para $\lambda \leq 1/2$, no hay «pobres» según la primera ley de Pareto (1) Esto muestra que esta distribución no está adaptada para dar cuenta de débiles ingresos; como hemos dicho más arriba, x_0 no debe ser interpretado como la renta mínima en la población, sino como un valor más allá del cual el ajuste de las rentas observadas en la ley de Pareto es lícito. Pareto, por otra parte, jamás dijo otra cosa.

Elegiremos entonces un λ superior a 1/2. El exponente α deberá estar, por tanto, comprendido entre 1 y α_0; para $\lambda = 60\%$, $\alpha_0 = 1{,}36$; y para $\lambda = 75\%$, $\alpha_0 = 2{,}41$; α_0 vale 2 para $\lambda = 71\%$.

Sea por tanto $\lambda \left(> \frac{1}{2}\right)$ el valor que retengamos para definir el umbral de la pobreza. La razón entre el número de «pobres» y el de «ricos según Pareto», es decir, los que ha considerado no pobres, es igual a:

$$\frac{1 - P(\lambda\mu)}{P(\lambda\mu)} = \frac{1}{P(\lambda\mu)} - 1 = 2\lambda^{\alpha} - 1 \tag{5}$$

En efecto, de acuerdo con (1) y (3):

$$P(\lambda\mu) = \left(\frac{x_0}{\lambda\mu}\right)^{\alpha} = \left(\frac{x_0}{\lambda x_0 2^{1/\alpha}}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2\lambda^{\alpha}}$$

Hay que señalar que en (5), el «mínimo» x_0 no interviene más; la variación de la desigualdad no depende más que de α.

O, como λ positivo es inferior a 1, λ^{α} *decrece* mientras que α aumenta; mientras α crece de 1 à α_0, la razón (5) entre pobres y ricos *disminuye* de 2λ - 1 a 0.

La definición I tiene, por tanto dos consecuencias:

— La desigualdad no depende de la renta «mínima» x_0;
— La desigualdad disminuye mientras que el exponente α aumenta.

La segunda de estas conclusiones está de acuerdo con la que nos facilitaba la definición II; en una como en otra, es el crecimiento de α lo que representa una disminución de la desigualdad. Pero esto, con la condición de haber definido convenientemente el umbral de la pobreza.

Podríamos ir más lejos, y definir, no solo un «umbral de pobreza», sino definir también un «umbral de riqueza», que podría ser un múltiplo λ' de la renta media. Esto evitaría la asimilación de los «no pobres» a los «ricos». En estas condiciones, la razón entre el número de pobres y el de ricos, con $0 < \lambda < 1 < \lambda'$, sería:

$$\frac{1 - P(\lambda\mu)}{P(\lambda'\mu)} = (2\lambda^{\alpha} - 1)\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{\alpha} \tag{6}$$

Según los valores elegidos para λ' y λ, la variación de (6) en función de α no es necesariamente monótona; en tanto α crece de 1 a α_0, o bien como anteriormente, la razón (6) decrece constantemente y se anula por $\alpha = \alpha_0$; o bien, comienza por crecer, después decrece hasta 0. ¡La cuestión se complica!

Pero volvamos a las definiciones I y II. Para cada una de ellas, el fenómeno es el mismo: se trata de un crecimiento del exponente α que induce una disminución de la desigualdad, contrariamente a la afirmación (¿la convicción?) constante de Pareto: «...la disminución general de la desigualdad de la renta e produce cuando… α decrece...» (Pareto, 1964, 322)

Como es posible que Pareto haya podido cometer tal error? Probablemente, y entre otras razones, porque él tenía en la cabeza la forma de curva representativa de la proporción *P(x)*, esta forma en «peonza», según su expresión (figura 1).

