

# El efecto Hall fraccionario: un nuevo líquido cuántico

Germán Sierra y Miguel Angel Martín-Delgado

**L**a Real Academia de Ciencias Sueca ha concedido el premio Nobel de Física de este año a los físicos norteamericanos Robert B. Laughlin y Daniel C. Tsui y al físico alemán Horst L. Störmer por el descubrimiento de una nueva forma de líquido cuántico cuyas excitaciones poseen carga eléctrica fraccionaria.

Este líquido cuántico se obtiene al confinar un gas de electrones en los planos formados por las intercapas de ciertos materiales semiconductores a los que se somete a su vez a intensos campos magnéticos perpendiculares a dichos planos.

Los profesores Störmer y Tsui encontraron en 1982 la primera manifestación macroscópica de este nuevo estado de la materia al observar un efecto Hall cuántico fraccionario (que denominaremos por el acrónimo inglés FQHE), en contraposición al efecto Hall cuántico entero (IQHE), descubierto en 1980 por Klaus von Klitzing y que fue también laureado en 1985 con el Nobel de Física.

La explicación teórica del FQHE no tardaría en llegar. En 1983 el prof. Laughlin propuso una función de onda variacional para el estado fundamental y las excitaciones de un gas de electrones bidimensional sometido a un campo magnético y que explicaba las anomalías observadas por Tsui y Störmer. El nuevo estado cuántico correspondería al de un fluido cuyas excitaciones elementales, cuasielectrones y cuasiagujeros, deberían de poseer carga eléctrica fraccionaria. La comprobación experimental de la fragmentación de la carga eléctrica en el FQHE ha sido hecha por diversos grupos a lo largo de los 3 últimos años y ha supuesto la confirmación definitiva de la teoría de Laughlin.

El trabajo de estos investigadores ha representado una nueva "vuelta de tuerca" en la comprensión de las manifesta-

ciones macroscópicas del submundo cuántico con profundas implicaciones teóricas.

## EL EFECTO HALL CLASICO

Para apreciar el significado de este premio Nobel hemos de hacer historia y regresar a principios de siglo cuando el joven estudiante Edwin H. Hall descubrió inesperadamente el efecto que lleva su nombre. Hall encontró que una placa de oro emplazada en un campo magnético  $B$  perpendicular a su superficie, al ser atravesada por una corriente eléctrica  $I$  en la dirección del eje  $x$  (ver figura 1), generaba una caída de potencial  $V_H$  en la dirección del eje  $y$ . La caracterización cuantitativa de éste fenómeno se realiza por medio de la resistencia Hall  $R_H$ , definida como la razón entre el voltaje Hall  $V_H$  y la intensidad de la corriente  $I$ . La resistencia Hall  $R_H$  depende del campo magnético  $B$  y la densidad superficial  $\rho$  de portadores de carga eléctrica  $e$  a través de la relación,

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{\rho e c} \quad (1)$$

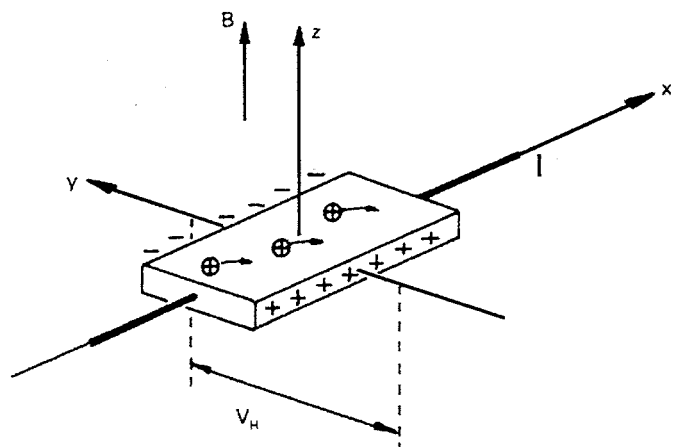
donde  $c$  es la velocidad de la luz. El efecto Hall se utiliza para determinar la densidad de portadores  $\rho$  así como el signo de la carga, que es negativa ( $e < 0$ ) para electrones y positiva ( $e > 0$ ) para agujeros. La explicación teórica de este efecto nos la da la Electrodinámica Clásica, según la cual una carga eléctrica sometida a la acción simultánea de un campo magnético  $\mathbf{B}$  y un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

