SOBRE METALOGICA Y LOGICA TRIVALENTE*

E. Jaime Sarabia Alvarez-Ude
Universidad Complutense Madrid

O. INTRODUCCION

En este artículo intentamos presentar una serie de resultados en la metalógica de las lógicas trivalentes y, más concreto, de la lógica trivalente L3 definida por U. Blau en Blau 1978. El interés de este tipo de lógica multivalente es claro si se piensa en la riqueza formal de que goza y en sus posibilidades de aplicación al análisis lógico del lenguaje natural.

Frente a otros trabajos en lógicas multivalentes [1], nuestro objetivo aquí es establecer algunos resultados en el ámbito de lo que podríamos llamar la metalógica standard de las lógicas divergentes. Ciertos logros en metalógica parecen depender de rasgos que no son específicos de la lógica standard, sino que son generalizables a otros tipos de lógicas. En este marco general del estudio de las propiedades generales de esos sistemas que llamamos lógicas se inserta nuestro estudio [2].

La primera parte del artículo es una simple presentación de la lógica L3, presentación que es tan breve como permite la comprensión de lo que la sigue. No hay nada aquí que no esté ya en Blau 1978, obra a la que se

* El artículo recoge una parte del contenido de mi tesis doctoral, defendida en la Universidad Complutense de Madrid ante el tribunal presidido por el Dr. M. Garrido y con lo profesores Dr. A. García Suárez, Dr. P.M. Freire y Dr. J. Hierro como vocales. Desearía expresar aquí mi agradecimiento al profesor Dr. José Hierro de la Universidad Complutense, mi director de tesis, así como al Dr. M. Varga von Kibed y, de manera muy particular, al profesor Dr. Ulrich Blau, ambos de la Ludwig-Maximilian Universitat de Munich, por su ayuda durante la realización del trabajo. Durante el período de realización de la tesis disfruté de becas de la Fundación Oriol-Urquijo y del Deutscher Akademischer Austauschdienst. Conste también aquí mi agradecimiento a ambas instituciones.

[1] Cfr., por ejemplo, Rescher 1969.

[2] En las siguientes páginas se percibirá una fuerte inspiración de trabajos en este sentido de Smullyan.

remite al lector interesado en información más amplia. En la segunda parte se recogen unas primeras generalizaciones a la lógica trivalente de nociones utilizadas en lógica bivalente standard, básicamente, las nociones de conjunto-modelo y las de propiedad de consistencia y demostrabilidad analíticas. La tercera parte del trabajo está dedicada al estudio de ciertos temas básicos en la teoría de la demostración y/o en la teoría de modelos de L3. Tratamos aquí de la eliminabilidad de la regla de corte (Hauptsatz), el teorema de interpolación y el de consistencia. En rigor, tratamos de demostrar versiones adecuadas a L3 de los correspondientes teoremas en lógica bivalente de primer orden. Como elemento de apoyo en la demostración de estos teoremas introduzco un cálculo secuencial S3-S2 del que estudio la consistencia y suficiencia, como un ejemplo más de la utilidad de las proporciones de consistencia. Asimismo analizo brevemente la realación entre este cálculo y otros cálculos secuenciales adecuados a L3.

1. El lenguaje L3

1.1. Vocabulario, fórmulas

El vocabulario primitivo de L3 incluye las siguiente categorías sígnicas: 1) Para cada $n \geqslant 1$, un conjunto infinito enumerable de parámetros de predicado n-ádicos; 2) Un conjunto accesorio de parámetros de predicado monádicos, también infinito enumerable; 3) La constante de predicado '='; 4) Un conjunto infinito enumerable de variables de individuo; 5) el conjunto $\{ \neg, -, \wedge, \bigwedge \}$ de los juntores y el cuantor primitivos; 6) El operador iota ι; 6) paréntesis. Como signos definidos introduciremos luego los siguientes juntores y cuantores: $\top$, $\bot$, $+$, I, $\vee$, $\rightarrow$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\boxed{\iota}$, Δ, ∇.

Suponemos que los conjuntos a que hacemos alusión arriba así como los elementos de cada conjunto son disjuntos entre sí. En el metalenguaje utilizamos, entre otras, las siguientes convenciones: 1) P. Pred. es el conjunto aludido en 1), arriba. Designamos sus elementos con Q_i^k, k, $i \geqslant 1$. 2) P. Pred. A es el conjunto del punto 2), arriba. Sus elementos son designados por P_i^1, $i \geqslant 1$. Si no es necesario distinguir entre 1) y 2) o es claro por el contexto a qué nos referimos, utiliamos P_i^k, para todo tipo de parámetros de predicado. 3) Var. es el conjunto definido en 3). Sus elementos son designados con X_1, X_2, X_3, ... En vez de X_1, X_2, X_3 escribimos a menudo X, Y, Z. Las constantes lógicas, primitivas o definidas, así como el signo de igualdad aparecen autónimamente en el metalenguaje. Indicamos el uso —no la mención— de '=' en el metalenguaje separando este signo de sus argumentos con un espacio. La lógica del metalenguaje es bivalente. A lo largo del trabajo iremos definiendo otros signos del metalenguaje.

Como constantes lógicas del metalenguaje utilizamos y, no, o, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ y sus habituales lecturas en castellano.

El concepto de fórmula es similar al habitual, salvo en algunos puntos: debido a la ausencina de parámetros de individuo como signos primitivos de L3, sustituidos por cierto tipo de descripciones, en concreto, por descripciones de la forma $\iota XP^1_i X$, donde $P^1_i \in$ P.Pred.A., los términos de un lenguaje L3 son las variables y las descripciones. Las fórmulas se definen sobre la base de estas categorías con la ayuda del concepto auxiliar de pre-fórmula y pre-descripción que podríamos caracterizar, grosso modo, como fórmulas y descripciones —en sentido habitual— en que aparecen variables libres y/o cuantificaciones vacuas. En síntesis [3], las fórmulas elementales tienen a forma $P^k_i\ A_1 \ldots A_k$ o $A_i = A_j$, siendo $A_1, \ldots A_k$ descripciones. Las fórmulas complejas tienen o bien la forma 1) $\neg F$, $-G$, $(F \wedge G)$ con F, G, fórmulas, o bien 2) tienen la forma $\wedge XF[X]$ donde $F[X]$ es un predicado (Cfr. más abajo) en que X es la única variable libre. Llamamos fórmulas j-complejas a las fórmulas de tipo 1) y fórmulas q-complejas a las de tipo 2). Fórmulas j-elementales son las fórmulas no j-complejas. La nociones de variable libre / ligada, alcance de un cuantificador / descriptor, etc... se definen como de costumbre. Es característico de fórmulas y descripciones que en ellas no aparezcan variables libres ni cuantificaciones vacuas. Designamos com Frmla el conjunto de las fórmulas de L3. Designamos los elementos del conjunto Frmla con F, G, H, a menudo con subíndices. A, B, C, —también con subíndices— son metavariables para descripciones.

Utilizamos (autónimamente, en el metalenguaje) ciertos signos $*_1$, $*_2$, $*_n$, ... que llamamos marcadores. Por medio de ellos definimos los predicados, del modo siguiente: Sea F una fórmula. Si sustituimos en F las apariciones de las descripciones $A_1, \ldots A_k$ por marcadores $*_1, \ldots, *_k$, llamamos predicado k-ádico al resultado y lo designamos en el metalenguaje con $F^k[*_1, \ldots, *_k]$. Sea ahora $F^n[*_1, \ldots, *_n]$ un predicado n-ádico y $T_1, \ldots T_n$ variables o descripciones. Con $F_n[T_1, \ldots, T_n]$ designamos el resultado de sustituir cada aparición de $*_i$ en $F^n[*_1, \ldots, *_n]$ T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Siempre que utilizamos esta notación suponemos que $F^n[*_1, \ldots, *_n]$ está libre para $T_1, \ldots T_n$, es decir, suponemos que en $F_n[*_1, \ldots, *_n]$ no hay ningún $*_i$ en el dominio de un cuantor u operador iota que ligue una variable libre en T_i. Llamamos especialización de $\wedge XF[X]$ o $\iota XF[X]$ a toda fórmula $F[A]$, donde A es una descripción. Utilizamos las abreviaturas e_i, ιF para designar las descripciones $\iota XP^1_i[X]$, $\iota XF[X]$, donde $P^1_i \in$ P. Pred. A. Dada una descripción e_i ($e_i = \iota XP^1_i\ [X]$) decimos que e_i es nuevo para el conjunto de fórmulas M si el parámetro P^1_i no aparece en M.

[1] Un análisis más amplio de este punto así como del resto de lo tratado en el apartado I, se puede encontrar en Blau 1978.

A menudo realizamos demostraciones según el grado de las fórmulas *fuera de las descripciones*. Con este fin definimos la noción de grado de una fórmula F fuera de las descripciones [gr (F)], como sigue: $gr(P^k_i\ A_1, \ldots, A_k) = 1$; $gr(\neg G) = gr(-G) = gr(G) + 1$; $gr(G_1 \wedge G) = gr(G_1) + 1$ y $gr(\bigwedge XF[X] = gr(F[A]) + 1$, para una descripción A cualquiera.

Usamos en el metalenguaje el signo $\doteq$ para indicar la igualdad entre expresiones, es decir, entre secuencias de símbolos de L3.

Entre las constantes lógicas primitivas distinguimos dos negaciones. Primero la negación que simbolizamos con —, la negación fuerte, presupositiva, que podemos leer 'no'. Además la negación que simbolizamos con ¬, la negación débil, no presupositiva, que podemos leer como 'non' o 'no es verdad que'. $\wedge$ es la conjunción, con una semántica, como hemos de ver, igual a la de la conjunción trivalente de Lukasiewicz y $\bigwedge$ es el cuantor universal nominal, distinto al cuantor correspondiente en lógica bivalente por cuanto por medio de él se cuantifica también sobre objetos inexistentes, por así decir.

1.2. Semántica

Damos dos tipos de semántica para L3. La primera de ellas es una semántica de interpretaciones y la segunda, de valoraciones. Las dos definen los mismos conceptos semánticos, aunque sean formalmente distintas. Si bien la semántica de valoraciones es más fácil de manejar, en general, la primera ofrece, en cierto modo, una visión mejor de la estructura de L3 y es imprescindible en ocasiones.

Definición 1.1 Interpretación en L3 [4].

Sea *D*, en lo que sigue, un conjunto cualquiera, posiblemente vacío, {**v**, **f**, **i**} el conjunto de los valores de verdad verdadero, falso e indeterminado y *A* un subconjunto, posiblemente vacío, del conjunto de las descripciones de L3. φ es una función de interpretación de L3 sobre *D* si φ cumple las siguientes condiciones:

1) φ es una función suprayectiva del conjunto *A* en *D*. *A* es el conjunto de las descripciones referenciales, es decir, el conjunto de descripciones A tales que existe un $d \in D$ con $\varphi(A) = d$.

2) Para todo parámetro de predicado P^k existe $\varphi(P^k) = \langle\varphi(P^k)^+, \varphi(P^k)^-\rangle$ donde $\varphi(P^k)^+$ y $\varphi(P^k)^-$ son subconjuntos, disjuntos entre sí, de D^k, es decir, conjuntos de k-tuplos de elementos de D.

3) Para toda fórmula F de L3 existe $\varphi(F) \in \{\mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{i}\}$, cumpliéndose, además, lo siguiente:

[4] Cfr. Blau 1978, pp. 179-80; 188.

(3.1) Si $F \doteq P^k A_1 \ldots A_k$, $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si $A_1, \ldots, A_k$ son descripciones referenciales y $<\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_k)> \in \varphi(P^k)^+$. $\varphi(F) = \mathbf{f}$ si $A_1, \ldots, A_k$ son descripciones referenciales y $<\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_k)> \in \varphi(P^k)^-$. $\varphi(F) = \mathbf{i}$, en otro caso.

(3.2) Si $F \doteq A = B$, $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si A, B son descripciones referenciales y $\varphi(A) = \varphi(B)$; $\varphi(F) = \mathbf{f}$ si A y B son descripciones referenciales y $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ y $\varphi(F) = \mathbf{i}$ en otro caso.

(3.3) Si $F \doteq -G$, entonces $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si $\varphi(G) = \mathbf{f}$; $\varphi(F) = \mathbf{f}$ si $\varphi(G) = \mathbf{v}$ y $\varphi(F) = \mathbf{i}$, si $\varphi(G) = \mathbf{i}$.

(3.4) Si $F \doteq \neg G$, $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si $\varphi(G) = \mathbf{f}$ o $\mathbf{i}$; $\varphi(F) = \mathbf{f}$, en otro caso.

(3.5) Si $F \doteq G \wedge H$, entonces $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si $\varphi(G) = \varphi(H) = \mathbf{v}$; $\varphi(F) = \mathbf{f}$, si $\varphi(G) = \mathbf{f}$ o $\varphi(H) = \mathbf{f}$; $\varphi(F) = \mathbf{i}$ en otro caso.

(3.6) Si $F \doteq \bigwedge XG[X]$, entonces $\varphi(F) = \mathbf{v}$ si para toda descripción A, referencial o no, $\varphi(G[A]) = \mathbf{v}$; $\varphi(F) = \mathbf{f}$ si hay alguna descripción A tal que $\varphi(G[A]) = \mathbf{f}$; $\varphi(F) = \mathbf{i}$, en otro caso.