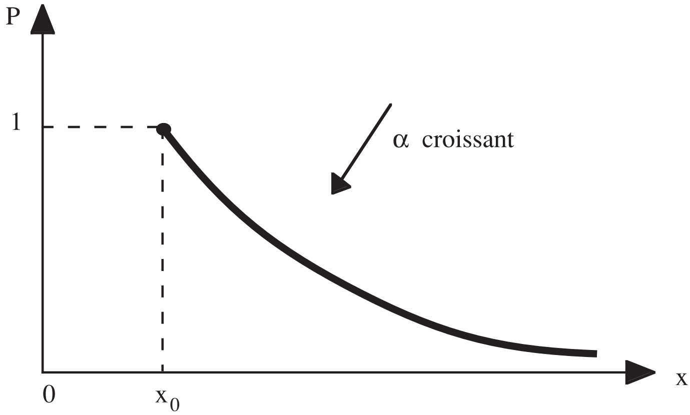

FIGURA 1

Para cada valor de x que tomemos en la abscisa, como $\left(\frac{x_0}{x}\right)$ es inferior a 1, $\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$ (es decir P) disminuye porque x aumenta: la «peonza» está, por tanto, cada vez más «curvada»; visualmente, su forma da la impresión de algo cada vez más «desigual».

Pero esto no es nada, pues se ve muy bien que α tiende hacia el infinito. Como límite tenemos una función (figura 2) que hoy se llama de Dirac:

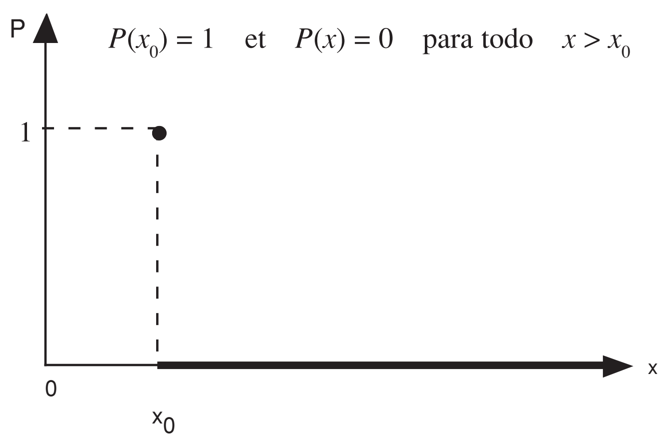

FIGURA 2

Esto significa que todas las rentas son iguales al mínimo x_0: es la equidistribución, la igualdad más grande posible, la ausencia total de desigualdad.

Volvamos ahora a la tercera definición de Pareto sobre la disminución de la desigualdad, pues la introduce en el párrafo 965, pp. 322-323, sin señalar que se trata de otra definición que no es equivalente a ninguna de las dos primeras.

D.III): «*si el total de la renta aumenta en relación a la población, es debido* ***necesariamente*** *a que la renta mínima aumenta, o a que la* ***desigualdad de la renta disminuye****, o que estos dos efectos se producen simultaneamente*»

En otras palabras, la desigualdad disminuye considerablemente cuando la renta media aumenta. Afirmación muy azarosa, porque un crecimiento de la renta media puede muy bien corresponderse con un crecimiento exclusivo de las rentas altas. ¿Quien diría en este caso que la desigualdad disminuye?

¿Pero que muestra el cálculo? Según la ley (1) de Pareto, la media m_0 de las rentas se calcula fácilmente y vale

(7) $$m_0 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_0 = \beta x_0, \text{ (en esta relación } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Es cierto que m_0 aumenta con x_0. Al contrario, el coeficiente β decrece de +° a 1 cuando α crece de 1 a ° (figura 3).