La fuerza de Lorentz hace que las cargas giren con una frecuencia ciclotrónica  $\omega_c = eB/\mu c$ , donde  $\mu$  es su masa, mientras que el campo eléctrico produce un arrastre neto de las órbitas ciclotrónicas. El movimiento de las cargas a lo largo del eje  $x$  induce un campo eléctrico  $E_y$  en la dirección perpendicular dado por  $E_y = v_x B/c$ . La ecuación (1) se deduce sencillamente de las relaciones  $V_H = E_y L_y$  y  $I = j_x L_y$ , donde  $L_y$  es la anchura de la muestra en la dirección  $y$ , y  $j_x = e p v_x$  es la componente  $x$  de la densidad de corriente.

Figura 1

Un voltaje  $V$ , que no aparece en la figura, genera una corriente  $I$  en la dirección positiva del eje  $x$ . La resistencia óhmica ordinaria es  $V/I$ . Un campo magnético  $B$  en la dirección  $z$  desplaza los electrones en la dirección positiva del eje  $y$ . Esto genera un potencial Hall ( $V_H$ ) y una resistencia Hall ( $V_H/I$ ) en la dirección  $y$ .



El efecto Hall posee aspectos geométricos singulares que facilita la aparición de sorprendentes propiedades físicas. En primer lugar hay que decir que la conducción eléctrica en los planos de Hall requiere el uso de un tensor de conductividad  $\sigma_{ij}$  y un tensor de resistividad  $\rho_{ij}$ , el uno el inverso del otro, y que relacionan linealmente las densidades de corriente  $j_i$  y el campo eléctrico  $E_i$ ,

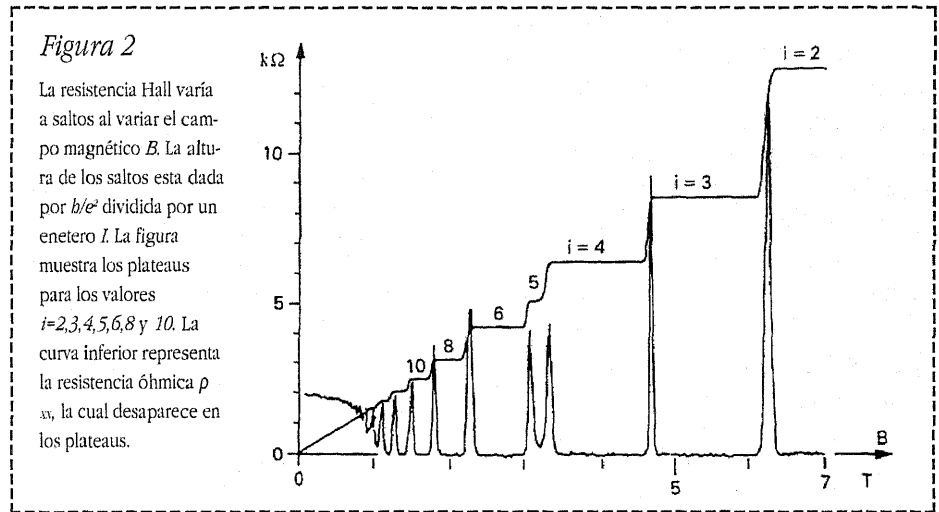
$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

Las relaciones de Onsager  $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$ ,  $\rho_{yx} = -\rho_{xy}$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ ,  $\rho_{xx} = \rho_{yy}$  implican que sólo hay dos cantidades independientes. En el caso analizado anteriormente, las cargas no colisionan entre sí ni con impurezas y se obtiene  $\rho_{xy} = -1/\sigma_{xy} = -B/ecz$  y  $\rho_{xx} = \sigma_{xx} = 0$ . En casos no ideales las componentes longitudinales  $\sigma_{xx}$  y  $\rho_{xx}$  no se anulan, pero  $\rho_{xy}$  sigue estando dado por  $B/ecz$ . Esta última relación es la misma que la de la resistencia Hall  $R_H$  dada por (1). En efecto, la resistividad y la resistencia Hall son la misma cantidad como es fácil comprobar, i.e.  $\rho_{yx} = E_y/j_x = E_y L_y / j_x L_y = V_H / I = R_H$ . Esto hace que la medida de ambas sea independiente del tamaño de la muestra.

