Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa
Vol. 3, Nº 2, 1997, pp. 91-100

UN ENFOQUE DE LAS LEYES FINANCIERAS A TRAVÉS DE LAS DISTRIBUCIONES DE CAPITAL

Cruz Rambaud, S.
García Pérez, J.
Andújar Rodríguez, A.
Universidad de Almería.

RESUMEN:

El objetivo de este artículo es ofrecer un nuevo enfoque de las leyes financieras a través del concepto de renta o distribución de capital. Así, construimos la Matemática Financiera desde el concepto de renta y tratamos de caracterizar los principales sistemas financieros que pueden presentarse en la práctica: sumativos, multiplicativos y estacionarios. De este modo, aportamos nuestro punto de vista y nuestra metodología a la elaboración de un concepto que ha sido estudiado en relación con las ecuaciones diferenciales, los factores, las funciones de distribución de variables aleatorias, las curvas de indiferencia y el interés. Por último, generalizamos el estudio a las rentas aleatorias e introducimos el concepto de ley financiero - aleatoria.

PALABRAS CLAVE: Ley financiera; Renta; Distribución de capital; Sistema financiero; Estacionario; Sumativo; Multiplicativo.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Insolera (1950, p. 115), "el *valor* de un elemento de riqueza varía, en general, de un instante a otro y de mercado a mercado; en un determinado instante (aspecto estático) define el *capital*; la medida de las variaciones de dicho elemento a través del tiempo (aspecto dinámico) define el *rédito*". Por otra parte, citando a Fisher (1912) define el rédito como "un servicio abstracto, un *aflujo* bajo cuya acción sufra el capital en el tiempo modificaciones productivas de nuevos efectos valorables; aflujo cuyas características queden definidas por las de la operación financiera a la que se refiere el capital".

Pues bien, el propósito de este trabajo es definir el concepto de ley financiera a partir del concepto de *renta continua* o *distribución continua de capital* (véase Gil Luezas y Gil Peláez (1987)) que asimilaríamos con el rédito definido por Insolera. Esta construcción nos conduce inevitablemente a hacernos las siguientes preguntas:

1ª) Si consideramos una *distribución discreta de capital*, ¿ obtendríamos una ley financiera en tiempo discreto ?.

2ª) La existencia de un conjunto finito o, a lo sumo, infinito numerable de discontinuidades con salto finito contradice la condición de continuidad en una ley financiera. Pero, ¿ tendría sentido financiero "relajar" dicha condición de continuidad y "permitir" estas discontinuidades ?.

3ª) Si la *función de repartición de cuantía* es parcialmente horizontal, ésto se opone a la condición de crecimiento estricto de una ley financiera. No obstante, ¿ podría interpretarse esta situación como una "ausencia" de ley financiera en el intervalo de horizontalidad ?.

La contestación a estas tres preguntas puede encontrarse en Cruz Rambaud (1994) en donde se define el concepto de ley financiera en tiempo discreto utilizando, para ello, el concepto algebráico de *autómata*. Además, en esta obra podemos encontrar el paralelismo existente entre leyes financieras y funciones de distribución de variables aleatorias que son funciones de la clase cero o primera de Baire y no decrecientes.

De esta forma, en la siguiente Sección, se define una ley financiera a partir de una distribución de capital, deduciéndose las propiedades que ha de cumplir toda ley financiera. En la Sección 3, se introduce el concepto de *sistema financiero* y se caracterizan los tres modelos más importantes, utilizando nuestro enfoque. Por último, en la Sección 4 se establece una relación binaria de equivalencia entre los capitales financieros, introduciéndose el concepto de sumando financiero y, en la Sección 5, se generaliza la construcción anterior a las distribuciones aleatorias de capital, surgiendo el concepto de ley financiera aleatoria.