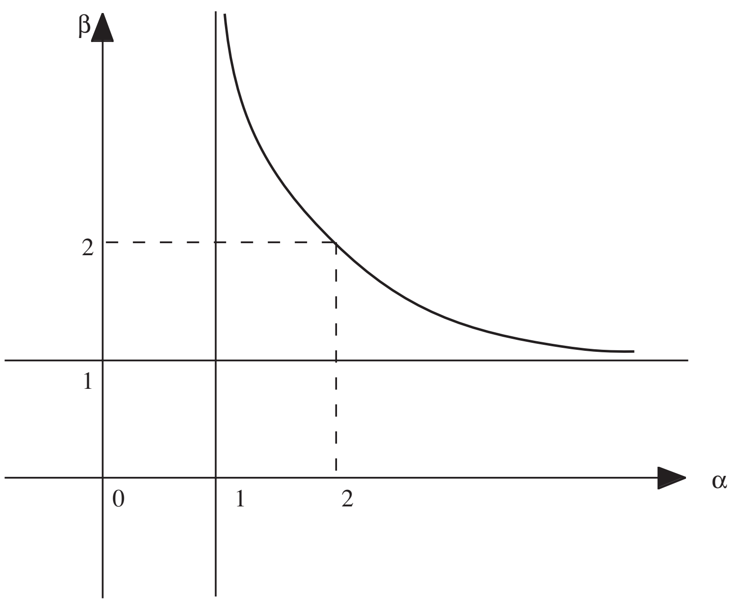

FIGURA 3

Por tanto, según la definición III, disminuría la desigualdad al aumentar m_0, es decir, al disminuir α: la desigualdad variará en el mismo sentido que α. Lo que es conforme con la idea que tenía Pareto en la cabeza, pero es incompatible, como hemos visto, con las definiciones I y II. De hecho, por la ley (1) de Pareto, la expresión (7) de la media se generaliza.

Si se designa por *m(x)* la media de las rentas superiores a *x*, tenemos que *para todo* $x>x_0$:

$$m(x) = \beta x \tag{8}$$

β es entonces, cualquiera que sea el nivel *x* de la renta, la razón entre la renta media de los que están por encima y la renta *x*; si por ejemplo $\beta = 4$, la renta media de las rentas superiores a la mia (cualquiera que esta sea) es el cuádruple de mi renta; si β decrece y se acerca a 1, es que *m(x)* es casi igual a mi renta *x*. ¿Habrá que decir que la desigualdad ha aumentado, o que ha disminuido? Para la percepción intuitiva que todos tenemos de la desigualdad, la conclusión es clara: es porque β disminuye, es decir, porque α aumenta, que la desigualdad disminuye. Lo que reconcilia la definición III con las definiciones I y II.

Así, es sobre la crítica de la definición III, y la puesta en marcha de las expresiones (7) y (8) de la renta media, sobre lo que va tratar, en lo esencial, la aportación de Georges Sorel al debate sobre la desigualdad.

En julio de 1897, aproximadamente un año después de la aparición del curso de Pareto, GEORGES SOREL dedica en la revista «*Le devenir social*» (Sorel, 1897), un comentario muy elaborado (30 páginas) en el capítulo que trata la «loi des revenus».

La publicación había sido precedida, por otra parte, de un intercambio de correspondencia entre ambos, intercambio que Sorel evoca en su artículo, y que Pareto confirmará en su respuesta pública a Sorel y que retomaremos más adelante.

En su texto, Sorel concede una importancia extrema a la cuestión de la disminución de las desigualdades, que como hemos visto, no ocupa más que algunas páginas en el «Cours» (Pareto, 1964). Ello, sin duda, resulta una cuestión capital para un socialista como Sorel, pues en esa época, no hay aún ningún país que practique o haya practicado políticas socialdemócratas (si exceptuamos ciertos inicios en la Alemania de Bismarck), ni por supuesto socialistas. Una cuestión de interés primodial es, por tanto, la siguiente: ¿en las economías liberales en vigor, el curso de los acontecimientos conduce a una disminución de las desigualdades?, como Pareto quiere demostrar, o por el contrario, contribuye a su crecimiento.

Sorel comienza por recordar (Sorel, 1897, 595) que las estimaciones hechas por Pareto de su exponente α (que Sorel escribe *i*) para diversas fechas de los últimos decenios del siglo XIX, muestran que α decrece con el paso del tiempo. Por ejemplo en Inglaterra pasa del valor 1,50 en 1843 a 1,35 en 1879-80; en Prusia, partiendo de 1,89 en 1852, disminuye regularmente y no alcanza más que 1,60 en los años 1890 y siguientes.

Hacia el final del artículo, G. Sorel, antiguo alumno de la École Polytechnique, se entrega a diferentes cálculos, y advierte: «*No voy a contentarme con una* *definición abstracta [*de la definición de desigualdad*] como la de Pareto, sino que intentaré definir algunas relaciones que se refieren más a los* ***sentimientos*** *de igualdad que a los de desigualdad*».