### EL EFECTO HALL CUANTICO ENTERO

Hall realizó sus experimentos a temperatura ambiente y con moderados campos magnéticos inferiores a un Tesla. A finales de los 70 los investigadores empezaron a utilizar temperaturas inferiores a 1 grado Kelvin y campos magnéticos de hasta 30 Teslas. Las placas de oro de Hall fueron sustituidas por la superficie de separación entre distintas partes de semiconductores, diseñados por la industria electrónica en la búsqueda de transistores de bajo ruido.

En 1980 K. von Klitzing descubrió que en condiciones extremas de baja temperatura  $T$  e intensos campos magnéticos  $B$ , la resistividad Hall  $R_H$  no varía linealmente con  $B$  sino que presenta una serie de saltos en función de  $B$  (ver figu-



ra 2). Estos saltos en la resistencia Hall no dependen de las propiedades específicas del material sino que están dados por una combinación de constantes universales como son la constante de acción de Planck  $h$  y la carga eléctrica del electrón  $e$ ,

$$R_H = \frac{h}{ie^2}, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (4)$$

y donde  $i$  es un número entero que caracteriza cada plateau de Hall, que es por definición la región de campos magnéticos donde la resistividad está cuantizada de acuerdo con la fórmula (4). Dentro de cada plateaus la resistividad longitudinal  $\rho_{xx}$  se anula al igual que ocurre en ciertos metales a bajas temperaturas al pasar a un estado superconductor.

El efecto descubierto por von Klitzing se denomina efecto Hall cuántico (QHE) para distinguirlo del efecto de Hall clásico, mientras que en otras ocasiones se le denomina efecto Hall cuántico entero (IQHE) para distinguirlo del efecto Hall fraccionario (FQHE) que fue descubierto con posterioridad.

La ley (4) del QHE se cumple con una precisión del orden de  $10^{-7}$ , lo cual ha permitido establecer un patrón de resistencia basado en la medida de  $h/e^2 \sim 25813 \Omega$ . Por otra parte utilizando el valor de la velocidad de la luz  $c$ , que es conocida con un error de  $10^{-9}$ , se puede determinar el valor de la constante de estructura fina electromagnética  $\alpha = e^2 / hc$ , el cual viene dado por  $\alpha^{-1} = 137.035 968$  (23). Este resultado

es comparable al valor  $\alpha^{-1} = 1/137.035993(5)$ , obtenido a partir de la medida del momento magnético anómalo del electrón y de complejísimo cálculos a 8 loops de Electrodinámica Cuántica.

El QHE se explica por el comportamiento individual cuántico de los electrones bidimensionales en campos magnéticos, el cual fue descrito por el físico ruso Lev Landau en términos de la Mecánica Cuántica del oscilador armónico. El Hamiltoniano de un electrón sometido a un campo magnético  $B$  en dos dimensiones espaciales se escribe como

$$H = \frac{1}{2\mu} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (5)$$

donde  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  y  $\mathbf{A} = B/2(-y, x)$  es el potencial vector en el gauge simétrico y tal que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Los autoestados de (5) dependen de dos números cuánticos  $n$  y  $m$ .  $n=0, 1, \dots$  es un número cuántico principal que determina la energía del estado según la conocida fórmula del oscilador armónico,

$$E_{n,m} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia ciclotrónica de las órbitas clásicas. Mientras que  $m=0, 1, 2, \dots$  es el momento angular orbital del estado. El principio de indeterminación de Heisenberg implica la existencia de un radio mínimo  $k = (\hbar c / eB)^{1/2}$  para las orbitas ciclo-

trónicas. A esta cantidad también se le denomina longitud magnética. Los niveles de Landau etiquetados por  $n$  están degenerados en energía, pero el carácter fermiónico de los electrones y la existencia de un radio mínimo impide que estos se puedan "amontonar" todos en un mismo nivel. Si imaginamos los estados de Landau como pequeños discos de área  $2\pi l_c^2$ , entonces en un área  $A$  de la muestra habrá  $A/2\pi l_c^2$  estados disponibles. La degeneración de cada nivel de Landau  $n$ , definida como el número de estados en ese nivel por unidad de área de la muestra, viene dada por la fórmula

$$\rho_L = \frac{1}{2\pi l_c^2} = \frac{eB}{hc} \quad (7)$$

El primer nivel de Landau  $n=0$  se llena completamente cuando la densidad electrónica  $\rho$  iguala a la densidad de Landau  $\rho_L$ . El paso al siguiente nivel  $n=1$  conlleva un gasto de energía finito dado por  $\hbar\omega_c$ . El llenado de los dos primeros niveles de Landau se consigue para un densidad  $\rho$  el doble de la densidad de Landau. Es conveniente definir el factor de llenado  $\nu$  de los niveles de Landau por la razón