LEYES FINANCIERAS Y DISTRIBUCIONES DE CAPITAL

Para el desarrollo de esta Sección, vamos a seguir básicamente a Gil Peláez (1992, pp. 211-232). En efecto, consideremos una unidad monetaria situada en un punto t_0 (fijo) de la recta temporal. Si queremos hallar su equivalente en otro punto t, con $t > t_0$, podemos pensar que dicha cuantía unitaria induce una renta continua en el intervalo $[t_0,t]$. Supongamos que la distribución de capital viene dada por la *función de repartición de cuantía*:

$$R(t) = M(]-\infty,t]) = M(x \leq t),$$

con las propiedades de ser positiva, no decreciente y continua por la derecha. (Eventualmente, $R(t)$ puede ser 0, para todo t menor o igual que un cierto h)

A partir de $R(t)$ se puede determinar la cuantía asociada a cualquier intervalo $[t_0,t]$ (figura 1)

$$M(t_0 < x \leq t) = R(t) - R(t_0).$$

El hecho de que el dominio de la función de repartición de cuantía sea el intervalo $]-\infty,+\infty[$ quiere decir que se pueden obtener infinitas funciones de repartición por traslación vertical de la gráfica inicial, pudiendo tomarse como origen de la renta cualquier instante anterior o igual a t_0, ya que, para todo t'_0 menor o igual que t_0, se verifica (figura 2)

$$M(t'_0 < x \leq t) = M(t'_0 < x \leq t_0) + M(t_0 < x \leq t).$$

Es evidente que ambas distribuciones de capital dan los mismos resultados sobre intervalos comunes.

FIGURA 1

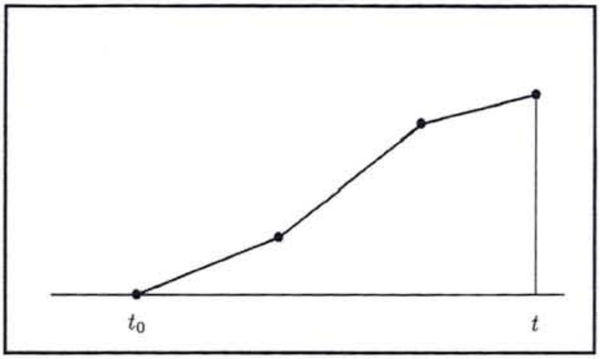
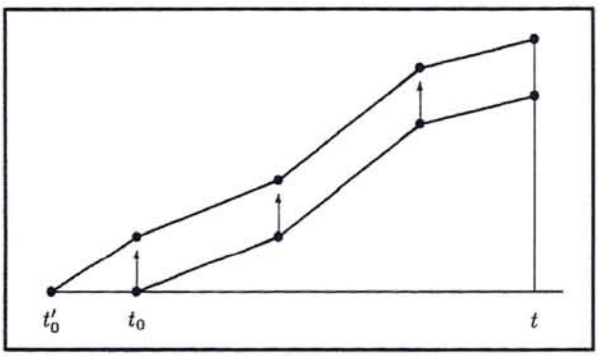


FIGURA 2



Los puntos en los que $R(t)$ es discontinua por la izquierda corresponden a puntos donde vencen capitales de cuantía finita, mientras que a los puntos en que $R(t)$ es continua les corresponde cuantía nula. Por ello, los puntos de discontinuidad han de constituir a lo sumo un conjunto numerable.

Sea

$$C(t) = R'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h}.$$

$C(t)$ es llamada la *densidad de cuantía en* t. La cuantía asociada a un intervalo infinitesimal $(t,t+dt]$ es llamada *cuantía elemental* y se expresa como el producto de la densidad en t por la amplitud del intervalo, o sea, $C(t)\,dt$. Por tanto,

$$R(t) = \int_{-\infty}^{t} C(x)dx.$$

Pues bien, podemos definir una *ley financiera unitaria de capitalización desde* t_0 como una función de la variable t, definida por:

$$F(t_0,t) = 1 + M(t_0 < x \leq t) = 1 + [R(t) - R(t_0)] = 1 + \int_{t_0}^{t} C(x)dx.$$

Evidentemente, podemos deducir las siguientes *propiedades*:

1ª) $F(t_0,t_0) = 1$. En efecto,

$$F(t_0,t_0) = 1 + \int_{t_0}^{t_0} C(x)dx = 1 + 0 = 1.$$

2ª) $F(t_0,t)$ es creciente respecto de t. En efecto, si $t_0 < t_1 < t_2$,

$$F(t_0,t_1) = 1 + \int_{t_0}^{t_1} C(x)dx \leq 1 + \int_{t_0}^{t_2} C(x)dx = F(t_0,t_2).$$

3ª) $F(t_0,t) \geq 1$. Es evidente.