Estos «sentimientos», esta percepción de cada uno puede tener de la desigualdad en el reparto de la renta, ya he señalado anteriormente, como puede traducirse por la expresión (7) de la media de la distribución, y la (8) que la generaliza:

(9) $$m_0 = \beta x_0$$

(10) $$\forall x \geq x_0,\ m(x) = \beta x, \quad con \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Y es en efecto a esta traducción a la que se adscribe Sorel de golpe, presentando dos cuadros.

El primero (Sorel, 1897, 601) trata sobre la razón entre la renta mínima x_0 y la renta media m_0:

α	2	1,80	1,60	1,50	1,42	1,20
$\frac{x_0}{m_0} = \frac{1}{\beta}$	0,50	0,44	0,38	0,33	0,26	0,17

De este cuadro, deduce que, la disminución observada en algunos decenios del valor de α, no se corresponde de ninguna manera con una menor desigualdad, sino que por el contrario, «la renta mínima, se convierte en una fracción cada vez más debil de la renta media», es decir, a un empobrecimiento de las rentas más débiles en relación a su media.

El segundo cuadro, (Sorel, 1897, 602), pone en funcionamiento la fórmula (8), ya que Sorel subraya que su cálculo no se aplica tanto a una renta mínima como al conjunto de las rentas.

α	1,70	1,60	1,50	1,40	1,30	1,20	1,15
$\frac{m_0}{x_0} = \frac{m(x)}{x} = \beta$	2,43	2,66	3	3,50	4,33	6	7,66

Y concluye que a partir del valor 1,50 de α, la razón β «se eleva con gran rapidez y huye hacia las regiones más elevadas». Podría haber añadido que si α se aproxima indefinidamente hacia 1, esta «huida» de la razón $m/x = \beta$ se eleva hasta el infinito.

Por consiguiente, lo que Sorel ha visto bien, es lo que yo he llamado Definición III de Pareto no sería válida más que a condición de invertir los términos: es la disminución y no el crecimiento de la renta media la que corresponde a una disminución de la desigualdad; esta disminución se acompaña de un crecimiento de α.

Pero Sorel no se queda aquí y efectúa otra serie de cálculos que considero innovadores para la época en que los hace.

Se interesa por los «ricos», y por un «umbral de riqueza» definido como la renta x_p que no es superada más que por la proporción p de las rentas: p = 10%, por ejemplo, se tratará del último décil de la distribución; para p = 25%, sería el último quartil, etc. Y la mediana μ no es otra que el x_p correspondiente a p = 50%.

Por la ley (1) de Pareto, x_p se calcula fácilmente:

(11) $$x_p = x_0 p^{-1/\alpha} = \frac{x_0}{p^{1/\alpha}}$$

Sorel elige para p el valor 5%; el «umbral de riqueza» así definido es el que delímita el 5% de las rentas más elevadas, y en un primer cuadro, calcula por medio de valores decrecientes de α la razón entre el umbral de riqueza y la renta media de toda la población.

Probablemente, él espera que esa razón entre el umbral de riqueza y la renta media sea una función decreciente de α. He aquí los resultados:

α	2	1,70	1,50	1,40	1,30	1,20
$\frac{x_p}{m}$	2,23	2,40	2,45	2,43	2,31	2,02

Hay que señalar, y Sorel no deja de hacerlo, que no se puede deducir gran cosa de ese cálculo en relación a la variación de la desigualdad, puesto que la razón $\frac{x_p}{m}$ no es una función monótona de α.

De hecho, tenemos que:

(12) $$\frac{x_p}{m} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} p^{-1/\alpha}$$

Esta función de α vale 0 para α = 1; ella crece cuando α varía de 1 a un valor α_0:

(13) $$\alpha_0 = \frac{L(1/p)}{L(1/p) - 1} > 1$$

y decrece enseguida ; tiende hacia el límite 1 cuando a aumenta indefinidamente.

$$\text{Para} \quad p = 5\%, \quad 1/p = 20 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{L20}{L20 - 1} \cong 1{,}5$$

Es también lo que se constata en el cuadro. En cuanto α sobrepasa el valor α_0, «umbral de riqueza» y la renta media tienden a aproximarse; en este sentido, la desigualdad disminuye cuando α aumenta.