(3.7) Si las expresiones S_1 y S_2 son iguales o equivalentes por definición, entonces $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$.

(4) Para toda descripción de la forma $\iota XG[X]$ vale que si hay una descripción A y un elemento *d* de *D* tal que $\varphi(G[A]) = \mathbf{v}$ y para toda descripción C tal que $\varphi(G[C]) = \mathbf{v}$ entonces $\varphi(C) = d$, entonces $\iota XG[X]$ es referencial y $\varphi(\iota XG[X]) = d$. En otro caso $\varphi(\iota XG[X])$ queda indefinida y $\iota XG[X]$ no es referencial.

Quizá convenga hacer algunas observaciones a esta definición de interpretación. Primero de todo, nótese que el dominio de interpretación *D* puede ser vacío. Además, debido a la semántica, sustitutiva, de los cuantores, se precisa que todo elemento del dominio sea designado por, al menos, un designador, que en este caso es una descripción. Esto conlleva una limitación en la cardinalidad de D, puesto que no hay más que un conjunto infinito enumerable de descripciones. Esta dificultad se salva, sin mayores problemas, recurriendo a lenguajes cuya base es L3 que contienen un conjunto supletorio de «nombres», con la cardinalidad adecuada para el dominio de objetos de que se trate. Puesto que este tema no es de particular importancia en lo que sigue, no profundizaremos en su análisis [5].

No se exige en la definición de interpretación que toda descripción sea referencial. Es posible, pues, que haya «nombres» que no designan. Es esta otra característica importante de L3.

La interpretación de los parámetros de predicado es distinta a la habitual en la lógica standard puesto que se les atribuye pares de conjuntos de k-tuplos $<\varphi(P^k)^+, \varphi(P^k)^->$ donde $\varphi(P^k)^+$ es el dominio positivo del pará-

[5] Cfr. Blau 1978, pp. 250-252

metro P^k en la interpretación φ y $\varphi(P^k)^-$ es el dominio negativo del parámetro en esa interpretación φ. Intuitiva e informalmente diríamos que el dominio positivo de P^k esta formado por el conjunto de k-tuplos que, de manera clara y precisa, están en la relación P^k, mientras que el dominio negativo de P^k representaría la clase de k-tuplos que, de manera no menos clara y precisa, no están en la relación P^k. Obviamente existe un conjunto $D^k - [\varphi\,(P^k)^+ \cup \varphi(P^k)-]$ que podemos designar con $\varphi(P^k)^0$, el dominio neutro de P^k, y que representa la zona de vaguedad potencial del predicado P^k.

La condición (3) puede entenderse como principio de trivalencia: toda fórmula tiene un valor de verdad en el conjunto **v**, **f**, **i**. La condición 3.1 afirma que las fórmulas elementales son indeterminadas si alguna de las descripciones que en ella aparecen no es referencial o bien, siendo todas referenciales, el n-tuplo que designan pertenece al dominio neutro del predicado. Una fórmula elemental es verdadera o falsa según que el n-tuplo designado en φ en las descripciones que en ella aparecen pertenezca al dominio positivo o negativo del predicado, obviamente bajo la condición de que las descripciones sean referenciales. Nótese que el dominio neutro del predicado de igualdad es vacío: '=' designa un conjunto en sentido clásico en toda interpretación.

Como hemos dicho, distinguimos dos tipos de negación, la negación fuerte $-$, presupositiva, y la negación débil, $\neg$, no presupositiva. Estos dos tipos de negación pretenden reflejar, desde el punto de vista de las aplicaciones de la lógica L3 el análisis del lenguaje natural, una ambigüedad en el uso de la negación en este tipo de lenguajes: unas veces, la mayoría, la negación se utiliza para, manteniendo la presuposición del enunciado, negar el predicado del mismo, mientras que en otros casos la negación opera negando el cumplimiento de la presuposición.

Nótese que la interpretación de los cuantores es sustitutiva, de donde se sigue, como es sabido, que L3, en la forma aquí presentada, no es compacta de modo general, puesto que el conjunto

$$\{\ P^1_1(A_1),\ P^1_1(A_2),\ \ldots,\ P^1_1(A_n),\ \ldots\ \neg\wedge P^1_1(X)\ \}$$

es insatisfacible sin que haya ningún subconjunto finito suyo que lo sea. L3 sí es compacta, en cambio, respecto a conjuntos paramétricamente limitados (cfr. más abajo p. 25), entendiendo por tales a los conjuntos M de fórmulas tales que hay un conjunto infinito de descripciones que *no* aparecen en M. Esta dificultad, al igual que la que apuntábamos antes respecto a la cardinalidad del dominio *D* y otras, relacionadas con ella y con la suficiencia de los cálculos, se puede salvar mediante ciertas modificaciones en la definición de L3 en las que no entraremos aquí [6].

---

[6] Ibidem

Junto con la semántica de interpretaciones que acabamos de definir precisamos una semántica de valoraciones, entendiendo por *valoración* [7] (o L3-valoración) una función β del conjunto de las fórmulas en el conjunto { **v**, **f**, **i** } que satisface las siguientes condiciones:

(1) Si F es una fórmula elemental, $\beta\,(F) \in \{\mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{i}\}$.

(2) - (6): igual que las condiciones (3.3) - (3.7) de la definición de interpretación (def. 1), cambiando las alusiones a interpretaciones por alusión a valoraciones.

(7) $\beta\,(\mathrm{I}P^k(A) \rightarrow A = A) = \mathbf{v}$

(8) $\beta\,((A = A \wedge B = B) \rightarrow \mathrm{I}A = B) = \mathbf{v}$

(9) $\beta\,((A = B \wedge F(A)) \rightarrow F(B)) = \mathbf{v}$

(10) $\beta\,((\iota X F(X) = A) \rightarrow (F(A) \wedge \bigwedge X(F(X) \rightarrow X = A)) = \mathbf{v}$

A pesar de las claras diferencias que existen entre los conceptos de valoración e interpretación, las dos semánticas que se pueden construir basándose en uno u otro concepto coinciden, en el sentido de que las nociones de verdad lógica, consecuencia lógica, etc., son extensionalmente idénticas ya se definan sobre la base del concepto de satisfacción o sobre el de interpretación. Esto es consecuencia del hecho de que toda interpretación restringida al conjunto de las fórmulas es una valoración y toda valoración es extensible a una interpretación [8].

Definimos ahora una serie de conceptos semánticos fundamentales. Utilizamos el concepto de interpretación en esta definición aunque, por lo que acabamos de decir, podríamos definirlos, casi de la misma manera, por medio de la noción de valoración. Utilizamos en lo que sigue M, N, con subíndices, en ocasiones, como metavariables para conjuntos de fórmulas de L3. :⇔ y := indican, respectivamente, la equivalencia y la igualdad por definición.

Definición 1.2 Sea φ una interpretación para L3 y $\{F\} \cup M \subseteq$ Frmla. Entonces,

(1) φ satisface M: ⇔ Para toda fórmula F en M, $\varphi\,(F) = \mathbf{v}$.

(2) φ satisface F: ⇔ $\varphi\,(F) = \mathbf{v}$.

(3) F es l-verdadero en L3, F es válido en L3, $\Vdash_{L3} F$:⇔ $\forall\varphi$, $\varphi\,(F) = \mathbf{v}$.

(4) F es l-falso, F es contradictorio en L3: ⇔ $\forall\varphi$, $\varphi(F) = \mathbf{f}$.

(5) F es l-indeterminado en L3: ⇔ $\forall\varphi$, $\varphi(F) = \mathbf{i}$.

(6) F es consecuencia lógica de M en L3, $M \Vdash_{L3} F$: ⇔ Toda interpretación que satisface a M satisface a F.

(7) $G \Vdash_{L3} F$: ⇔ F es consecuencia lógica de {G}.

(8) F es l-equivalente a G: ⇔ $\forall\varphi$, $\varphi(F) = \varphi(G)$.

(9) F es l-bicondicional con G: ⇔ $F \Vdash_{L3} G$ y $G \Vdash_{L3} F$.

---

[7] Blau 1978, pp. 173, 180 y 191.

[8] Blau 1978, pp. 190-193.

Las siguientes proposiciones son consecuencia trivial de las anteriores definiciones:

Proposición 1.3 Sea $M \cup \{F, F_1, \ldots, F_n\} \subseteq$ Frmla. Entonces se cumple

(1) $\Vdash_{L3} F \Longleftrightarrow \phi \Vdash_{L3} F$

(2) $M \Vdash_{L3} F \to M \cup \{\neg F\}$ es insatisfacible en L3

(3) $F_1, \ldots, F_n \Vdash_{L3} F \Longleftrightarrow \Vdash_{L3} F_1 \to (F_2 \to, \ldots, \to (F_n \to F) \ldots)$

(4) M es satisfacible $\Longleftrightarrow$ Hay al menos una fórmula F tal que no ocurre que $M \Vdash_{L3} F$.

Establecemos finalmente las definiciones de los signos definidos, dando a la vez su semántica.

Definición 1.4

Sean F, G fórmulas o prefórmulas y F[X] un predicado en que al menos X aparece libre. Valga entonces

(1) $TF :\Longleftrightarrow - \neg F$. «F es verdadero»

$$\varphi(TF) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(2) $\perp F :\Longleftrightarrow T - F$. «F es falso»

$$\varphi(\perp F) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(3) $+F :\Longleftrightarrow (\neg F \wedge \neg - F)$. «F es indeterminado»

$$\varphi(+F) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{i} \\ \mathbf{f}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(4) $IF :\Longleftrightarrow - + F$. «F es verdadero o falso»

$$\varphi(IF) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{v} \text{ o } \varphi(F) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(5) $F \vee G :\Longleftrightarrow -(- F \wedge -G)$. «F o G»

$$\varphi(F \vee G) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{v} \text{ o } \varphi(G) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si } \varphi(F) = \varphi(G) = \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(6) $F \rightarrow G :\Leftrightarrow (\neg F \vee G)$. «si F, entonces G»

$$\varphi(F \rightarrow G) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) \neq \mathbf{v} \text{ o } \varphi(G) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{v} \text{ y } \varphi(G) = \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ si } \varphi(F) = \mathbf{v} \text{ y } \varphi(G) = \mathbf{i} \end{cases}$$

(7) $F \leftrightarrow G :\Leftrightarrow (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$. «F si y solo si G»

$$\varphi(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) \neq \mathbf{v} \text{ y } \varphi(G) \neq \mathbf{v} \text{ o } \varphi(F) = \varphi(G) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si uno de los valores } \varphi(F), \varphi(G) \text{ es } \mathbf{v} \text{ y el otro es } \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ si uno de los dos valores } \varphi(F), \varphi(G) \text{ es } \mathbf{v} \text{ y el otro } \mathbf{i}. \end{cases}$$

(8) $F \equiv G :\Leftrightarrow (\top F \rightarrow \top G) \wedge (\perp F \rightarrow \perp G)$. «F equivale a G»

$$\varphi(F \equiv G) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } \varphi(F) = \varphi(G) \\ \mathbf{f}, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

(9) $\boxed{\,\cdot\,} :\Leftrightarrow \bigwedge X(X = X)$. «formula indeterminada»

$\varphi\boxed{\,\cdot\,} = \mathbf{i}$

(10) $\bigvee XF[X] :\Leftrightarrow - \bigwedge X - F(X)$. $\bigvee$ es el cuantor nominal existencial: «algún X es F»

$$\varphi(\bigvee XF[X]) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si hay una descripción A con } (F(A)) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si para toda descripción A, } \varphi(F(A)) = \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(11) $\Delta XF[X] := \bigwedge X(X = X \rightarrow F(X))$. es el cuantor *referencial* universal. «todo lo existente es F»

$$\varphi(\Delta XF[X] = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si para toda descripción A tal que } \varphi(A = A) = \mathbf{v}, \text{ es decir, por toda descripción referencial, se cumple que } \varphi(F[A]) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si hay una descripción referencial A tal que } \varphi(F[A]) = \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

(12) $\nabla XF[X] :\Leftrightarrow \bigvee X(X = X \wedge F[X])$. es el cuantor *referencial* existencial «hay algo existente que es F»

$$\varphi(\nabla X F[X] = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si hay una descripción referencial A tal que } \varphi\,(F(A)) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f}, \text{ si para toda descripción referencial A, } \varphi\,(F(A)) = \mathbf{f} \\ \mathbf{i}, \text{ en otro caso }^{9} \end{cases}$$

2. CONJUNTOS-MODELOS Y PROPIEDADES DE CONSISTENCIA

2.1. Notación [10]

a	**a_1**	**a_2**
¬− ¬− F	F	F
F ∧ G	F	G
¬− (F ∧ G)	¬ − F	¬− G

b	**b_1**	**b_2**
¬− = ¬− F	¬ F	¬ F
− (F ∧ G)	− F	− G
¬(F ∧ G)	¬ F	¬ G

c	**c[A]**
⋀XF[X]	F[A]
¬− ⋀XF[X]	¬− F[A]

d	**d[A]**
−⋀XF[X]	−F[A]
¬ ⋀XF[X]	¬F[A]

[9] Para esta definición y las proposiciones precedentes, vease Blau 1978, pp. 173-5; 189-90.

[10] Un contexto general en que enmarcar este tipo de notación puede encontrarse en Smullyan 1968 y 1970.

Entiéndase que, en los cuadros anteriores y en lo que sigue, $\neg\neg$ F es una abreviatura de las fórmulas $--$ F, $-\neg$ F, $\neg\ \neg$F. Lo mismo vale, mutatis mutandis, de $\neg = -$ F y otras notaciones similares.