Una *ley financiera completa de capitalización* queda definida suponiendo la homogeneidad de grado uno con respecto a la cuantía:

$$F(C,t_0,t) = C.F(1,t_0,t) = C.F(t_0,t).$$

Análogamente, definiríamos el concepto de *ley financiera unitaria/completa de descuento*, para lo que tendríamos que considerar la distribución de capital en el intervalo $]-\infty,t_0]$ en lugar de $[t_0,+\infty[$. La única diferencia estaría en la 3ª propiedad, ya que, en este caso,

$$F(t_0,t) \leq 1.$$

SISTEMAS FINANCIEROS

Definimos un *sistema financiero* como una familia de leyes financieras que verifica la siguiente condición:

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1,t) \geq F(t_2,t), \text{ para todo } t \in [t_1,+\infty[.$$

Es evidente que cualquier función de repartición de cuantía definida sobre todo $\Re$ daría lugar a un sistema financiero que, además, tiene una importante propiedad. En efecto, si llamamos:

$$I(t_0,t) = F(t_0,t) - 1, \text{ si } t \geq t_0,$$

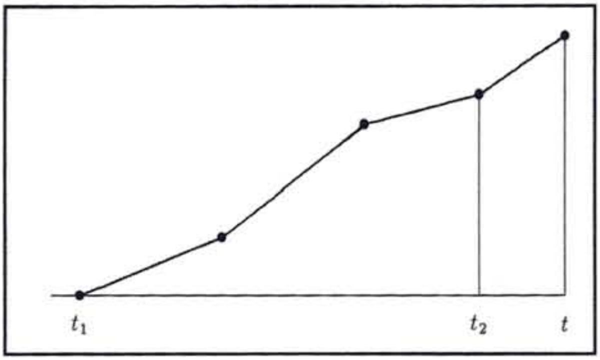
$$I(t_0,t) = 1 - F(t_0,t), \text{ si } t \leq t_0,$$

entonces si $t_1 < t_2 < t$ (estamos considerando un sistema financiero de capitalización):

$$I(t_1,t) = \int_{t_1}^{t} C(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} C(x)dx + \int_{t_2}^{t} C(x)dx = I(t_1,t_2) + I(t_2,t).$$

Un sistema así será llamado *sistema simplemente sumativo* (figura 3)

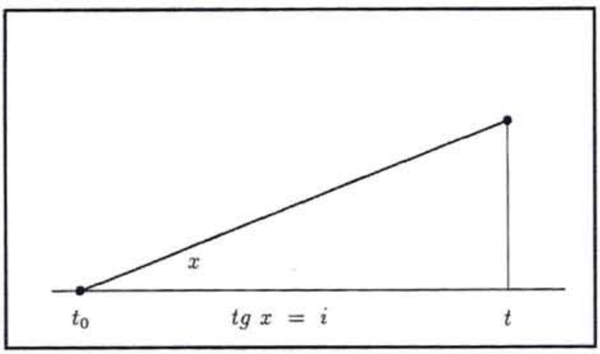
FIGURA 3



Análogamente, se haría la demostración para un sistema de descuento.

Un caso particular notable de sistema financiero simplemente sumativo lo constituye el *sistema de capitalización simple al tanto i* en el que la función de repartición de cuantía sería (figura 4)

FIGURA 4



Es evidente que la función de densidad de cuantía tendría la siguiente expresión:

$$C(x) = i,$$

de donde, integrando entre t_0 y t, obtendríamos:

$$R(t) = i.(t - t_0),$$

por lo que:

$$F(t_0,t) = 1 + i.(t - t_0).$$

Conviene citar aquí una sencilla aplicación de la propiedad de condensación en un punto de una distribución continua de capital, propiedad que se basa en el Primer Teorema de la Media del Cálculo Integral. En este sentido, dada una ley financiera $F(t_0,t)$, como ya hemos dicho, podemos considerar el interés producido por una unidad monetaria en el intervalo $[t_0,t]$ como la integral entre t_0 y p de la función de densidad de cuantía, es decir:

$$I(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} C(t)dt.$$

Por la propiedad de condensación:

$$\exists \xi \in (t_0,t) \text{ tal que } \int_{t_0}^{t} C(x)dx = C(\xi).(t - t_0).$$