Sorel hace enseguida un segundo cálculo y presenta un segundo cuadro de resultados; es el cálculo de la proporción q de la renta total que es guardado por la proporción p de los más ricos. Obtiene, siempre para p = 5%, el siguiente cuadro:

α	2	1,70	1,50	1,40	1,30	1,20
q	0,223	0,291	0,368	0,425	0,50	0,607

Así, para α = 1,5 por ejemplo, los 5% más ricos retienen aproximadamente el 37% de la renta total; para α = 2, no retienen más que el 22% aproximadamente. En el cuadro, la proporcion q varia en sentido inverso de α; y por tanto, también la desigualdad.

Por otra parte, el cálculo algebraico nos da:

$$q = p^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = p^{1/\beta} \tag{14}$$

Mientras que α crece de 1 a ° , q decrece de 1 (máximo de desigualdad; los «ricos» retienen para ellos solos toda la riqueza a repartir) a p; ahora bien, si q = p, la proporción de riquezas en poder de los ricos es igual a su proporción en la población. Es la situación más igualitaria posible.

La forma en la que Sorel razona aquí, nos resulta muy familiar, pues es casi siempre por este tipo de consideraciones como comienzan hoy día los comentarios sobre la desigualdad; la única cuestión es que estamos en 1897, es decir, ocho antes de la invención por el economista americano M.O. Lorenz, de la *curva de concentración*, como indicador de la desigualdad ; y lo que hace Sorel es estudiar como evoluciona un punto de esta curva en función del parámetro α (cf. figura 4).

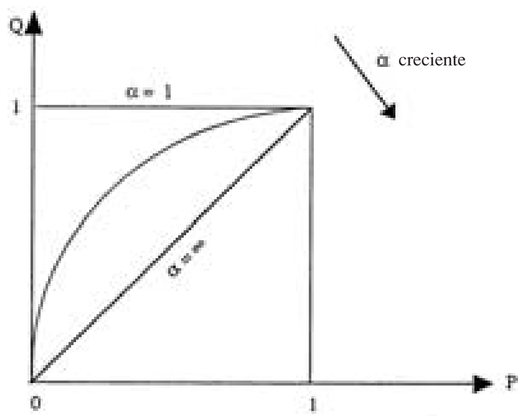

FIGURA 4

Pero no se queda ahí, también observa como evoluciona entre los «ricos», el % en manos del 5% de los más ricos (que él llama grandes ricos), lo que equivale a estudiar, después del punto de la abcisa correspondiente al 5% de la curva de concentración, un segundo punto, el de la abcisa correspondiente al 2,5º/oo. Y obtiene para la variación de la concentración de la fortuna entre los ricos, el cuadro final:

α	2	1,70	1,50	1,40	1,30	1,20
Q	0,20	0,26	0,34	0,40	0,47	0,58

Dicho de otro modo, cuanto más próximo de 1 se encuentra α, más concentrada está la fortuna de los «ricos».

La conclusión de G. Sorel es finalmente formulada de un modo muy prudente (aquí el subrayado es de Sorel): «hemos puesto en evidencia una *tendencia formal que no tiene más valor que el de una indicación general*» Pero para él, la indicación es clara: en lo relativo a las distribuciones paretianas, la disminución del exponente a corresponde a un crecimiento de la desigualdad.

3. LA CONTINUACIÓN: DE 1897 A 1920, 1984 Y MÁS ALLÁ

Desde el final de ese més de julio de 1897, Pareto responde a la crítica de Sorel con un artículo (Pareto, agosto, 1897) publicado en *Le Monde Économique titulado «La repartitión des revenus»* en el que no dedica a las desigualdades más que algunas líneas (es Pareto quien subraya): «***¿Qué sentido hay que dar al término: disminución de la desigualdad de la renta?*** *M. Sorel hace a este propósito muy buenas observaciones. Es mejor evitar este término ambiguo. Si yo lo he empleado, es simplemente por evitar nuevas discusiones inutiles, como las que han dado lugar a ese nuevo término de* ***ofelimidad***. [1]»

Es una manera honorable de pedir disculpas y de mostrarse como buen jugador, sin ceder nada en el fondo. Porque Pareto persiste; cuando publica su «Manuel» en 1909 (Pareto, 1966, 389-393), retoma sin grandes cambios su argumento de 1896 y también su error relativo al sentido de la variación del exponente α. De este modo, los acontecimientos siguientes le conducirán a un doble error: en primer lugar, sobre el plano de los hechos, (aunque es cierto que muere muy pronto para haberlo sabido), y en segundo lugar, sobre el plano de la teoría.