Llamaremos fórmulas de tipo *conjuntivo* a las fórmulas de tipo **a** y **c**. Son fórmulas de tipo *disyuntivo* las de tipo **b** y **d**. Los *descendientes* de una fórmula de tipo **a** (respectivamente, de tipo **b**, **c**, **d**) son las correspondientes fórmulas de tipo $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ (respectivamente, las correspondientes fórmulas de tipo $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, **c**(A), **d**(A).

La relación semántica fundamental entre estos tipos de fórmulas se establece en la siguiente

Proposición 2.1 Sea β una valoración de L3. Si F es una fórmula de tipo conjuntivo, β (F) = **v** si β(G) = **v** para todo descendiente G de F. Si F es una fórmula de tipo disyuntivo, β(F) = **v** si β(G) = **v**, para al menos un descendiente G de F.

La proposición anterior es obvia, a la vista de las fórmulas que designamos con **a, b, c, d,** la semántica antes definida y la noción de descendiente.

Consideramos ahora una consecuencia de la proposición anterior. Nótese en lo que sigue que si M es un conjunto de fórmulas y F una fórmula, escribimos {M, F} para designar el conjunto M **U** {F}.

Proposición 2.2 Sea M un conjunto finito, posiblemente vacío, de fórmulas. Entonces,
(1) Si F es una **a** ó **c** y F_i es un descendiente de F y si {M, F} es satisfacible, entonces {M, F, F_i} es satisfacible.
(2.1.) Si {M, **b**} es satisfacible, entonces {M, **b**, $\mathbf{b}_1$} es satisfacible o {M, **b**, $\mathbf{b}_2$} es satisfacible.
(2.2) Si {M, **d**} es satisfacible, entonces {M, **d**, **d**[e_i]} es satisfacible, siempre que e_i sea nuevo para {M, **d**}.

Demostración: Los puntos (1) y (2.1) son consecuencia directa de la proposición anterior. La prueba del punto (2.2) precisa del teorema de generalización [11], que utilizamos en la siguiente versión: Si M es un conjunto finito de fórmulas, quizá vacío, y e_i no aparece en M ni en $\wedge$ XF[X], entonces M $\Vdash_{L3}$ F[e_i] $\Rightarrow$ M $\Vdash_{L3}$ $\wedge$ XF[X]. Basándonos en este teorema justificamos (2.2) para el caso en que **d** es una fórmula $\neg\wedge$ XF[X]: Si {M, $\neg\wedge$ XF[X], $\neg$F(e_i)} es insatisfacible, entonces M, $\neg - \wedge$XF{X] $\Vdash_{L3}$ F[e_i], de donde, por el teorema de generalización, se sigue que M,

[11] Blau 1978, p. 212.

$\neg \bigwedge XF(X) \Vdash_{\overline{L3}} \bigwedge XF[X]$ o, de modo equivalente, que $\{M, \neg\bigwedge XF[X]\}$ es insatisfacible, contra el supuesto de (2.2). El caso en que **d** es $- \bigwedge XF(X)$ se trata de modo similar.

El siguiente lema, que utilizaremos más tarde en alguna demotración, es fácil de justificar por inducción según el grado de las fórmulas fuera de las descripciones.

Lema 2.3 Toda fórmula F de L3 que contenga sólo signos primitivos o bien (1) es elemental o bien (2) es de la forma $- G$, $\neg G$, $\neg - G$, con G elemental o bien (3) es una **a, b, c, d**.

Además de la notación hasta ahora introducida usamos las siguientes abreviaturas metalingüística:

H_1 está por el esquema metalingüístico$\mathrm{I}\, P^k(A) \rightarrow A = A$

H_2 está por el esquema $(A = A \wedge B = B) \rightarrow (\mathrm{I}A = B)$

H_3 está por el esquema $(A = B \wedge F(A)) \rightarrow F(B)$

H_4 está por el esquema $(\iota XF(X) = A) \rightarrow (F(A) \wedge \bigwedge X(F(X) \rightarrow X = A)$

2.2. *El cálculo B3* [12]

Presentamos a continuación, como apoyo intuitivo a la notación presente y a alguna de las proposiciones que afirmaremos luego, una formulación de un cálculo de árboles para L3.

Suponemos definidas, de la manera habitual, las nociones de árbol de fórmulas, rama, camino a una fórmula, etc... Consideremos las siguientes reglas de deducción:

RBa $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}_i (i = 1, 2)}$ RBb $\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2}$ RBc $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}[A]}$

RBd $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}[e_i]}$ siendo nuevo e_i para el conjunto de supuestos y los predecesores de $\mathbf{d}(e_i)$.

RBH$_i$ H_i (i = 1, 2, 3, 4).

Las ideas subyacentes a estas reglas pueden expresarse diciendo que, dado un camino C_F a una fórmula F en un árbol B, si en el conjunto C_F^* de los puntos de C_F aparece una fórmula de tipo conjuntivo, C_F puede pro-

[12] El cálculo B3 ha sido estudiado en Blau 1978, pp. 230 ss.

longarse por medio de uno cualquiera de los descendientes de esa fórmula. Si en C_I^* aparece un fórmula **b**, F puede convertirse en un punto de ramificación dual con dos sucesores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$. Si en C_I^* aparece una **d**, C_I puede prolongarse por medio de un fórmula $d[e_i]$, bajo la cautela expresada en la formulación de la regla RB**d**, RBH_i indica que una fórmula de tipo H_i puede ser el sucesor de cualquier fórmula en un árbol así como el origen de cualquier árbol.

Podemos ahora indicar, esquemáticamente, qué es un árbol $B_{M^\circ, F}$ para la fórmula F a partir del conjunto finito M° de supuestos, diciendo que $B_{M^\circ, F}$ es un árbol de fórmulas dual, que tiene como origen a F y en el que cada sucesor G de un punto G_1 en $B_{M^\circ, F}$ es o bien un elemento de M° o bien es la conclusión de una de las anteriores reglas cuya premisa aparece en el camino a G_1 en $B_{M^\circ, F}$. Como de costumbre, una deducción en B3 para F a partir del conjunto M es un árbol cerrado $B_{M^\circ, \neg F}$ (es decir, un árbol tal que para cada una de sus ramas R hay al menos una fórmula G con $\{G, \neg G\} \subseteq R^*$) para $\neg F$ a partir de un subconjunto finito M° de M.

La corrección de B3 se sigue de la proposición 2.2, como sigue: observemos primero que si el conjunto $\{M^\circ, \neg F\}$ es satisfacible entonces todo árbol $B_{M^\circ, \neg F}$ tiene al menos una rama no cerrada. Pues supongamos que no la tiene. Entonces toda rama R de $B_{M^\circ, \neg F}$ es tal que el conjunto R^* de los puntos de R contiene un subconjunto $\{G, \neg G\}$ y, en consecuencia, es insatisfacible. Ahora bien, si $\{M, \neg F\}$ es satisfacible, $\neg F$ lo es también y para todo punto G_1 de $B_{M^\circ, F}$ vale que si G_1 no es un punto final, entonces hay al menos un posible sucesor G_2 de G_1 tal que $[C_{G1}^*, G_2]$ es satisfacible, por la definición de árbol para una fórmula, las reglas de deducción de B3 y la proposición 2.2. Por tanto existe al menos una rama de $B_{M^\circ, \neg F}$ que es satisfacible y, por tanto, no es cerrada. La situación, entonces, es la siguiente. Supuesto que $M \vdash_{B3} F$, existe un árbol $B_{M^\circ, \neg F}$ con supuestos en M°, un subconjunto finito de M. Todas las ramas de $B_{M^\circ, \neg F}$ son cerradas. Por lo dicho anteriormente, $\{M^\circ, \neg F\}$ es insatisfacible y, con ello, $\{M, \neg F\}$. Por lo tanto, $M \Vdash_{L3} F$.

Mostraremos más adelante la suficiencia [13] de B3, como una consecuencia del teorema de unificación.

2.3 Conjuntos-modelo trivalentes

Introducimos en lo que sigue la noción de conjunto-modelo en la lógica trivalente L3. Como hemos de ver, la notación antes introducida,

[13] Utilizo suficiencia en sentido de completud, completitud, etc. Sigo en este punto la terminología del Prof. Mosterín en Gödel 1981.

extensión de la utilizada por Smullyan, pone de manifiesto la similitud entre los concepto de conjunto-modelo en lógica bivalente [14] y trivalente. Los conjuntos-modelo —como los conjuntos godelianos o sistemas deductivos no contradictorios y completos de Tarski [15], de los que son una debilitación— cumplen una misión esencial en teoría de modelos: a través de una u otra versión del lema de Hintikka, en el caso de los conjuntos-modelo, o del teorema de suficiencia de Gödel, en el caso de los conjuntos godelianos, se establece una propiedad semántica, la satisfacibilidad, respecto a conjuntos de fórmulas definidos de modo puramente sintáctico. Estudiamos a continuación esta propiedad en el caso de los conjuntos-modelo trivalentes.

2.4. *Definición* Sea M un conjunto de fórmulas de L3. Por definición, M es un conjunto-modelo, si expresadas las fórmulas de M por medio de signos primitivos, M cumple las siguientes condiciones:
(1) No hay fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$.
(2) Si $\mathbf{a} \in M$, entonces $\mathbf{a}_1 \in M$ y $\mathbf{a}_2 \in M$.
(3) Si $\mathbf{b} \in M$, entonces $\mathbf{b}_1 \in M$ o $\mathbf{b}_2 \in M$.
(4) Si $\mathbf{c} \in M$, entonces $\mathbf{c}[A] \in M$, para toda $A \in$ Des.
(5) Si $\mathbf{d} \in M$, entonces $\mathbf{d}[A] \in M$, para al menos $A \in$ Des.
(6) $H_i \in M$, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Dicho de otra manera, un conjunto M de fórmulas es un conjunto-modelo si expresado en términos primitivos cumple (1), (ii), (iii), y (6):

(ii) Si M contiene una fórmula de tipo conjuntivo, M contiene también a todos sus descendientes.
(iii) Si M contiene una fórmula de tipo disyuntivo, M contiene también al menos a uno de sus descendientes.

Como decíamos, la noción de conjunto-modelo es una debilitación de la de conjunto gödeliano. Un conjunto godeliano es un conjunto consistente y completo (es decir, si M es un conjunto godeliano en lógica standard, para toda fórmula F, $F \in M$ sii $\neg F \notin M$) y cerrado para la deducción en sistemas adecuados. Un conjunto-modelo es consistente pero no necesariamente completo y no tiene que estar cerrado para la deducción. Es fácil mostrar, sin embargo, que todo conjunto-modelo está contenido en al menos un conjunto gödeliano.

La propiedad esencial de los conjuntos-modelo es su satisfacibilidad, que se afirma en la siguiente proposición:

[14] Véase, por ejemplo, Smullyan 1968, p. 57, Hintikka 1955.
[15] Cfr. Tarski 1935, p. 189.

Proposición 2.5

Todo conjunto-modelo es satisfacible en L3.

Demostración [16]: Sea M un conjunto-modelo. Sea β una valoración tal que

$$\text{(1) para toda fórmula elemental F, } \beta(F) = \begin{cases} \mathbf{v}, \text{ si } F \in M \\ \mathbf{f}, \text{ si } -F \in M \\ \mathbf{i}, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

(2) el resto de las fórmulas se valoran en β según los puntos (2) - (6) de la definición de valoración.

β valora unívocamente toda fórmula de L3 puesto que cumple las condiciones (2) - (6) de la def. de valoración. Mostramos ahora que β satisface M y con ello que $\beta(H_i) = \mathbf{v}$, para toda fórmula H_i, cumpliendo así las condiciones restantes de la def. de valoración. La demostración es por inducción según el grado de las fórmulas fuera de las descripciones, apoyándonos en el lema 2.3. Sea $F \in M$. Entonces, (B.I.) si F es elemental, entonces $\beta(F) = \mathbf{v}$, por def. de β.

(P.I): Supuesto que para toda fórmula H, con $gr(H) < n$, si $H \in M$, entonces $\beta(H) = \mathbf{v}$, demostramos la proposición para F, con $gr(F) = n$.

1. Si (1.1) $F \doteq \neg G$, con G elemental, entonces, por def. 2.4, $G \in M$. Por tanto, $\beta(G) \neq \mathbf{v}$ y $\beta(\neg G) = \mathbf{v} = \beta(F)$. Los casos en que (1.2) $F \doteq \neg - G$, con G elemental y (1.3) $F \doteq -G$, con G elemental, se tratan de manera similar.

2. Si F es una **a, b, c** ó **d**, entonces F es una fórmula de tipo conjuntivo o disyuntivo. Todo descendiente F_i de F es de grado menor que F. Si F es de tipo conjuntivo, todos sus descendientes están en M. Por supuesto de inducción, todos ellos son verdaderos en β y por la Prop. 2.1, $\beta(F) = \mathbf{v}$. Si F es de tipo disyuntivo, por la Def. 2.4 al menos uno de sus descendientes está en M y es verdadero, por supuesto de inducción. Por la misma proposición 2.1, $\beta(F) = \mathbf{v}$, también en este caso. Además, toda fórmula H_i está en M, por (6) en la Def. 2.4 y, por lo dicho arriba, $\beta(H_i) = \mathbf{v}$. Luego β es una valoración que satisface M, como queríamos demostrar.