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_L} \quad (8)$$

de manera que un valor entero de  $\nu$  corresponde a un llenado completo de los  $\nu$  primeros niveles.

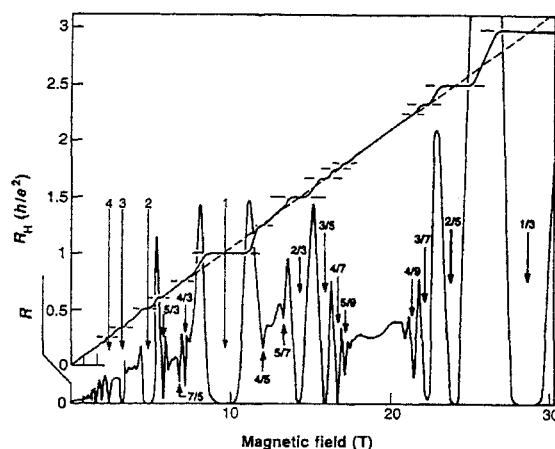
A la luz de lo expuesto anteriormente podemos entender la naturaleza cuántica de la fórmula (4) del QHE a partir de la fórmula clásica (1) y la cuantización de Landau. En efecto si en la ecuación (1) sustituimos el valor de  $B$  en función de  $\rho_L$  dado por (7) y empleamos la definición (8) encontramos como resultado la ecuación del QHE

$$R_H = \frac{B}{\rho e c} = \frac{h \rho_L}{e^2 \rho} = \frac{h}{e^2 \nu} \quad (9)$$

donde  $\nu$  coincide con el entero  $i$  de la fórmula (4). Llegamos pues a la conclusión de que el QHE es una manifestación macroscópica de la cuantización de Landau.

Figura 3

La recta diagonal a trazos representa la resistencia Hall clásica dada por la ecuación (1) mientras que la curva diagonal continua representa los resultados experimentales. Los campos magnéticos causantes de los plateaus están marcados por flechas. Observar en particular el primer plateau por la derecha que fue el descubierto por Störmer y Tsui (1/3) para el valor más alto del campo magnético. Los plateaus descubiertos por von Klitzing (enteros) aparecen a valores más bajos del campo magnético.



### EL EFECTO HALL CUANTICO FRACCIONARIO

Como si de una buena obra de teatro se tratara, el tercer acto del efecto Hall tomó por sorpresa a la comunidad científica internacional. Dos años después del QHE, Störmer y Tsui descubrieron el FQHE en unas muestras de gran pureza de arsenuro de galio preparadas por A.C. Gossard, donde los electrones se mueven sin apenas difusión por las impurezas. Los experimentos de Störmer y Tsui descubrieron plateaus de Hall en intensos campos magnéticos asociados a valores del llenado  $\nu$  fraccionarios. La fórmula (9) para la resistencia Hall seguía siendo válida pero con valores de  $\nu$  igual a 1/3. Posteriormente se han encontrado plateaus de Hall asociados a otras fracciones de Hall como 2/3, 2/5, 3/7, etc (ver figura 3).

Estuvo claro desde el primer momento que la teoría de Landau era incapaz de explicar el FQHE pues el llenado  $\nu = 1/3$  no presenta ninguna peculiaridad especial. La única explicación posible del FQHE debía de tener en cuenta la repulsión Coulombiana entre los electrones, así como su interacción con el resto de iones de la red. La dinámica de este complicado sistema de muchos cuerpos está regida por el siguiente Hamiltoniano de interacción

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}_j \right)^2 + V(\mathbf{r}_j) + \sum_{j < k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} \quad (10)$$

donde  $V(\mathbf{r}_j)$  es el potencial generado por el resto de los iones de la red. La resolución exacta de los niveles de energía del

Hamiltoniano (10) estaba en 1982, y en la actualidad también, fuera del alcance de los más potentes ordenadores, salvo para unos pocos electrones.