En efecto, la tendencia de *a* durante el siglo XX, de la que Pareto había observado el decrecimiento durante los últimos decenios del siglo XIX, no va a cesar de aumentar por la distribución de las rentas, al menos, en las economías occidentales, hasta alcanzar valores del orden de 4 a 7, con lo que otros tipos de dis-

[1] Término inventado por PARETO que procede del griego οφελος: utilidad en el sentido que le da la ciencia económica.

tribuciones teóricas se ajustan mejor que la de Pareto a los datos, por ejemplo la distribución log-normale de Gibrat (1930).

Este hecho, significa que ha habido una fuerte disminución de la desigualdad a lo largo del siglo XX, por efecto probablemente de las políticas de redistribución de rentas que han prevalecido a partir del final de la primera guerra mundial. Añadamos que esta tendencia secular a la igualdad, muy clara para las rentas, está mucho menos marcada en otras distribuciones, por ejemplo la del patrimonio, o está invertida (la desigualdad aumenta) en el caso de la concentración urbana, que se ajusta muy bien a la ley de Pareto con un *a* inferior a 1,5 (β>3).

A grandes rasgos, es Corrado Gini quien muestra desde antes de 1914 que las curvas de concentración (fórmula 12) se hacen cada vez más igualitarias en tanto que α aumenta, su índice de desgualdad vale por tanto:

(15)
$$G = \frac{1}{2\alpha - 1}$$

Cuando α crece de 1 al infinito, decrece de su valor máximo (G = 1) a su mínimo (G = 0).

Es el matemático Maurice Fréchet (Frechet, 1925) quien, en 1925, da la razón (8) que hemos visto anteriormente de la relación de la media $m(x)$ de las rentas superiores a x en esa misma renta x, siempre que $x > x_0$ ($m(x) = \beta x$). Pero sobre todo el economista inglés Arthur Cecil Pigou (Pigou, 1920) quien sienta en 1920 las bases de lo que llamaríamos hoy una axiomática de la desigualdad [2]. Axiomática en la que el postulado principal, conocido por el nombre de *principio de transferencias de Pigou y Dalton* constituye la *definición*, a la vez más convincente y más coherente (tanto con las observaciones como con los ajustes teóricos) de la *disminución de la desigualdad*. Su enunciado es muy simple:

> *Cada vez que un euro (o un dolar, o un yen, etc.) se transfiere de una renta x a una renta y inferior, hay una disminución de la desigualdad en la distribución de las rentas.*

Es ciertamente esta axiomática la que justifica, sobre el plano teórico, la utilización de las curvas de concentración de Lorenz y Gini para representar la desigualdad de la distribución: cada transferencia aproxima la curva a la que correspondería a la equidistribución, es decir, como ya hemos visto, la primera bisectriz de los ejes (figura 4).

¿Ya esta dicho todo, por tanto? Ciertamente no, incluso con la definición de desigualdad de Pigou, muchos fenómenos inesperados o paradógicos pueden producirse sobre el plano teórico. Tal o cual tamaño del que se espera según el «buen sentido» que varie uniformemente con la desigualdad (i.e. con su paráme-

[2] Para una primera lectura, puede verse BARBUT, M., 1998. Un estudio más completo puede hacerse en SEN, A., 1973.

tro indicador) no es una función monótona. Hemos visto, anteriormente dos casos en este sentido (p. 6, p. 11), y pueden contemplarse otros ejemplos en el debate abierto en 1984-85, en la *Revue Française de Sociologie*, sobre la desigualdad en el acceso a la enseñanza superior [3].