La proposición 2.5 no puede llevarse hasta la afirmación de que conjunto-modelo y conjunto satisfacible coincidan extensionalmente. Es obvio que hay conjuntos, por ejemplo $\{(F \wedge G)\}$ que son satisfacibles y no son conjuntos-modelos. Si se puede afirmar, en cambio, la siguiente:

[16] La demostración es muy similar a la que aparece en Blau 1978, pp. 227 ss.

2.6 Proposición

Si N es un conjunto satisfacible de fórmulas de L3, entonces hay al menos un conjunto-modelo M tal que N $\subseteq$ M.

Demostración: Sea β una valoración que satisface N. Sea M el conjunto de las fórmulas verdaderas en esa valoración. Es claro que N es un subconjunto de M y que M es un conjunto-modelo: no hay ninguna valoración β tal que $\beta(F) = \mathbf{v}$ y $\beta(\neg F) = v$. El resto de las condiciones de la definición de conjunto-modelo se siguen de la prop. 2.1 y la definición de valoración.

2.4. Propiedades trivalentes de consistencia analítica

Definimos en este apartado una clase de clases de conjuntos de fórmulas a cuyos elementos llamamos propiedades trivalentes de consistencia analítica o simplemente propiedades de consistencia. Su propiedad fundamental, la satisfacibilidad de todo conjunto que tenga una propiedad de consistencia, se afirma en lo que llamamos teorema de unificación [17]. Dada una propiedad E de conjuntos de fórmulas, decimos que E es de *carácter finito* si M $\in$ E sii todo subconjunto finito de M tiene la propiedad E.

Definición 2.7
Sea E una propiedad de carácter finito de conjuntos de fórmulas de L3 en donde no aparecen signos definidos. E es, por definición, una propiedad trivalente de consistencia analítica si para todo conjunto M de fórmulas de L3 tal que M $\in$ E, se cumple:

(1) No hay fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq$ M.
(2) Si $\mathbf{a} \in$ M, entonces $\{M, \mathbf{a}_1\} \in$ E y $\{M, \mathbf{a}_2\} \in$ E.
(3) Si $\mathbf{b} \in$ M, entonces $\{M, \mathbf{b}_1\} \in$ E o $\{M, \mathbf{b}_2\} \in$ E.
(4) Si $\mathbf{c} \in$ M, entonces $\{M, \mathbf{c}[A]\} \in$ E, para toda A $\in$ Des.
(5) Si $\mathbf{d} \in$ M, entonces $\{M, \mathbf{d}[e_i]\} \in$ E, para todo e_i nuevo en M.
(6) $\{M, H_i\} \in$ E ($i = 1, 2, 3, 4$).

La proposición que sigue asegura la satisfacibilidad de los conjuntos paramétricamente limitados que tengan una propiedad de consistencia.

[17] Sobre propiedades de consistencia y el teorema de unificación en lógica standard, véase Smullyan 1968, pp. 65-8 y 96-97.

Proposición 2.8. Teorema de unificación
Sea $M^* \subseteq$ Frmla, con M^* paramétricamente limitado y sea E una propiedad de consistencia. Entonces,
si $M^* \in E$, entonces M^* es satisfacible en L3.

Llamamos conjunto de los *sucesores* de un conjunto de fórmulas M al más pequeño conjunto $\tilde{N}$ que contiene a M y es tal que si $F \in \tilde{N}$, los descendientes de F están en $\tilde{N}$. Diremos que un conjunto M es E-consistente si $M \in E$.

Demostración de la prop. 2.8.
Consideramos dada una enumeración $\{F_i\}_{1 \leqslant i}$ del conjunto de los sucesores de $M \cup \{F \mid F \doteq H_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\}$. Definimos una secuencia de conjuntos

$$N_o \cup N_1 \cup \ldots N_n \cup N_{n+1} \cup \ldots$$

tal que $N_o = M$ y supuesto definido N_n

$$N_{n+1} = \begin{cases} \{N_n, F_{n+1}\}, \text{ si } \{N_n, F_{n+1}\} \in E \text{ y } F_{n+1} \text{ no es } \mathbf{d}. \\ \{N_n, F_{n+1}, F[e_i]\} \text{ si } F_{n+1} \text{ es } \mathbf{d}, \text{ siendo } F[e_i], \text{ su } \mathbf{d}[e_i], e_i \text{ no aparece} \\ \qquad \text{en fórmulas de } \{N_n, F_{n+1}\} \text{ y } \{N_n, F_{n+1}\} \in E. \\ N_n, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Consideramos $M = \bigcup_{i \in \omega} N_i$; Afirmamos que 1) M es máximamente consistente entre los conjuntos de sucesores de $M \cup \{F \mid F = H_i\}$. 2) M es un conjunto modelo.

1) M es E-consistente: Sea M^o un subconjunto finito de M. Hay un j tal que $M^o \subseteq N_j$. $N_j \in E$, por construcción. Por ser E de carácter finito, $M^o \in E$ y $\overline{M} \in E$. M es maximal entre los subconjuntos E-consistentes del conjunto de sucesores que consideramos: si $\{M, G\} \in E$ y G es un sucesor de $M \cup \{F \mid F \doteq H_i\}$, G será F_h para un h en la enumeración $\{F_i\}$ $1 \leqslant i$. Entonces $N_{h-1} \in E$, por ser E de carácter finito y $N_h = H_{h-1} \cup \{G\}$ y, con ello $G \in M$.

2) M es un conjunto-modelo: Puesto que $M \in E$, cumple la condición (1) de la definición de conjunto-modelo. Sea F una **a** y G una $\mathbf{a}_i$, i = 1, 2. Entonces, si $\mathbf{a} \in M$, $\{M, \mathbf{a}_i\} \in E$, (i = 1, 2), por la condición (2) de la def. 2.9. Por la maximalidad de $\{M, \mathbf{a}_i\} \in M$. Un razonamiento similar vale para **b, c** y sus descendientes. Si F es una **d** y $F \in M$, $\{M, F\} \in E$ y supuesto que F es F_h en $\{F_i\}_{1 \leqslant i}$, $\{N_{h-1}, F\} \in E$, por ser E de carácter finito. Puesto que N_{h-1} es parámetricamente limitado —pues lo es

N_0 y con él todo N_n—existe e_i que no aparece en $\{N_{h+1}, F\}$. Entonces $N_h = \{N_{h-1}, F, F(e_i)\}$ y $\mathbf{d}[e_i] \in M$, para al menos una e_i.

Es claro, además, que toda H_i está en M. Podemos afirmar, en consecuencia, que M es un conjunto-modelo.

Por la proposición 2.5 podemos afirmar que M es satisfacible. Puesto que $M^* \subset M$, M^* es satisfacible también, como queríamos demostrar.

Quisieramos añadir dos únicos puntos de comentario a lo que precede. En primer lugar, hacer notar que «ser un conjunto-modelo» no es una propiedad de consistencia: Sea M un conjunto-modelo, P^1 un parámetro de predicado no accesorio y supongamos que $- \bigwedge X - P^1[X] \in M$. Si «ser un conjunto-modelo» fuera una propiedad de consistencia, por la condición (5) de su definición, todas las fórmulas de la forma $- - P^1(e_i)$ con e_i nuevo para M cumplirían que $\{M, - - P^1(e_i)\}$ es un conjunto-modelo. Pero esto no ocurre necesariamente, puesto que $P(e_i)$ puede no aparecer en $\{M, - - P^1(e_i)\}$ contra lo que exige la condición (2) de la definición 2.4.

2.5. Algunas consecuencias del teorema de unificación

Mostramos, en primer lugar, que el cálculo B3 a que antes hemos aludido es suficiente. Consideremos la siguiente propiedad E_0 de conjuntos de fórmulas: $M \in E_0$ si para todo subconjunto finito M^0 de M no hay un árbol cerrado B_{M^0} con supuesto en M^0. Es fácil comprobar que E_0 es una propiedad trivalente de consistencia analítica.

(1): Si hay una fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$, entonces hay un subconjunto finito $\{G, \neg G\}$ de M y un árbol $B_{\{G, \neg G\}}$, con lo cual $M \in E_0$. Se cumple, por tanto, la condición (1) de la def. 2.7.

(2) y (4): Si $M^0 \subseteq M$, F es una fórmula de tipo conjuntivo y F_i es un descendiente de F tal que hay un árbol B_{M^0, F_i} que es cerrado, entonces si $F \in M$, hay, obviamente, un árbol $B_{M^0, F}$ con $\{M^0, F\} \subseteq M$ y $\{M^0, F\}$ finito. Por tanto, $M \in E_0$. Luego se cumplen las condiciones (2) y (4) de la def. 2.7. De modo similar se comprueba que se cumplen el resto de las condiciones de la def. de propiedad de consistencia. Podemos entonces justificar la suficiencia (restringida a conjuntos paramétricamente limitados) de B3, como sigue:

Proposición 2.9
Sea M^* un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío y paramétricamente limitado. Entonces,
$M^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow M^* \vdash_{B3} F$.

Demostración: Si $M^* \Vdash_{L3} F$, entonces $\{M^*, \neg F\}$ es insatisfacible y, por el teorema de unificación, dado que E_0 es una propiedad de consistencia, $\{M^*, \neg F\} \notin E_0$, decir, hay un subconjunto finito $\{M_0, \neg F\}$ de $\{M^*,$

$\neg$ F} y un árbol $B_{M^o, \neg F}$ que está cerrado. Por definición de deducción en B3, M* $\vdash_{B3}$ F.

La suficiencia de B3 en sentido general, es decir, para conjuntos cualesquiera, se prueba por métodos no mucho más complicados. No entramos aquí en el tema [18].

En segundo lugar vamos a probar que L3, si bien no es compacta de modo general, si lo es respecto a conjuntos paramétricamente limitados. Utilizando la terminología de van Fraasen [19] diremos que L3 es I-compacta si para todo conjunto M vale que M es satisfacible si y sólo si es satisfacible todo subconjunto finito M^o de M. Llamamos disyuntivamente válido a todo conjunto M tal que para toda valoración β de L3 existe al menos una fórmula F, F $\in$ M con $\beta(F) = \mathbf{v}$. L3 es U-compacto si para todo conjunto M de fórmulas vale que M es disyuntivamente válido si hay al menos un subconjunto finito M^o de M que también lo es. L3 será compacto si es I-compacto y U-compacto. Aunque es sabido que en lenguajes en que existe una negación exclusiva, como es el caso de $\neg$ en L3, I-compacidad y U-compacidad coinciden, damos una demostración explícita de la compacidad de L3 respecto a conjuntos limitados. Sea E_I la siguiente propiedad de conjuntos de fórmulas: M $\in E_I$ si todo subconjunto finito de M es satisfacible. E_I es una propiedad de consistencia: (1) Si {G, $\neg$ G} $\subseteq$ M, evidentemente hay un subconjunto finito M^o de M que es insatisfacible. (2) Si M $\in E_I$, **a** $\in$ M y hay un subconjunto finito M^o de M tal que {M^o, $\mathbf{a}_i$} (i = 1,2) no es satisfacible, entonces {M^o, **a**, $\mathbf{a}_i$} no es satisfacible y por prop. 2.2, tampoco lo es el subconjunto finito {M^o, **a**} de M. Por tanto M $\notin E_I$, contra el supuesto. Luego se cumple la condición (2) de la def. 2.7. El resto de los puntos de esta definición se comprueban de manera similar.

Utilizando la notación $\overline{N}$ para indicar el conjunto {$\neg$F | F $\in$ N}, podemos afirmar las siguientes proposiciones:

Proposición 2.10
L3 es I-compacta respecto a conjuntos limitados.

Demostración: Sea M* un conjunto paramétricamente limitado. Si M* es satisfacible, todo subconjunto finito suyo lo es, evidentemente. Si todo subconjunto finito M^o de M* es satisfacible, entonces M $\in E_I$ y, por el teorema de unificación, M* es satisfacible.

[18] Cfr. Blau 1978, p. 255.
[19] V. Fraasen 1971, p. 36.

Proposición 2.11
L3 es U-compacta respecto a conjuntos limitados.

Demostración: Sea M^* un conjunto limitado, disyuntivamente válido. El conjunto $\bar{M}^*$ es insatisfacible, por tanto. Por la prop. anterior, hay un subconjunto finito M'' de M^* que es insatisfacible. Por tanto, el conjunto $M'' = \{F \mid \neg F \in \bar{M}''\}$ es un subconjunto finito de M que es disyuntivamente válido.

De las dos últimas proposiciones se sigue la compacidad de L3 respecto a conjuntos paramétricamente limitados.

2.6. *Propiedades trivalentes de demostrabilidad analítica*

Estudiamos ahora una clase de conjuntos de conjuntos de fórmulas de tipo «dual» respecto a las propiedades de consistencia, a cuyos elementos llamamos propiedades de demostrabilidad analítica. Su propiedad esencial consiste en una relación entre sintaxis y semántica: Si M es un conjunto finito, disyuntivamente válido y E es una propiedad de demostrabilidad, $M \in E$.