En un auténtico *tour-de-force* teórico, el profesor Laughlin propuso una función de onda variacional para el estado fundamental del Hamiltoniano (10) dada por

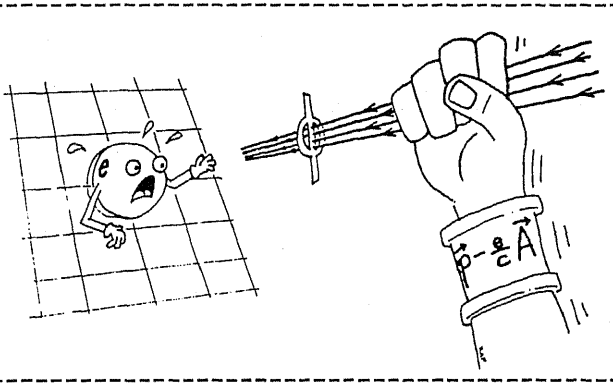
$$\Psi_m(z_1, z_2, \dots, z_{N_e}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N_e} (z_j - z_k)^m \exp \left( -\frac{1}{4} |z_j|^2 \right) \quad (11)$$

donde la posición espacial del  $j$ -ésimo electrón se describe mediante el número complejo  $z_j = (x_j + i y_j)/l_c$ , siendo  $(x_j, y_j)$  las coordenadas cartesianas y  $l_c$  la longitud magnética. El único parámetro variacional que aparece en (11) es  $m$ . Laughlin demostró que  $m$  es un número entero impar e igual al inverso del llenado  $1/\nu$ , que en el caso de Tsui y Störmer corresponde a  $m=3$ .

Laughlin llegó a estos resultados partiendo de principios generales como la antisimetría de la función de onda debida al carácter fermiónico de los electrones. Al mismo tiempo, tomando la norma  $|\Psi_m|^2$  de la función de onda (11), estableció una atractiva analogía entre el FQHE y un plasma clásico de electrones de carga  $m$  que se repelen con un potencial logarítmico y que están inmersos en un fondo de carga positiva de densidad  $1/2\pi l_c^2$ . La energía potencial del plasma se minimiza y es estable cuando  $m = 1/\nu$ . Por otra parte numerosos estudios de Monte Carlo han demostrado que el estado fundamental del plasma es un líquido para  $m < 70$  y un cristal para  $m > 70$ . En este último caso se obtiene un cristal de Wigner donde

Figura 4

Versión artística del "piercing" de un electrón por un tubo de flujo magnético (Shapere y Wilczek). El resultado de esta operación es un estado ligado de un electrón y  $m$  vórtices que se comporta como un bosón. La condensación de estos bosones da lugar al estado de Laughlin que describe el FQHE con un factor de llenado  $\nu = 1/m$ .



las cargas están congeladas en los vértices de una red triangular. Esto explica la calificación de líquido del estado de Laughlin para valores bajos de  $m$ . Este líquido es además incompresible por lo que las excitaciones colectivas longitudinales, análogas a la propagación del sonido, poseen un gap  $\Delta$  no nulo.

Bertrand Halperin ha elaborado una sugerente interpretación de la función de onda de Laughlin que permite entender fácilmente las excepcionales propiedades de las excitaciones del FQHE. Según su interpretación los ceros de la función de onda (11) se deben a los cuantos de flujo magnéticos elementales  $\Phi_0 = hc/e$  que atraviesan perpendicularmente la superficie  $A$  del material. Un cuanto de flujo  $\Phi_0$  es la mínima cantidad de flujo magnético transportada por un vórtice. Un campo  $B$  que atraviesa una superficie de área  $A$  está formado, a nivel microscópico, por  $N_\Phi = BA/\Phi_0$  de esos vórtices. A la luz de estas consideraciones es posible identificar la densidad de Landau  $\rho = N_\Phi/A$  con la densidad de estos vórtices elementales, de forma que el factor de llenado  $\nu$  está dado por la relación microscópica

$$\nu = \frac{N_e}{N_\Phi} = \frac{\text{N. de electrones}}{\text{N. de vortices}} \quad (12)$$

Se puede demostrar que para  $\nu = 1/m$  se forma un estado ligado de un electrón y  $m$  vórtices elementales (ver figura 4), el cual se comporta de forma efectiva como un bosón. La función de onda de Laughlin describe el condensado de estos bosones de forma parecida a como la función de onda BCS describe el condensado de pares de Cooper de electrones.