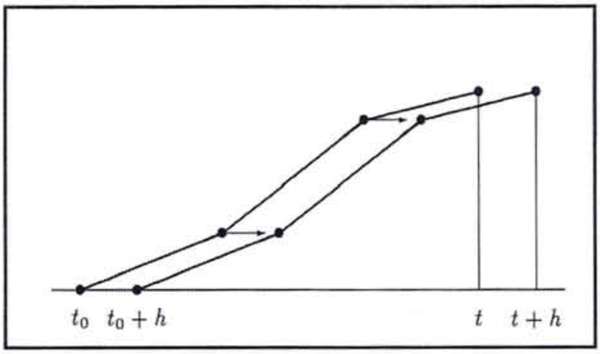
De esta forma,

$$F(t_0,t) = 1 + C(\xi).(t - t_0).$$

$C(\xi)$ es llamado el *tanto equivalente en capitalización simple*.

Por otra parte, si las funciones de repartición de cuantía correspondientes a las leyes financieras que forman el sistema son paralelas en dirección horizontal, diremos que se trata de un *sistema estacionario* (figura 5)

FIGURA 5



Es evidente que, en este caso:

$$\forall t_0,\ t \in R,\ \forall h \in R,\ F(t_0,t) = F(t_0+h,t+h).$$

En caso contrario, el sistema financiero será *dinámico*.

No cabe duda de que un caso particular notable dentro de los sistemas financieros lo constituyen los *sistemas simplemente multiplicativos* que son aquellos sistemas escindibles por medio del producto, es decir:

$$\forall t,\ t_1,\ t_2 \in R,\ F(t_1,t_2).F(t_2,t) = F(t_1,t).$$

Si nos planteamos cuál será la expresión de la función de repartición de cuantía en este caso, tendremos que hacer un planteamiento similar a Insolera (1950), que presentamos parcialmente. Supongamos que se verifica la igualdad anterior referente a la escindibilidad en producto en un sistema financiero simplemente multiplicativo. En particular, tomando $t_1 = t$, $t_2 = t+h$ y $t = t+h+\Delta h$, nos queda:

$$F(t,t+h+\Delta h) = F(t,t+h).F(t+h,t+h+\Delta h).$$

Si restamos $F(t,t+h)$ a los dos miembros de la igualdad anterior y después los dividimos por $\Delta h.F(t,t+h)$, teniendo en cuenta que $F(t+h,t+h) = 1$, nos quedaría:

$$\frac{F(t,t+h+\Delta h) - F(t,t+h)}{\Delta h.F(t,t+h)} = \frac{F(t+h,t+h+\Delta h) - F(t+h,t+h)}{\Delta h}.$$

Tomando límites cuando $\Delta h \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial h}\ln F(t,t+h) = \left[\left(\frac{\partial F(u,u+h)}{\partial h}\right)_{h=0}\right]_{u=t+h}.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{\partial F(u,u+h)}{\partial h}\right)_{h=0} = \rho(u),$$

sustituyendo, nos quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial h}\ln F(t,t+h) = \rho(t+h),$$

de donde se llega a:

$$F(t,t+h) = e^{\int_t^{t+h}\rho(z)dz}.$$

De este modo, la expresión de la función de repartición de cuantía sería:

$$R(t) = e^{\int_{t0}^{t}\rho(z)dz} - 1.$$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA ENTRE CAPITALES FINANCIEROS

En el conjunto de los capitales financieros se define la siguiente relación binaria: Dos capitales (C,t) y (C',t') *están relacionados según la ley financiera F en* t_0 y escribiremos:

$$(C,t)\ R_{(F,t0)}\ (C',t')$$

si existe un C_0 tal que:

$$C = C_0 + C_0 \cdot \int_{t_0}^{t} C(x)dx \text{ y } C' = C_0 + C_0 \cdot \int_{t_0}^{t'} C(x)dx.$$

Evidentemente, esta relación binaria es de equivalencia y permite agrupar a todos los capitales que son equivalentes entre sí, de manera que cada clase de equivalencia estará formada por los capitales cuya cuantía resulta de sumar a una cantidad fija C_0, la renta que ésta genera desde t_0 hasta el vencimiento de dicho capital.