Definición 2.12
Propiedades de demostrabilidad [20]
Sea E una propiedad de conjuntos finitos. E es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica si para todo conjunto finito $\{M, F\}$ de fórmulas y para toda **a, b, c** y **d** se cumple que:
(1) $\{M, F, \neg F\} \in E$ y $\{M, \neg F, \neg{-}F\} \in E$.
(2) $\{M, \mathbf{a}_1\} \in E$ y $\{M, \mathbf{a}_2\} \in E \Rightarrow \{M, \mathbf{a}\} \in E$.
(3) $\{M, \mathbf{b}_i\} \in E \Rightarrow \{M, \mathbf{b}\} \in E$, $(i = 1,2)$.
(4) $\{M, \mathbf{c}[e_i]\} \in E \Rightarrow \{M, \mathbf{c}\} \in E$, si e_i es nuevo para M, **c**.
(5) $\{M, \mathbf{d}[A]\} \in E \Rightarrow \{M, \mathbf{d}\} \in E$.
(6) $\{M, \neg H_i\} \in E \Rightarrow M \in E$.

Proposición 2.13
Si M es un conjunto finito de fórmulas disyuntivamente válido y E es una propiedad de demostrabilidad, $M \in E$.

Podemos justificar esta proposición como sigue. Si consideramos el cálculo S3-S3 (cfr. más abajo, p. 254) vemos que si $\vdash_{S3\text{-}S3} \Rightarrow N$ entonces $N \in E$. En efecto, si $\Rightarrow N$ es un axioma en S3 - S3, entonces $N \in E$, por el punto (1) de la definición anterior. Si $\Rightarrow N$ se ha obtenido de otro secuente $\Rightarrow N'$ (u otros secuentes $\Rightarrow N'$ y $\Rightarrow N''$) ya deducido en S3-S3,

[20] Cfr. Smullyan 1968, p. 69 para el correspondiente concepto en lógica standard

entonces supuesto que N' $\in$ E (N' $\in$ E y N'' $\in$ E) se sigue que N $\in$ E, según las condiciones (2)-(6) de la anterior definición. Dado que para todo conjunto disyuntivamente válido M que sea finito se cumple que $\vdash_{S3-S3}$ $\Rightarrow$ M (cfr. p. 22), podemos afirmar que M $\in$ E.

La proposición anterior nos ofrece un medio sencillo de demostrar la suficiencia de ciertos cálculos para L3: Supongamos un cálculo C en cuya definición de demostrabilidad se incluyan las condiciones habituales. Sea E una propiedad del tipo «N $\in$ E si $\check{N}$ (una disyunción de los elementos de N) es una fórmula demostrable en C». Si E es una propiedad de demostrabilidad, entonces C es suficiente. La razón es que si M* $\Vdash_{L3}$ F, con M* limitado, entonces {$\bar{M}$*, F} es disyuntivamente válido y por U-compacidad, hay un subconjunto finito $\bar{M}''$ de $\bar{M}$* tal que {$\bar{M}''$, F} es disyuntivamente válido. Por ser E una propiedad de demostrabilidad, $\vdash_C \check{\bar{M}}'' \vee F$ y M'' $\vdash_C$ F, de donde, M* $\vdash_C$ F.

Observemos que las restricciones en la def. 2.12 y en la prop. 2.13 respecto a la finitud del conjunto M no son esenciales para la demostración de esa proposición. En tanto en cuanto operemos sobre un lenguaje U-compacto, nos basta que el conjunto M* en la prop. 2.13 sea limitado y que E sea una propiedad de carácter U-finito, entendiendo que E tiene este carácter si se cumple que M $\in$ E si hay al menos un subconjunto finito M'' de M tal que M'' $\in$ E. Tenemos entonces la siguiente cadena de implicaciones: M* es disyuntivamente válido $\Rightarrow$M'' es disyuntivamente válido, para un subconjunto finito M'' de M (U-compacidad) $\Rightarrow$M'' es deducible en S3-S3 (suficiencia de S3-S3) $\Rightarrow$ M'' $\in$ E $\Rightarrow$ M* $\in$ E (carácter U-finito de E).

3. OTROS RESULTADOS METATEORICOS

Los puntos esenciales de este apartado son la introducción de una serie de cálculos secuenciales adecuados a L3, y la demostración de versiones apropiadas a esta lógica del Hauptsatz gentziano, el lema de interpolación de Craig y el teorema de consistencia de Robinson. El tratamiento de estos temas es fundamental sintáctico.

3.1. *Cálculos secuenciales*

Llamamos secuente a un par (M, N) donde M, N son conjuntos [21] finitos de fórmulas de L3, posiblemente vacíos. Escribimos M $\Rightarrow$ N para designar el secuente (M, N). Caracterizamos semánticamente un secuente

[21] Conjuntos de fórmulas y no secuencias. Ello hace innecesarias las reglas estructurales de Gentzen

$M \Rightarrow N$ diciendo que $M \Rightarrow N$ es verdadero en β si hay involucración lógica (*l-involution*) [22] entre M y N, es decir, si $\beta(F_1 \wedge ... \wedge F_n) = \mathbf{v} \Rightarrow \beta(G_1 \vee ... \vee G_m) = \mathbf{v}$, cuando $M = \{F_1,...,F_n\}$ y $N = \{G_1,...,G_m\}$. La aplicación del resto de los conceptos semánticos a secuentes se hace de la manera que cabe esperar. Estudiamos a continuación el cálculo S3-S2, en base al cual demostramos el Hauptsatz y el teorema de interpolación.

Postulados de S3-S2

I. Esquemas axiomáticos

Ax. s.1: $M, \neg F, F \Rightarrow$
Ax. s.2: $M, -F, F \Rightarrow$

II. Reglas de deducción

Ra:	$M, \mathbf{a}_i \Rightarrow$ / $M, \mathbf{a} \Rightarrow$	$(i = 1,2)$
Rb:	$M, \mathbf{b}_1 \Rightarrow$ $M, \mathbf{b}_2 \Rightarrow$ / $M, \mathbf{b} \Rightarrow$	
Rc:	$M, \mathbf{c}[\mathbf{A}] \Rightarrow$ / $M, \mathbf{c} \Rightarrow$	
Rd:	$M, \mathbf{d}[\mathbf{e}_i] \Rightarrow$ / $M, \mathbf{d} \Rightarrow$	si e_i no aparece en la conclusión.
RH_i:	$M, \neg H_i \Rightarrow$	$(i = 1,2,3,4)$.

Llamamos *aplicación* de una regla de S3-S2 al par (triplo) formado por una (dos) expresión(es) según el esquema a la izquierda de la barra en una de las anteriores reglas de deducción y la expresión correspondiente según el esquema a la derecha de la barra de la misma regla de deducción. Llamamos *premisa(s)* de la (aplicación de la) regla a la(s) primera(s) expresión(es) y *conclusión* a la segunda.

Diremos que el secuente Σ es demostrable en S3-S2 ($\vdash_{S3-S3} \Sigma$) si hay una *demostración* en S3-S2 para Σ, es decir, si existe una secuencia finita de secuentes $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$ con $\Sigma_n = \Sigma$ tal que cada Σ_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) es o bien (i) un axioma, o bien (ii) la conclusión de una regla de deducción cuya premisa o premisas aparecen antes de Σ_i en la secuencia $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$, o bien (iii) Σ_i es el resultado de introducir o eliminar signos por definición en esa secuencia.

Una *refutación* en S3-S2 para un conjunto finito M es una demostra-

[22] Cfr. Carnap 1943, p. 32.

ción del secuente M $\Rightarrow$. La fórmula F es *deducible* en S3-S2 a partir del conjunto M (M $\vdash_{S3-S2}$ F) si existe un subconjunto finito M'' de M y una refutación para {M'', ¬F}.

La *fórmula principal* en Ax. s.1 (respectivamente, Ax.s.2) es ¬F (respectivamente, −F) y la *fórmula de apoyo* es F, en ambos casos. **a, b, c, d,** H_i son las fórmulas principales en las reglas R**a**, R**b**, R**c**, R**d**, RH_i, respectivamente. $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, **c**($\mathbf{e}_i$), d(A) son las fórmulas de apoyo en las reglas R**a**, R**b**, R**c**, R**d**, RH_i, respectivamente.

Si una demostración de Σ en S3-S2 es una secuencia $\Sigma_1, ..., \Sigma_n$ decimos que n es la longitud de esa demostración de Σ o que Σ es demostrable, en esa demostración, con longitud n. Si hablamos de longitud de demostración de un secuente en forma general, nos referimos a la más corta de sus longitudes de demostración.

Al hablar de las propiedades de demostrabilidad (cfr. apartado 2.5) hicimos uso del cálculo S3-S3 que definimos a continuación. Si en S3-S2 son refutables justamente los conjuntos insatisfacibles, en S3-S3 son demostrables los conjuntos disyuntivamente válidos, como veremos al tratar la suficiencia de ambos cálculos.

Además, en S3-S3 se generan fórmulas cada vez más complejas siempre a la derecha del signo de secuente, mientras que en S3-S2 ese proceso ocurre por la izquierda de los secuentes. En este sentido son cálculos duales.

Postulados de S3-S3 [23]

I. Esquemas axiomáticos

Ax. s.1': $\Rightarrow$ ¬F, F, N

Ax. s.2': $\Rightarrow$ ¬F, ¬−F, N

II. Reglas de deducción

R**a**':	$\Rightarrow$ $\mathbf{a}_1$, N $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_2$, N / $\Rightarrow$ **a**, N	
R**b**':	$\Rightarrow$ $\mathbf{b}_i$, N / $\Rightarrow$ **b, N**	(i = 1,2)
R**c**':	$\Rightarrow$ **c**[e_i], N / $\Rightarrow$ **c, N**	si e_i no aparece en N
R**d**':	$\Rightarrow$ **d**[A], N / $\Rightarrow$ **d**, N	
RH_i':	$\Rightarrow$ ¬ H_i / $\Rightarrow$ N	(i = 1,2,3,4).

[23] S3-S3 guarda notables semejanzas con el cálculo presentado en Schwichtenberg 1977, aunque S3-S3 se ha originado de manera totalmente independiente de él.

Diremos que $M \vdash_{S3\text{-}S3} F$ si hay un subconjunto finito M'' de M con una demostración en S3-S3 para el secuente $\Rightarrow \overline{M}'', F$ donde $\overline{M}''. = \{\neg G \mid G \in M''\}$. Demostración en S3-S3 se define siguiendo la pauta del correspondiente concepto en S3-S2. Más adelante nos ocuparemos de la corrección y suficiencia de este cálculo, al igual que en el caso de S3-S2.

La unión de los conjuntos de postulados de S3-S2 y S3-S3, quizá —para ciertos fines— con ayuda de un conjunto suplementario de postulados como el siguiente: $\{M, F \Rightarrow F, N;\ M, F \Rightarrow \neg -F, N;\ M, -F \Rightarrow \neg F, N\}$ da lugar a un cálculo S3-S1, simétrico por ambos lados, que atiende al principio de las subfórmulas por ambos lados y cuya equivalencia con el cálculo secuencial clásico S3 que definimos a continuación es fácil de demostrar.

Postulados de S3

I. Esquemas axiomáticos

$M, F \Rightarrow F, N$

II. Reglas de deducción

$$\text{R1: } \frac{M, F \Rightarrow N}{M \Rightarrow \neg F, N} \qquad \text{R2: } \frac{M \Rightarrow N, F}{M, \neg F \Rightarrow N}$$

$$\text{R3: } \frac{M, F \Rightarrow N}{M, =\neg F \Rightarrow N} \qquad \text{R4: } \frac{M \Rightarrow M, F}{M \Rightarrow N, =\neg F}$$

$$\text{R5: } \frac{M \Rightarrow M, F}{M, -F \Rightarrow N}$$

$$\text{R7: } \frac{M, F, G \Rightarrow N}{M, F \wedge G \Rightarrow N} \qquad \text{R8: } \frac{M \Rightarrow N, F;\ M \Rightarrow N, G}{M \Rightarrow N, F \wedge G}$$

$$\text{R9: } \frac{M, -F \Rightarrow N;\ M, -G \Rightarrow N}{M, -(F \wedge G) \Rightarrow N} \qquad \text{R10: } \frac{M \Rightarrow N, -F, -G}{M \Rightarrow N, -(F \wedge G)}$$

$$\text{R11: } \frac{M, F(A) \Rightarrow N}{M, \bigwedge XF(X) \Rightarrow N} \qquad \text{R12: } \frac{M \Rightarrow N, F\,[e_i]}{M \Rightarrow N, \bigwedge XF(X)\ (*)}$$

R13: $\dfrac{M, -F[e_i] \Rightarrow N}{M, -\Delta\, XF(X) \Rightarrow N\ (*)}$ R14: $\dfrac{M \Rightarrow N, -F[e_i]}{M \Rightarrow N, -\Delta\, XF(X)}$

R15: $M \Rightarrow N, H_i \quad (i = 1,2,3,4)$

(*) Si e_i no aparece en la conclusión.

3.2. El Hauptsatz en S3-S2

El núcleo de este apartado es la demostración de la

Proposición 3.1. Hauptsatz
Si $\vdash_{S3-S2} M, F \Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2} M, \neg F \Rightarrow$, entonces $\vdash_{S3-S2} M \Rightarrow$.

En la prueba de esta proposición precisamos de una serie de lemas que demostramos a continuación.

Lema I
Si M, **d** $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable como conclusión de una regla **Rd** con longitud k y fórmula principal (f.p.) en **d**, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, **d**[A] $\Rightarrow$ con longitud k, para toda A $\in$ Des.