Las excitaciones del estado de Laughlin se pueden ver como la creación de vórtices extra en ese condensado. Si extraemos un electrón del mismo, los  $m$  vórtices que estaban ligados a ese electrón se desligan entre sí, vagando por el material en forma de cuasiagujeros de carga efectiva  $-e/m$ . Similarmente si se añade un electrón al líquido éste se rompe en  $m$  cuasipartículas de carga  $e/m$ . La fragmentación de la carga ha sido observada experimentalmente por V. Goldman, B. Shu, M. Heiblum, C. Glatt y otros.

Hay más comprobaciones experimentales

de la teoría de Laughlin, como la existencia de un gap, sobre los que no nos extendemos aquí. Tan sólo mencionaremos brevemente algunos de los desarrollos generados por el trabajo de Laughlin y que continúan siendo investigados en la actualidad.

En primer lugar hay que citar la existencia de plateaus de Hall para otras fracciones de llenado  $\nu = p/q$ , que se han explicado a partir de una jerarquía de líquidos cuánticos incompresibles (Haldane, Halperin, Laughlin). Una propuesta muy interesante es la de que las cuasipartículas del FQHE no son ni bosones ni fermiones sino que obedecen una estadística fraccionaria, como la de los aniones (Leinaas, Myrheim, Wilczek). En conexión con esto último existe una descripción efectiva del FQHE mediante la teoría de Chern-Simons (Wen, Zee, etc). Más recientemente se han mostrado que las excitaciones del FQHE en el borde de las muestras no poseen gap, pudiendo ser descritas por líquidos de Luttinger quirales donde las cuasipartículas se mueven en una sola dirección. Este hecho permite relacionar el FQHE en la frontera con las teorías de campos cuánticos conformes que tanto desarrollo han tenido en los últimos años por su conexión con la Mecánica Estadística y las teorías de Cuerdas. Y así un largo etcétera.

Viendo todos estos desarrollos cabe augurar un próspero futuro al efecto Hall cuántico, aunque no nos atrevemos a predecir cuál será el contenido del "cuarto acto". ¿Será acaso la superconductividad de alta temperatura crítica como algunos, incluido Laughlin, han querido ver?. Parece que los vientos soplan en otra dirección. Ancho es el universo cuántico.



## REFERENCIAS

### Los artículos originales de los premios Nobel del QHE y el FQE son:

- D.C. Tsui, H.L. Störmer y A.C. Gossard, "Two-Dimensional Magneto-transport in the Extreme Quantum Limit", Phys. Rev. Lett. 48, 1559 (1982).
- R.B. Laughlin, "Anomalous Quantum Hall Effect: An incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations", Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983).
- K. v. Klitzing, G. Dorda y M. Pepper, "New Method for Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on the Quantized Hall Resistance", Phys. Rev. Lett. 45, 494 (1980).

### Sobre los autores

- Germán Sierra está en el Instituto de Matemáticas y Física Fundamental del CSIC en Madrid.
- Miguel Angel Martín-Delgado está en el Departamento de Física Teórica I de la Universidad Complutense de Madrid.

### Lecturas adicionales para audiencias generales son:

- "Splitting the electron", por B. Davis, New Scientist, 31 de Enero de 1998, pag. 36.
- "Fractionally charged quasiparticles signal their presence with noise", por G. P. Collins, Physics Today, Noviembre de 1997, pag. 17.
- "When the electron falls apart", por P. W. Anderson, Physics Today, Octubre de 1997, pag. 42.
- "Electrons in flatland", por S. Kivelson, D.H. Lee y S.C. Zhang, Scientific America, Marzo de 1996, pag. 64.
- "Composite Fermions: New particles in the fractional quantum Hall effect", por H. Störmer y D. Tsui, Physics News de 1994, American Institute of Physics 1995, pag. 33.
- "The fractional quantum Hall effect", por J.P. Eisenstein y H.L. Störmer, Science, 22 de Junio de 1990, pag. 1510.