Restando miembro a miembro las igualdades anteriores, nos quedaría:

$$C' - C = C_0 \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx,$$

de donde:

$$C' = C + C_0 \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx.$$

La expresión $C_0 \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx$ recibe el nombre de *sumando financiero asociado al intervalo [t,t'] y a la cuantía* C_0 y es la cantidad que hay que sumar a C con vencimiento en t para obtener su equivalente C' con vencimiento en t'. Lo representaremos así:

$$S(C_0,t,t') = C_0 \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx.$$

Teniendo en cuenta que:

$$C' = C\left(1 + \frac{C_0}{C} \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx\right)$$

se deduce que:

$$1 + \frac{C_0}{C} \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx = f(t_0,t,t')$$

es el *factor financiero de la ley financiera F en t_0 asociado al intervalo [t,t']*. Como $f(t_0,t,t') = 1 + i(t_0,t,t')$, siendo $i(t_0,t,t')$ el *rédito en el intervalo [t,t']*:

$$i(t_0,t,t') = \frac{C_0}{C} \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx,$$

de donde:

$$C.i(t_0,t,t') = C_0 \cdot \int_{t}^{t'} C(x)dx,$$

por lo que:

$$I(t_0,t,t') = S(C_0,t,t').$$

Luego el sumando financiero asociado al intervalo $[t,t']$ y a la cuantía C_0 es el *interés* producido por la cuantía C, equivalente a C_0 en t, en el intervalo $[t,t']$.

LEYES FINANCIERAS ALEATORIAS

Consideremos una distribución aleatoria de capital (Gil Peláez (1992), p. 230), es decir, una distribución de capital en la que la masa de capital $R(t) = M(]\infty,t])$ depende de una variable aleatoria $X(t)$. En este caso, la cuantía de capital asociada al intervalo $[t_0,t]$ es también una variable aleatoria, función de la variable aleatoria $X(t)$, que representaremos por $\Re(X(t))$.

Así pues, llamaremos *ley financiero - aleatoria en* t_0 a la variable aleatoria

$$\mathrm{F}\,(t_0,t) = 1 + \Re(X(t)).$$

Si la función de distribución de $X(t)$ es $\varphi_t(x) = Pr[X(t)\leq x]$, podemos definir la *ley financiera esperada en* t_0 como:

$$\overline{\Im}(t_0,t) = 1 + \overline{\Re}(t),$$

siendo:

$$\overline{\Re}(t) = E[\Re(X(t))].$$

CONCLUSIONES

En este artículo hemos introducido el concepto de ley financiera a partir de una distribución de capital, surgiendo, de manera natural, la magnitud *sumando financiero*, que, análogamente al factor, genera los capitales equivalentes a uno dado por medio de la suma (recordemos que el factor lo hace a través del producto). Es precisamente por este motivo, que la construcción que presentamos sea más adecuada para describir los llamados sistemas simplemente sumativos, ya que, como deducimos en la Sección 4, el sumando financiero es igual al interés generado en el intervalo correspondiente y es esta magnitud financiera la que sirve para definir los sistemas anteriormente mencionados. Obsérvese que, análogamente, el factor financiero describe perfectamente a los sistemas multiplicativos ya que, en este caso, el factor coincide con la ley.

Por otra parte, una segunda ventaja de esta construcción es que nos permite formalizar el concepto de ley financiero - aleatoria, definición que puede resultar de gran interés si tenemos en cuenta las condiciones cambiantes de los mercados financieros y su incidencia en los tipos de interés, sin olvidar que esta teoría deja el camino abierto a una posible generalización en el campo de la lógica borrosa.

BIBLIOGRAFÍA

CRUZ RAMBAUD, S. (1995): Nuevo Enfoque de las Leyes Financieras a través de la Teoría Algebráica de Autómatas. U.N.E.D., Madrid.
DE PABLO LÓPEZ, A. (1995): Matemática de lás Operaciones Financieras. U.N.E.D., Madrid.
GIL LUEZAS, M. A. y GIL PELÁEZ, L. (1987): Matemáticas de las Operaciones Financieras. U.N.E.D., Madrid.
GIL PELÁEZ, L. (1992): Matemática de las Operaciones Financieras. Ed. AC, Madrid.
INSOLERA, F. (1950): Curso de Matemática Financiera y Actuarial. Ed. Aguilar, Madrid.
LEVI, E. (1973): Curso de Matemática Financiera y Actuarial. Ed. Bosch, Barcelona.
MARAVALL, D. (1970): Matemática Financiera. Ed. Dossat, Barcelona.
RODRÍGUEZ, A. (1984): Matemática de la Financiación. Ed. Romargraf, S.A., Barcelona.