Demostración: Si M, **d** $\Rightarrow$ es conclusión de una regla **Rd**, tiene como premisa un secuente M, **d**[e_i] $\Rightarrow$ S3-S2 demostrable con longitud $k_1 < k$ y con un e_i que no aparece en M, **d**. Mostramos por inducción sobre la longitud de la demostración de M, **d**[e_i] $\Rightarrow$ que existe una demostración de M, **d**[A] $\Rightarrow$ con longitud $k_2 \leqslant k_1$. Si M, **d**[e_i] $\Rightarrow$ es un axioma, puesto que e_i no aparece en M, **d**[e_i] no es f.p. ni fórmula secundaria (f.s.) del axioma y, por tanto, M, **d**[A] $\Rightarrow$ es un axioma. Si M, **d**[e_i] $\Rightarrow$ es conclusión de una regla de deducción distinta de Rd, del supuesto de inducción y la aplicación de la misma regla que dio lugar a M, **d**[e_i] $\Rightarrow$ se sigue que $\vdash_{S3-S2}$ M, **d**[A] $\Rightarrow$. Si M, **d**[e_i] es conclusión de una regla **Rd**, tiene como premisa un secuente M', **d'**[e_i], **d**[e_i] $\Rightarrow$ cuya longitud de demostración k_3 es menor que k_1. Por supuesto de inducción, M', d'[e_i], d[A] $\Rightarrow$ es demostrable con longitud menor o igual que k_3 siendo e_i nuevo para M', **d'**, **d**(A). Por **Rd**, se sigue que M, **d**[A] $\Rightarrow$ es demostrable con longitud $k_1 < k$.

Lema II
Si $\vdash_{S3-S2}$ M $\Rightarrow$, con longitud k, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, F $\Rightarrow$ con longitud k.

Demostración: El lema se prueba sin dificultad por inducción según k. El único punto que merece atención estriba en que si M $\Rightarrow$ es conclusión de una regla Rd, puede bloquearse la aplicación de la regla si n F aparece una e_i que no aparece en M. En tal caso, el lema precedente nos permite afirmar la existencia de una fórmula de apoyo en la aplicación de la regla en que la e_j que en ella aparece es nueva para M y F.

Lema III

(1) Si $\vdash_{S3-S2}$ M, **a** $\Rightarrow$, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ $\Rightarrow$
(2) Si $\vdash_{S3-S2}$ M, **b** $\Rightarrow$, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, $\mathbf{b}_1$ $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ M, $\mathbf{b}_2$ $\Rightarrow$
(3) Si $\vdash_{S3-S2}$ M, **d** $\Rightarrow$, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, **d**[A] $\Rightarrow$ para toda A $\in$ Des.

Demostración: Si el antecedente de cualquiera de los puntos (1), (2) y (3) es un axioma, el consecuente o bien es un axioma o bien es demostrable a partir de un axioma por medio de R**a**, R**b**, Rc y el Lema II. Si el antecedente es conclusión de una regla de deducción, de las premisas se sigue el consecuente por aplicación de la misma regla que genera el consecuente o bien no hay nada que demostrar. En el caso de (3), si **d** es la f.p. de la aplicación de la regla, el consecuente se sigue del supuesto de inducción y el lema I.

Demostramos ahora un último lema del que el Hauptsatz es un corolario.

Lema IV [24]

Sean n y k números que cumplen (A) y (B):
(A): Si gr(G) $<$ n y $\vdash_{S3-S2}$ M, G $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$G $\Rightarrow$, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M $\Rightarrow$
(B) Si gr(G) = n y P1: M, G $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable con longitud k_1 y P2: M, $\neg$G $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable con longitud k_2 y $k_1 + k_2 < k$, entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, F $\Rightarrow$,
entonces para toda fórmula F de grado n tal que $\vdash_{S3-S2}$ M, F y $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$F $\Rightarrow$ con longitudes k' y k'' tales que k' + k'' = k, vale que $\vdash_{S3-S2}$ M $\Rightarrow$.

Demostración: Sea gr(F) = n y sea $k = k_1 + k_2$, donde k_1 es la longitud de la demostración de P1: M, F $\Rightarrow$ y k_2 es la longitud de la demostración de P2: M, $\neg$F $\Rightarrow$. Mostramos que $\vdash_{S3-S2}$ M $\Rightarrow$.

Consideramos primero el caso en que P1 y P2 son axiomas. Si no ocurre que P1 tenga como fórmula principal o de apoyo a F y que P2 tenga como fórmula principal o de apoyo a $\neg$F, entonces M $\Rightarrow$ es de la forma M', G, $\neg$G $\Rightarrow$ y es un axioma. Si $\neg$F es f.p. en P2, entonces M $\Rightarrow$ es

24 La demostración se inspira en Smullyan 1968, pp. 111 ss.

de la misma forma que P1 y por lo tanto es S3-S2 demostrable. En los casos restantes, en que $\neg F$ es fórmula de apoyo en P2, con F fórmula principal o de apoyo en P1, M $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable a partir de un axioma por medio de **Ra** o **Rb**.

Estudiamos ahora el caso en que P1 o P2 son conclusión de una regla de deducción de S3-S2. Supongamos que se trata de P1.

1. P1 es conclusión de una regla con f.p. en F. Pueden darse los siguientes casos:

1.1. P1 se ha obtenido por **Ra**. Entonces M, F $\Rightarrow$ es M, **a** $\Rightarrow$ y por Lema III, M, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable. P2 es M, $\neg\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ y $\neg\mathbf{a}$ es **b**, $\neg\neg\mathbf{b}$ o $\neg\neg\neg G$ cuando F es $\neg\neg G$. Por lemas II y III, de P2 se puede demostrar M, $\neg\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ $\Rightarrow$ y M, $\neg\mathbf{a}_2$, $\Rightarrow$ y por (A), M $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable.

1.2 P1 se ha obtenido por **Rb**. Entonces M, F $\Rightarrow$ es M, **b** $\Rightarrow$ y tiene como premisas M, $\mathbf{b}_1$ $\Rightarrow$ y M, $\mathbf{b}_2$ $\Rightarrow$. P2 es M, b $\Rightarrow$. Puesto que $\neg\mathbf{b}$ es **a** o $\neg\neg\mathbf{a}$, por lemas II y III M, $\neg\mathbf{b}_1$, $\neg\mathbf{b}_2$ $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable y por (A) también lo es M $\Rightarrow$.

1.3 P1 se ha obtenido por **Rc**, con f.p. en F. Entonces P1 es M, **c** $\Rightarrow$ y tiene como premisa a M, **c**[A] $\Rightarrow$. P2 es M, $\neg\mathbf{c}$ $\Rightarrow$. $\neg\mathbf{c}$ es $\neg\neg\mathbf{d}$ ó **d** y por lema III M, $\neg\mathbf{c}$[A] $\Rightarrow$ es demostrable. Por (A), M $\Rightarrow$ es demostrable.

1.4 P1 se ha obtenido por **Rd**, con f.p. en F. O bien (1.4.1) $F \doteq \neg\bigwedge XG[X]$ o bien (1.4.2.) $F \doteq -\bigwedge XG[X]$. Estudiamos estos dos casos por separado.

1.4.1. P1 es M, $\neg\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ y P2 es M, $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$. Si P2 es un axioma, entonces, si hay una G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$, entonces M $\Rightarrow$ es un axioma y por tanto, demostrable. Si $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ es f.p. entonces P2 tiene la forma M', $\neg\bigwedge XG[X]$, $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ y M $\Rightarrow$ es P1 y por supuesto, demostrable. Si $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ es fórmula de apoyo, P2 $\doteq$ M', $\neg\neg\neg\bigwedge XG[X]$, $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ o P2 $\doteq$ M', $-\neg\neg\bigwedge XG[X]$, $\neg\neg\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ y de P1 se sigue M $\Rightarrow$ por **Ra**. Si P2 es conclusión de una regla con fórmula principal en $\neg\neg\bigwedge XG[X]$, P2 se ha obtenido por medio de **Ra** con premisa P_2': M, $\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$. De P1 y P_2' se sigue, por (A), que M $\Rightarrow$. Si P2 se ha obtenido por medio de una regla con f.p. distinta a $\neg\neg\bigwedge XG[X]$, entonces M se sigue de (B) por aplicación de la misma regla de la que P2 es conclusión.

1.4.2. P1 es M, $-\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ y P2 es M, $\neg-\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$. Si P2 es un axioma y hay una G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$, entonces M $\Rightarrow$ es un axioma. Si $\neg-\bigwedge XG[X]$ es f.p., entonces P2 $\doteq$ M', $-\bigwedge XG[X]$, $\neg-\bigwedge XG[X]$ y P1 es M $\Rightarrow$. Si $\neg-\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ es fórmula de apoyo, entonces o bien P2 $\doteq$ M', $\neg\neg-\bigwedge XG[X]$, $\neg-\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$ o bien P2 $\doteq$ M', $-\neg-\bigwedge XG[X]$, $-\bigwedge XG[X]$ $\Rightarrow$. En ambos casos, M $\Rightarrow$ es deducible de P1 por medio de **Ra**. Si P2 es conclusión de una regla con f.p. en $\neg-\bigwedge XG[X]$, entonces se ha obtenido por **Rc** y tiene como premisa un secuente P_2': M, $\neg-G[A]$ $\Rightarrow$. De P1 se sigue, por lema III (3), P_1': M, $-G[A]$ y de P_1' y P_2' se sigue, por (A), M $\Rightarrow$. Si P2 es conclusión de una regla con f.p. distinta de $\neg - \wedge XG(X)$, de (B), por aplicación de la misma regla de la que P2 es conclusión, se sigue que M $\Rightarrow$ es demostrable.

1.5 P1 se ha obtenido por RH_i. Consideramos sólo el caso de H_1, por ser los otros muy similares. O bien P1 es M, $\neg(IP^k(A) \rightarrow A = A) \Rightarrow$ y P2 es M, $\neg\neg(IP^k(A) \rightarrow A = A) \Rightarrow$ o bien P1 es M, $-(IP^k(A) \rightarrow A = A) \Rightarrow$ y P2 es M, $\neg-(IP^k(A) \rightarrow A = A)) \Rightarrow$. En el primer caso, supuesto que P1 y P2 son S3-S2 demostrables, podemos hacer la siguiente demostración:

1.	M, $\neg(IP^k[A] \rightarrow A = A) \Rightarrow$	P1
2.	M, $\neg\neg(IP^k(A) \rightarrow A = A) \Rightarrow$	P2
3.	M, $\neg-(-\neg IP^k(A) \wedge -(A = A)) \Rightarrow$	Def. en 1
4.	M, $\neg\neg-(-\neg IP^k(A) \wedge -(A = A)) \Rightarrow$	Def. en 2
5.	M, $IP^k(A)$, $\neg(A = A) \Rightarrow$	3, lemas II y III
6.	M, $\neg IP^k(A) \Rightarrow$	4, lema III
7.	M, $(A = A) \Rightarrow$	4, lema III

de 5., 6. y 7. se sigue, por (A), que M $\Rightarrow$ es S3-S2 demostrable. El segundo caso se trata de modo similar.

2. P1 es conclusión de una regla con f.p. G distinta de F. Si G es una **a**, **c** o **d**, entonces P1 tiene la forma M', G, F $\Rightarrow$ y P2 es M', G, $\neg$F $\Rightarrow$. P1 tiene como premisa un secuente P_1': M', G', F $\Rightarrow$ donde G' es la fórmula de apoyo de la aplicación de la regla. Además la longitud k_1' de la demostración de P'_1 es menor que la longitud de demostración de P1. Sea k_2 la longitud de demostración de P2. Entonces, $k_1' + k_2 < k_1 + k_2 = k$. Por lema II, es demostrable con longitud k_1' el secuente M', G', G, F $\Rightarrow$ y, con longitud k_2, el secuente M', G', G, $\neg$F $\Rightarrow$. Por (B), M', G', G $\Rightarrow$ es demostrable y por **Ra**, **Rc** o **Rd** lo es también M $\Rightarrow$. Si G es una **b**, entonces P1 tiene como premisas los secuentes M, $\mathbf{b}_1$, F $\Rightarrow$ y M, $\mathbf{b}_2$, F $\Rightarrow$. Estos secuentes son demostrables con longitudes k_1' y k_1'' ambas menores que la longitud k_1 de la demostración de P1. Por lema II, M, **b**, $\mathbf{b}_1$, F $\Rightarrow$ y M, **b**, $\mathbf{b}_2$, F $\Rightarrow$ son demostrables con longitud k_1' y k_1''. Asimismo, de P2 se sigue, por lema II, que M, **b**, $\mathbf{b}_1$, $\neg$F $\Rightarrow$ y M, **b**, $\mathbf{b}_2$, $\neg$F $\Rightarrow$ son demostrables con la misma longitud k_2 de la demostración de P2. Por (B) se sigue que M, $\mathbf{b}_1$, **b** $\Rightarrow$ y M, $\mathbf{b}_2$, **b** $\Rightarrow$ son demostrables y con ello M $\Rightarrow$.