¿De qué trató aquel debate? El punto de partida fue la consideración de un cuadro con datos ingleses sobre el acceso a la enseñanza universitaria según la pertenencia a una clase social superior o inferior, así como la evolución en el espacio de una generación:

Año de nacimiento

Clase social	Antes de 1910	Entre 1935 y 1940
Alta	37%	62%
Baja	1%	10%

El cuadro se lee de la forma siguiente: entre los jóvenes de la alta sociedad, 37% de los nacidos antes de 1910 accedían a la universidad; a la generación siguiente (nacidos entre 1935 y 1949), esta proporción había aumentado hasta el 62%. Del mismo modo, para aquellos jóvenes de clase baja, las proporciones habían variado de 1% a 10%. La pregunta era: ¿la desigualdad había aumentado o disminuido?

Entre los especialistas de sociología de la educación se hacían razonamientos del siguiente tipo:

— Para la clase alta, el crecimiento en % ha sido: 62%-37% = 25%
— Para las clase bajas el crecimiento ha sido: 10%-1% = 9%

Este crecimiento es, por tanto, mucho más débil. Conclusión: la desigualdad aumenta ¡Por supuesto, todos estos sociólogos eran «de izquierdas»!

Por otra parte, los sociólogos «de derechas» replican que es necesario considerar no la desviación de % entre las dos generaciones, sino la razón siguiente:

— para la categoría alta: 62/37 = 1,67
— para la categoría baja: 10/1 = 10

Para la categoría «baja», el % se ha multiplicado por 10, es mucho más que el aumento de la categoría «alta» que se ha multiplicado por 1,67. La conclusión es que la desigualdad ha disminuido. Por supuesto, sus adversarios entrarán al quite volviendo a su argumentación: consideremos el cuadro relativo a los que no accedieron a la universidad, que llaman «excluidos».

[3] Véase al respecto la *Revue Française de Sociologie*, 1984: n.° XXV-2, n.° XXV-4; 1985: XXVI-4, así como *Mathématiques et Sciences humaines*, 1984, n.° 88 (1984); 1985, n.° 90, 1986, n.° 93.

Año de nacimiento

Clase social	Antes de 1910	Entre 1935 y 1940	Razón
Alta	63%	38%	38/63 = 0,6
Baja	99%	90%	90/99 = 0,91

Aquí, para la clase alta, la proporción de excluidos ha disminuido alrededor del 40%, mientras que en los más desfavorecidos, la proporción no ha pasado de un 9%, es decir, que permanece prácticamente estable mientras que hay muchos menos excluidos en la clase alta. Conclusión: la desigualdad ha aumentado.

Abordar así la cuestión de las desigualdades no tiene ninguna posibilidad de llegar a buen puerto, y ello por dos razones. En primer lugar porque falta una información esencial: ¿qué proporción de la población global representan cada una de las dos categorías sociales consideradas? Esta claro que si la clase «alta» constituye un 1% de la población, y la «baja» el 70%, no llegaremos a la misma conclusión que si la clase «alta» es el 50% y la «baja» el 2%. En segundo lugar, porque las dos categorías consideradas están lejos de constituir toda la poblacion. En Francia, en la época en que se produce este debate (1984), la poblacion estaba dividida en una decena de «categorías socio-profesionales» ¿Qué porcentaje de la población representa cada una de ellas? Y en cada una de ellas, ¿cuál es el porcentaje de admitidos en la universidad?

Solo con estas informaciones podría construirse la curva de concentración de Lorenz y Gini para cada una de las dos generaciones, curvas que ya hemos visto anteriormente y que son el instrumento más racional para decidir el sentido de la variación de la desigualdad. De hecho, para los datos franceses del periodo 1960-1975, como para los datos ingleses del periodo 1890-1930, el comentario es el mismo: las curvas de concentración evolucionan en el sentido de una disminución de la desigualdad.