Consideramos ahora el caso en que P2 es conclusión de una regla de deducción. Cuando P2 se ha obtenido por medio de una regla distinta de **Rd** y con fórmula principal en $\neg$F o se ha obtenido por medio de una regla cualquiera con fórmula principal distinta de $\neg$F, la demostración es muy similar al caso de P1, teniendo en cuenta que si $\neg$F es una **a**, F es una **b** o tiene la forma $\neg$G, cuando $\neg$F es $\neg\neg$G; si $\neg$F es una **b**, entonces F es una **a** y si $\neg F$ es una **c**, entonces F es una **d**. Veamos el caso en que P2 se ha obtenido por **Rd**, con f.p. en $\neg F$. P2 es, entonces, M, $\neg\wedge XG[X]\Rightarrow$ y P1 es M, $\wedge XG[X]\Rightarrow$. Si P1 es un axioma, $\wedge XG[X]$ no es la f.p. del mismo. Si hay una fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$, M $\Rightarrow$ es una axioma. Si $\wedge XG[X]$ es fórmula de apoyo, entonces o bien P1 es M', $\neg\wedge XG[X]$, $\wedge XG[X] \Rightarrow$ y P2 es M $\Rightarrow$ o bien P1 es M', $-\wedge XG[X]$, $\wedge XG[X]\Rightarrow$ y P2 es M', $-\wedge XG[X]$, $\neg\wedge XG[X]\Rightarrow$. En este último caso, M', $-G[e_i]$, $G[e_i]\Rightarrow$ con e nuevo para M, $\wedge XG[X]$, es un axioma y por lema III de P2 se sigue M', $-G[e_i]$, $\neg G[e_i]\Rightarrow$. Puesto que $gr(G[e_i]) < gr(\neg\wedge XG[X])$, por (A) se sigue que M, $G[e_i]\Rightarrow$ es demostrable y por **Rd**, M $\Rightarrow$ es demostrable. Si P1 es conclusión de una regla de deducción, estamos en uno de los casos analizados anteriormente. Por lo tanto, en todos los casos, M $\Rightarrow$ es demostrable.

Podemos ahora demostrar la proposición 3.1: Si hay una fórmula F tal que $\vdash_{S3-S2}$ M, F $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg F \Rightarrow$ y no ocurre que $\vdash_{S3-S2}$ M $\Rightarrow$ entonces hay un m tal que m es el menor grado de una fórmula respecto de la que ocurre lo anterior. Entonces hay un $k = k_1 + k_2$ tal que k es el más pequeño número con k_1 longitud de la demostración de M, F $\Rightarrow$ y k_2 longitud de la demostración de M, F $\Rightarrow$. Entonces, para todo grado menor que m y longitud menor que k, se cumple la proposición 3.1. Entonces, por el lema IV, también se ha de cumplir para F y los secuentes M, F $\Rightarrow$ y M, $\neg F \Rightarrow$. Luego se cumple la proposición 3.1 en todos los casos.

3.3. *Adecuación de los cálculos secuenciales*

Mostramos la adecuación de S3-S2 y sólo hacemos alusiones a la suficiencia de los otros cálculos secuenciales antes definidos.

Proposición 3.3 Adecuación de S3-S2.
Sea {M*, F} un conjunto paramétricamente limitado, con M* posiblemente vacío, de fórmulas de L3. Entonces

$$M^* \vdash_{S3-S2} F \Longleftrightarrow M^* \Vdash_{L3} F.$$

Demostración: Mostramos primero la corrección de S3-S2. Supuesto que $M^* \vdash_{S3-S2} F$, entonces hay una demostración de M'', $\neg F \Rightarrow$ para un subconjunto finito de M'' de M. Entonces, si M'', $\neg F \Rightarrow$ es un axioma, hay una fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq \{M'', \neg F\}$ y por tanto, $\{M'', \neg F\} \Rightarrow$ es insatisfacible. Si M'', $\neg F \Rightarrow$ es conclusión de una regla **Ra** - **Rd**, por supuesto de inducción el antecedente de la premisa o premisas de esa regla es insatisfacible y por la proposición 2.2, lo es también {M'', $\neg F$} y, con ello, {M*, $\neg F$}. Si M'', $\neg F \Rightarrow$ es conclusión de RH_i, $\neg H_i \in \{M'', \neg F\}$ y supuesto que $\neg H_i$ es insatisfacible, también lo es $\{M^o, \neg F\}$. Podemos afirmar, por tanto, que si $M^o, \neg F \Rightarrow$ es demostrable, entonces $\{M^o, \neg F\}$ es insatisfacible y, en consecuencia, que $M^* \Vdash_{L3} F$.

Mostramos ahora la suficiencia de S3-S2 por medio de una propiedad de consistencia. Sea E_3 la propiedad de conjuntos de fórmulas M tal que $M \in E_3$ si no hay un subconjunto finito M^o de M tal que M^o es S3-S2 refutable. Afirmamos que E_3 es una propiedad de consistencia: Nótese, en primer lugar, que si hay una fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq M$, entonces hay un subconjunto finito de M que es refutable y $M \notin E_3$. Se cumple, pues, el punto (1) de la definición 2.7. Por lo que toca a los otros puntos de esa definición, observemos que si M^o es un subconjunto finito de M, F es una fórmula de tipo conjuntivo, $F \in M$ y F_i es un descendiente de F tal que $\{M^o, F_i\} \notin E_3$, es decir, si $M^o, F_i \Rightarrow$ es S3-S2 demostrable, entonces $\vdash_{S3-S2} M^o, F \Rightarrow$ por **Ra** y Rc, y por tanto $M \notin E_3$. Sea ahora F una fórmula de tipo disyuntivo. Si F es una **b** y $\vdash_{S3-S2} M^o, \mathbf{b}_1 \Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2} M^{o\prime}, \mathbf{b}_2 \Rightarrow$, entonces, por R**b**, $\vdash_{S3-S2} M^o, M^{o\prime}, \mathbf{b} \Rightarrow$ y $M \in E_3$. Si F es una **d**, y $\vdash_{S3-S2} M^o, \mathbf{d}(e_i) \Rightarrow$ con e_i nueva para M^o, **d**, entonces $\vdash_{S3-S2} M^o, \mathbf{d}, \Rightarrow$ por R**d** y $M \notin E_3$. Supongamos ahora que hay un H_i tal que $\vdash_{S3-S2} M^o, H_i \Rightarrow$, es decir, tal que $\{M, H_i\} \in E$. Por RH_i, $\vdash_{S3-S2} M^o, \neg H_i \Rightarrow$ y por el Hauptsatz podemos concluir que $\vdash_{S3-S2} M \Rightarrow$ y $M \notin E_3$. Por tanto, se cumplen las condiciones de la definición de propiedad de consistencia.

Supuesto entonces que $M^* \Vdash_{L3} F$, $\{M^*, \neg F\}$ es insatisfacible y por el teorema de unificación, $\{M^*, \neg F\} \notin E_3$. Luego hay un subconjunto finito M^o de M tal que $\vdash_{S3-S2} M^o, \neg F \Rightarrow$. Por tanto, $M^* \vdash_{S3-S2} F \Rightarrow$, como queríamos mostrar.

El método más sencillo de mostrar la suficiencia de S3-S3 es hacer uso de una propiedad de demostrabilidad y de la proposición 2.13. Obviamente, este camino nos está vedado, puesto que utilizamos la suficiencia de S3-S3 para probar aquella proposición. Una prueba alternativa, sencilla aunque tediosa, podría darse en la siguiente forma: es fácil mostrar por inducción que si $\vdash_{S3-S2} M, \neg F \Rightarrow$ entonces $\vdash_{S3-S3} \Rightarrow \overline{M}, F$. Entonces si $M^* \Vdash_{L3} F$, $\vdash_{S3-S2} M^o, \neg F \Rightarrow$ para un subconjunto finito M^o de M, por la suficiencia de S3-S2. Por lo que acabamos de apuntar, $\vdash_{S3-S3} \Rightarrow \overline{M^o}, F$ y $M^* \vdash_{S3-S3} F$.

Una manera de expresar la suficiencia de S3-S3 que resulta interesante para nosotros, a la vista del uso que hicimos el S3-S3 en el apartado 2.5, es la siguiente: Si M es un conjunto finito, disyuntivamente válido, entonces $\vdash_{S3-S3} \Rightarrow M$. En efecto, si M es disyuntivamente válido y $F \in M$, entonces $\{\overline{M}, \neg F\}$ es insatisfacible y $\overline{M} \Vdash_{L3} F$, de donde se sigue que $\vdash_{S3-S3} \Rightarrow \overline{M}, F$. Puesto que se puede demostrar que $\vdash_{S3-S2} \Rightarrow \neg\neg G, N, \Rightarrow \vdash_{S3-S3} \Rightarrow G, N$, podemos afirmar que $\vdash_{S3-S3} \Rightarrow M$.

Todos los cálculos que hemos definido en el apartado 3.1 son equivalentes en el sentido de que los respectivos conceptos de deducibilidad coinciden, puesto que $M \vdash_{S3} F \Leftrightarrow M \vdash_{S3-S1} F \Leftrightarrow M \vdash_{S3-S2} F \Leftrightarrow M \vdash_{S3-S3}$ F, aunque no son necesariamente deducibles los mismos secuentes en cada uno de ellos: así el secuente $P^1A, \neg P^1A \Rightarrow$ no es deducible en S3-S3 y sí lo es en S3 y S3-S2.

3.4. *El teorema de interpolación en L3*

La fórmula K es una fórmula de interpolación para la fórmula condicional $F \Rightarrow G$ si se cumple que todo parámetro de predicado que aparece en K fuera de las descripciones y es distinto de '=' aparece en F y G y toda descripción en K aparece también en F y G y, además, K es tal que $\Vdash_{L3} F \rightarrow K$ y $\Vdash_{L3} K \rightarrow G$. El teorema de interpolación afirma la existencia de una fórmula de interpolacion por toda fórmula condicional L3-verdadera. Demostramos el teorema sobre la base del siguiente lema:

Lema 3.4

Si $\vdash_{S3-S2} M, F \Rightarrow$, entonces hay una fórmula K tal que
(1) $\vdash_{S3-S2} M, \neg K$ y $\vdash_{S3-S2} K, F$
(2) Todo parámetro de predicado P^k que aparece en K fuera de las descripciones y es distinto de '=', aparece en M y F y toda descripción en K aparece M, F.

Podemos modificar (2) en la forma (2'):

(2') Si hay un parámetro de predicado P^k que aparece tanto en F como en (al menos una fórmula de) M, entonces todo parámetro de predicado en K fuera de las descripciones y toda descripción en K aparece en F y M. Si no hay tal parámetro de predicado, o bien M o bien F es insatisfacible.

Demostración: Por inducción según la longitud de demostración en S3-S2 de $M, F \Rightarrow$. Llamaremos a K fórmula de interpolación (f.i). Supongamos que $M, F \Rightarrow$ es un axioma. Para mostrar los puntos (1) y (2) del lema consideramos los casos en que (i) F es f.p. (ii) F es fórmula de apoyo y (iii) hay un fórmula G tal que $\{G, \doteq G\} \subseteq M$.

(i) $M, F \Rightarrow$ es $M', G, \doteq G \Rightarrow$. En este caso G es una fórmula de interpolación: $M', G, \neg G \Rightarrow$; $G, \neg G \Rightarrow$ y $G, -G \Rightarrow$ son axiomas de S3-S2.

(ii) $M, F \Rightarrow$ es $M', \neg F, F \Rightarrow$ o $M', -F, F \Rightarrow$. $\neg F$ es f.i. para $M', \neg F, F \Rightarrow$, ya que $M', \neg F, \neg\neg F \Rightarrow$ y $\neg F, F \Rightarrow$ son axiomas. $-F$ es f.i. para $M', -F, F \Rightarrow$, ya que $M', -F, \neg -F \Rightarrow$ y $-F, F \Rightarrow$ son axiomas (iii) $M, F \Rightarrow$ es $M', G, \doteq G, F \Rightarrow$. Entonces $\wedge X(X = X) \wedge \neg \wedge X(X = X)$ es una f.i.: $\vdash_{S3-S2}$ M', $\neg$G, G, $\neg(\wedge X(X = X) \wedge \neg\wedge X(X = X)) \Rightarrow$ es un axioma y $\wedge X(X = X) \wedge \wedge \neg\wedge X(X = X)$, F $\Rightarrow$ es demostrable a partir del axioma $\wedge X(X = X)$, $\neg\wedge X(X = X)$, F $\Rightarrow$ por medio de **Ra**. Por lo que respecta al punto (2') del lema 3.4 nótese que si hay un parámetro de predicado P^k común a M y F la demostración es muy similar al caso estudiado, teniendo que sustituir $\wedge X(X = X) \wedge \neg\wedge X(X = X)$ por $\wedge X_1 \ldots \wedge X_k$ $((P^k X_1, \ldots, X_k) \wedge \neg (P^k X_1, \ldots, X^k))$. Si no hay tal parámetro P^k común a M y F, entonces hay una fórmula G tal que $\{G, \neg G\} \subseteq$ M y M es insatisfacible.