Entonces, ¿la cuestión está resuelta? Por supuesto que no, porque las curvas de concentración eran las de la distribución de «admitidos», pero ¿que hay de los «excluidos»? Si la desigualdad ha disminuido para los «admitidos», se espera que suceda lo mismo con los «excluidos», pero, no sucede siempre así, y no es dificil demostrar matemáticamente que todos los casos son posibles (Barbut, 1984 y 1985): variación de las dos curvas (la de «admitidos» y la de «excluidos») en el mismo sentido, variación de una e invarianza de la otra, o variaciones en sentido contrario. Así, los axiomas tan naturales y racionales que conducen a las curvas de concentración (principio de transferencia de Pigou y Dalton) no son sino ejemplos de conclusiones ambiguas o paradójicas.

Puede, asi mismo, suceder que para una familia de distribuciones bien ajustada a las reparticiones desiguales, la curva de concentración de Lorenz y de Gini, no sean función monótonas de parámetros indicadores de la desigualdad. No abordaremos estas cuestiones que nos llevarían muy lejos, pero ello explica porqué, todavía en nuestros días, la noción de desigualdad sigue siendo objeto de debate. En definitiva, Pareto tenía razón. El término *disminución de la desigualdad* era y sigue siendo ambiguo.

BIBLIOGRAFÍA

BARBUT, M. (1984): «Sur quelques propiétés élémentaires des functions de concentration de C. Gini» Mathématiques et Sciences Humaines, n.° 88.

— (1985): «Sur les indicateurs de l'inegalité: croissance logistique, mesure de l'inegalité et quelques effets "paradoxaux" dans la comparation des inégalités» Mathématiques et Sciences Humaines, n.° 90.

— (1998): «Une introduction élémentaire à l'analyse mathématique des inégalités», *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, n.° 142, pp. 27-41.

FRÉCHET, M. (1925): «Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus», *Bulletin de l'Institut international de statistique*, tome XXII, fasc. 3, p. 547 et sq.

PARETO, V. (1896): *Cours d'Économie Politique*, Genève, Droz. Nouvelle édition par G. H. Bousquet et G. Busino (1964), même éditeur.

— (1897): «La répartition des revenus», *Le monde économique*, pp. 259-261. Reproduit dans *Vilfredo Pareto, écrits sur la courbe de la répartition de la richesse*, réunis et présenté par Giovanni Busino, Genève, Droz, pp. 43-48.

— (1909): *Manuel d'économie politique*, traduit sur l'édition italienne par Alfred Bonnet (revue par l'auteur), Paris, Giard et Brière. Nouvelle édition par G. Busino (1966), Genève, Droz.

PIGOU, A. C. (1920): *The Economics of Welfare*, Cambridge (England), Cambridge University Press.

SEN, A. (1973): *On Economic Inequality*, London, Oxford-Clarendon Press.

SOREL, G. (1897): «La loi des revenus», *Le devenir social*, 3.e année, n.° 7, pp. 578-607.

RESUMEN

Entre 1896 y 1897 se establece una controversia entre V. Pareto y G. Sorel que permite ilustrar la influencia de las posiciones ideológicas en los debates científicos. El artículo hace referencia en concreto, al modo como ambos autores, de ideologías enfrentadas, abordan la cuestión de la distribución de las rentas, así como al problema de la medida de la desigualdad. Después de presentar los planteamientos en los que se apoya V. Pareto para justificar su famosa «ley» de distribución, se expone la crítica de G. Sorel y se abordan las ambigüedades que existen en el tratamiento matemático del problema. El tema no tiene fácil solución y ha continuado provocando debates como el establecido en 1984-85 en la *Revista Francesa de Sociología,* a propósito de la desigualdad en la educación. En definitiva, Pareto tenía razón, el término disminución aplicado a la desigualdad era, y continúa siendo, ambiguo.

ABSTRACT

The discussion between V. Pareto and G. Sorel during 1896 and 1897 illustrates the influence of ideological positions on scientific debates. Specifically, this paper shows the way these authors treated the questions of income distribution and measurement of inequality from opposite ideologies. After presenting the reasoning of Pareto's distribution

law, it is shown the critical arguments of Sorel and the ambiguity of the mathematical treatment of this question. There is not an easy solution and the discussion continues, as we can see in the Sociological French Review in 1984-85 à propos of educational inequalities. At the end, Pareto was right: the term ‘decrease’ referred to inequality was and is still ambiguous.