Suponemos ahora que M, F $\Rightarrow$ es conclusión de una aplicación de una regla y que se cumple el lema para la premisa o premisas de la aplicación de la regla. Entonces,

1. Si M, F $\Rightarrow$ es conclusión de una regla **Ra**, entonces la aplicación de **Ra** tiene como premisa un secuente M, $\mathbf{a}_i \Rightarrow$ o M', $\mathbf{a}_i$, F $\Rightarrow$. Por supuesto de inducción existe una fórmula de interpolación K para la premisa en el sentido de (2). Entonces $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ $\mathbf{a}_i$, K $\Rightarrow$ o $\vdash_{S3-S2}$ M', $\mathbf{a}_i$, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ K, F $\Rightarrow$. Por **Ra**, $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ **a**, K $\Rightarrow$ o $\vdash_{S3-S2}$ M', **a**, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ K, F $\Rightarrow$. Por tanto K es también f.i. para M, F $\Rightarrow$ en el sentido de (2).
2. Si M, F $\Rightarrow$ conclusión de una regla **Rb**, tiene como premisas dos secuentes M, $\mathbf{b}_1 \Rightarrow$ y M, $\mathbf{b}_2 \Rightarrow$ o M, $\mathbf{b}_1$, F $\Rightarrow$ y M, $\mathbf{b}_2$, F $\Rightarrow$ con f.i. K_1, K_2, respectivamente. Un razonamiento similar al de 1. nos lleva a poder afirmar que $K_1 \wedge K_2$ es una fórmula de interpolación para N, F $\Rightarrow$ en este caso.
3. Si M, F $\Rightarrow$ es conclusión de una regla **Rc**, distinguimos el caso (i) en que F es f.p. de la aplicación del caso (ii) en que la f.p. es distinta de F. En (i) M, F $\Rightarrow$ tiene como premisa a M, c[A] $\Rightarrow$. Por supuesto de inducción hay una f.i. K tal que $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ c[A], K $\Rightarrow$. K puede no ser fórmula de interpolación para M, F $\Rightarrow$ si A aparece en K y no en **c**. En otro caso K es f.i. para M, F $\Rightarrow$. Entonces, si A aparece en K y no aparece en **c**, por supuesto de inducción M, $\neg$K[A] $\Rightarrow$ es demostrable y por **Rc** y **Ra** lo es también M, $\neg\neg\wedge X\neg K[X] \Rightarrow$. Por otro lado, y también por supuesto de inducción, **c[A]**, K[A] $\Rightarrow$ es demostrable y por **Rc**, **Ra** y **Rd** lo es también **c**, $\neg\wedge X\neg K[X] \Rightarrow$. Por tanto $\neg\wedge X\neg K[X]$ es f.i. para M, F $\Rightarrow$. En (ii) la f.i. K de la premisa es también fórmula de interpolación para la conclusión. En todos los casos nos referimos a f.i. en el sentido de (2).
4. Si M, F $\Rightarrow$ es conclusión de una regla **Rd**, tiene como premisa M, $\mathbf{d}[e_i] \Rightarrow$, o M, $\mathbf{d}[e_i]$, F $\Rightarrow$. Por supuesto de inducción existe una fórmula de interpolación K para la premisa, e_i no aparece en M, d, F y, por tanto, tampoco aparece en K. Luego K es f.i. para M, F $\Rightarrow$.
5. Si M, F $\Rightarrow$ es conclusión de una regla RH_i, entonces M, F $\Rightarrow$ es o

bien M, $\neg$ H_i, F $\Rightarrow$ o M, $\neg$ H_i $\Rightarrow$. En el primer caso, si no hay un parámetro P^k que aparezca tanto en M como en F, la fórmula ($\bigwedge X(X = X) \wedge \neg\bigwedge X(X = X)$) es una f.i. en sentido de (2) para M, F $\Rightarrow$ ya que M, $\neg$ H_i, $\neg(\bigwedge X(X = X) \wedge \neg\bigwedge X(X = X)) \Rightarrow$ y $\bigwedge X(X = X) \wedge \neg\bigwedge X(X = X)$, F $\Rightarrow$ son secuentes demostrables en S3-S2. Si existe un parámetro P^k común a M y F, podemos escoger como f.i. para M, F $\Rightarrow$ en sentido de (2') la fórmula ($\bigwedge X_1 \ldots \bigwedge X_k ((P^k X_1 \ldots X_k) \wedge \neg(P^k X_1 \ldots X_k))$. En el caso de que M, F $\Rightarrow$ sea M, $\neg$ H_i $\Rightarrow$, la fórmula $\neg(\bigwedge X(X = X) \wedge \neg\bigwedge X(X = X))$ es f.i. en sentido de (2) y $\bigwedge X_1 \ldots \bigwedge X_k \neg((P^k X_1 \ldots X_k) \wedge \neg(P^k X_1 \ldots X_k))$ lo es en sentido de (2'), bajo el supuesto de que haya un parámetro P^k común a M y F.

Es fácil ver, además, que si no hay un parámetro P^k común a M y F y M, F $\Rightarrow$ es demostrable en S3-S2, o bien M es insatisfacible o bien lo es F. En los casos 1-4, la existencia de una fórmula de interpolación en sentido de (2'), bajo el supuesto de que exista un parámetro P^k común a M y F se demuestra de modo muy similar a lo hecho más arriba.

Podemos ahora afirmar el teorema de interpolación como un corolario del lema anterior.

Proposición 3.5 Teorema de interpolación para L3 [25].
Sea {M, F} un conjunto finito de fórmulas. Si M $\Vdash_{L3}$ F, entonces hay una fórmula K tal que
(1) M $\Vdash_{L3}$ K y K $\Vdash_{L3}$ F.
(2) Todo parámetro de predicado P^k que aparece en K fuera de las descripciones y es distinto de '=', así como toda descripción en K, aparece también en F y en (al menos una fórmula de) M.
De nuevo, podemos modificar (2) en la forma (2'):
(2') Si hay un parámetro de predicado P^k que aparece tanto en F como en M, entonces todo parámetro de predicado en K fuera de las descripciones y toda descripción en K, aparece en M y F. Si no hay tal parámetro de predicado, o bien M es insatisfacible o bien F es lógicamente verdadera.

Demostración: Por la adecuación de S3-S2, M $\Vdash_{L3}$ F $\Rightarrow \vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$F $\Rightarrow$. Por el lema 3.4, existe un fórmula de interpolación K en sentido de (2) para el secuente M, $\neg$F $\Rightarrow$. Por tanto, $\vdash_{S3-S2}$ M, $\neg$K $\Rightarrow$ y $\vdash_{S3-S2}$ K, $\neg$F $\Rightarrow$. De ahí que se pueda afirmar que M $\Vdash_{L3}$ F y que K $\Vdash_{L3}$ F. Si hay un parámetro P^k común a M y F la existencia de una f.i. en sentido de (2') se demuestra de la misma manera. Si no existe tal parámetro, del lema 3.4

[25] Versiones similares en la lógica standard se encuentran en Smullyan 1968, pp. 127 ss. y Chang-Keisler 1973, p. 84-5.

se sigue que o bien M es insatisfacible o bien $\neg F$ es insatisfacible, es decir, F es L3-verdadera.

Quizá no sea totalmente ocioso indicar que aquí, como en la lógica standard, el teorema de interpolación expresa, en cierta medida, la inversa del Hauptsatz. En efecto, podemos leer el Hauptsatz como la afirmación de que si hay una K tal que {M, $\neg$K} y {G, K} son insatisfacibles, {M, G} también lo es. A la inversa, el teorema de interpolación afirma, entre otras cosas, que si {M, G} es insatisfacible, existe una fórmula K tal que {M, $\neg$K} y {G, K} son insatisfacibles.

3.5. El teorema de consistencia en L3

En L3, como en la lógica standard, llamamos teorema de consistencia a una afirmación acerca de las condiciones en que la unión de dos conjuntos consistentes de fórmulas es consistente.

En lo que sigue $\vdash$ simboliza $\Vdash_{L3}$, $\vdash_{S3-S2}$ y demás conceptos equivalentes, en la medida en que lo sean. Suponemos que M y M' son conjuntos de fórmulas sin descripciones. Sea Par.Pred. M. el conjunto de los parámetros de predicado que aparecen en (fórmulas de) M y sea Par. Pred. M'. el correspondiente conjunto respecto a M'. Diremos que M y M' son consistentes si no hay fórmulas F, G tales que $M \vdash F \wedge \underline{\neg} F$ o $M' \vdash G \wedge \underline{\neg} G$. M y M' se dicen completos respecto al vocabulario común si para toda fórmula sin descripciones G todos cuyos parámetros de predicado están en Par. Pred. M. $\cap$ Par. Pred. M'. se cumple que o bien $M \vdash G$ y $M' \vdash G$ o $M \vdash \underline{\neg} G$ y $M' \vdash \underline{\neg} G$. Podemos probar el siguiente teorema:

Proposición 3.6 Teorema de consistencia de Robinson en L3 [26]
Si (i) M y M'a son consistentes y (ii) N y M' son completos respecto al vocabulario común, entonces M $\cup$ M' es consistente.

Demostración: Si M $\cup$ M' es inconsistente, entonces es insatisfacible y, puesto que M y M' son paramétricamente limitados, por la compacidad de L3 se sigue que existen subconjuntos finitos M^0 y $M^{0\prime}$ de M y M' tales que $M^0, M^{0\prime} \Vdash_{L3} F \wedge \underline{\neg} F$, para una fórmula F. M^0 y $M^{0\prime}$ no son vacíos puesto que, en otro caso, M o M' sería inconsistente. Se cumple entonces que

$$(1)\quad M^0 \Vdash_{L3} (\hat{M}^{0\prime}) \rightarrow F \wedge \underline{\neg} F$$

[26] La formulación y demostración del teorema se basa en la presentación del mismo para la lógica standard en Kleene 1967, pp. 374-375.

donde $(\hat{M}^{o'})$ es una conjunción de las fórmulas en $M^{o'}$. Puesto que $\Vdash_{L3} (G \rightarrow (F \wedge \sim F)) \rightarrow \neg G$, se puede afirmar

$$(2) \quad M^{o} \Vdash_{L3} \neg(\hat{M}^{o'})$$

Si no hay un parámetro de predicado que aprece tanto en M^{o} como en $M^{o'}$, del teorema de interpolación se sigue (3) o (4)

$$(3) \quad \Vdash_{L3} \neg(\hat{M}^{o'}) \qquad\qquad (4) \quad \Vdash_{L3} \neg(\hat{M}^{o'})$$

en cuyo caso tanto M^{o} como $M^{o'}$ serían insatisfacibles y, con ello, inconsistentes, contra el supuesto de que M y M' son consistentes. Luego existe una fórmula de interpolación G en el sentido de (2') (Cfr. prop. 3.5). Se cumple, entonces

$$(5) \quad M^{o} \Vdash_{L3} G \qquad \text{y} \qquad (6) \quad G \Vdash_{L3} \neg(\hat{M}^{o'})$$

Cada parámetro de predicado P^{k} que aparece en G aparece en M^{o} y $M^{o'}$ y en G no hay descripciones, puesto que no las hay en M^{o}, $M^{o'}$. Por tanto, cada P^{k} en G está en Par. Pred. M $\cap$ Par.Pred. M'. Como M y M' son completos respecto al vocabulario común, vale que

$$(7) \quad M \Vdash_{L3} G \qquad \text{y} \qquad M' \Vdash_{L3} G$$

o

$$(8) \quad M \Vdash_{L3} \sim G \qquad \text{y} \qquad M' \Vdash_{L3} \sim G$$

Si ocurre (7), $M' \Vdash_{L3} G$ y por (6) $M' \Vdash_{L3} \neg G$, resultando M' inconsistente. Si ocurre (8), de (5) se sigue la inconsistencia de M, contra el supuesto. Luego no hay fórmula F ni subconjuntos M^{o} y $M^{o'}$ de M y M' tales que $M^{o}, M^{o'} \Vdash_{L3} F \wedge \sim F$. Luego M $\cup$ M' es consistente.

Bibliografía

BARWISE, H. (ed.) (1977): *Handbook of Mathematical Logic*. Nort-Holland, Amsterdam, 1977.

BLAU, U. (1978): *Die dreiwertige Logik der Sprache*. De Gruyter, Berlín, 1978.

BLAU, U. (1980): *Distributive und kollektive Pradikation, Quantifikation und Kennzeichnung*. Manuscrito, Munich 1979-80.

CARNAP, R. (1943): *Formalization of Logic*. Publicado junto con Introduction to Semantics en Harvard Uni. Press, Cambridge Mass., 1958.

CHANG, C.C. y KEISLER, H.J. (1973): *Model Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

GOEDEL, K. (1981): *Obras completas*. Tr. e intr. de J. Mosterín. Alianza Editorial. Madrid, 1981.

HINTIKKA, J. (1955): *Form and Content in Quantification Theory*. Acta Philosophica Fennica 6, pp. 7 - 55, 1955.

KLEENE, St. (1967): *Mathematical Logic*. Wiley & Sons, New York, 1967. Cito por la tr. fran. de J. Largeault: Logique mathématique. Colin ed. París. 1971.

RESCHER, M. (1969): *Many-valued Logic*. Mc Graw Hill, New York, 1969.

SCHWICHTEMBERG, M. (1977): *Proof Theory: Some Applications of Cut-Elimination*. en Barwise, 1977. pp. 867-897.

QUESADA, J.D.: *Presuposiciones referenciales y lógica trivalente*. Teorema IX 1 (1979). pp. 79-95.

SMULLYAN, R. (1963): *First Order Logic*. Springer. Berlín. 1968.

SMULLYAN, R. (1970): *Abstract Cuantification Theory*. en: Intuitionism and Proof Theory, North-Holland, Amsterdam, 1968.

SMULLYAN, R. (1973): *A Generalization of Intuitionistic and Modal Logics*, en: Leblanc (ed.). Truth, Syntax and Modality. North-Holland, Amsterdam, 1973.

TARSKI, A. (1935): *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprache*. Cito por la trad. fran. de G. Granger en Tarski. Logique, Semantique, Métamathématique, Tome I. Colin, Paris, 1972.

VAN FRAASEN, Bas C. (1971): *Formal Semantics and Logic*. McMillan, New York, 1971.