SOBRE EL CONCEPTO DE MODELO*

Jesús Mosterín
Universidad de Barcelona

La "Lógica Matemática" de José Ferrater Mora y Hugues Leblanc, que yo leí a los 17 años, fue a la vez el primer libro de Ferrater y el primer libro de lógica que cayó en mis manos. Guardo un grato recuerdo de aquella lectura, que abrió un mundo nuevo de rigor y claridad ante mis ojos y contribuyó decisivamente a determinar mi vocación y mi trayectoria profesional. Posteriormente he seguido leyendo con interés los libros de Ferrater y he tenido la oportunidad de conocerle personalmente, con lo que al aprecio intelectual ha venido a añadirse la amistad.

Pinturas y Modelos

En el Simposio de Lógica y Filosofía de la Ciencia celebrado en Valencia en Noviembre de 1971 —en el que yo también participaba y que él tan acertadamente presidía— José Ferrater Mora presentó una ponencia sobre "pinturas y Modelos", luego publicada tanto en las Actas del Simposio como en su libro "Las palabras y los hombres". Quería entonces haber comentado con él algunos puntos de su ponencia, pero dado el curso agitado que tomó el citado simposio, me quedé finalmente con las ganas de hacerlo. Por eso voy a aprovechar la oportunidad que el homenaje a Ferrater me brinda para hacer un par de consideraciones sobre aquella temática.

* Este ensayo forma parte del volumen homenaje, de futura publicación, a José Ferrater Mora.

Cuando dilucidamos conceptos, partimos del análisis del uso de los correspondientes términos en el lenguaje, para luego proponer una precisión artificial de los mismos. La precisión propuesta será tanto más aceptable cuanto, por un lado, más exacta, unívoca y fecunda sea y, por otro lado, cuanto menos se aleje de los usos lingüísticos comunes. En su ponencia Ferrater trataba de dilucidar algunos conceptos relacionados con la representación, y en especial los de pintura y modelo. Me permitiré hacerle algunas críticas y sugerencias desde los puntos de vista indicados.

Ferrater considera una serie de fenómenos de representación y de usos lingüísticos correspondientes. Se fija sobre todo en la relación binaria entre una pintura (en su sentido más amplio) *x* y el objeto pintado *y*. Ferrater propone como expresión canónica para expresar esa situación la de que "*x* pinta (o pinta a) *y*". Esta propuesta terminológica parece desafortunada, pues decir que la pintura pinta al objeto pintado parece ir frontalmente en contra del uso que normalmente se hace de esas palabras. Lo que suele decirse es que alguien –el pintor– pinta una pintura de (o que representa) un objeto. Además, si lo que nos interesa es la dilucidación del concepto de pintura, convendrá tener en cuenta tanto las relaciones (pragmáticas) de la pintura con el pintor que la pinta como sus relaciones (semánticas) con el objeto pintado. Por ello quizás hubiera sido más fecundo para el análisis del tipo de situaciones que interesaban a Ferrater partir de la relación ternaria entre el pintor, la pintura y el objeto pintado, la cual podría expresarse canónicamente (pero de modo acorde con el espíritu de la lengua) diciendo que "(el pintor) *x* pinta (la pintura) *y* que representa (al objeto) *z*".

En su dilucidación del concepto de modelo Ferrater parte de la expresión "*x* es un modelo de *y*" –canónicamente, en su propuesta, "*x* modela *y*"–, como paralela a "*x* es una pintura de *y*". Es decir, Ferrater coloca desde el principio los modelos del mismo lado de la relación de representación que las pinturas, y luego se las ve y se las desea para distinguir modelos de pinturas. Yo pienso que en ese caso hubiera sido más fecundo partir de la expresión "*x* es un modelo de *y*" como simétricamente opuesta a "*x* es una pintura de *y*", en el sentido de que "*x* es una pintura de y" si y sólo si "y es un modelo de x". Con esto tanto la distinción como la relación entre los conceptos de pintura y modelo hubieran resultado mucho más diáfanas y precisas. Además, este análisis podría haber sido incluido en el anterior, diciendo que el pintor x pinta la pintura y que representa al modelo z. De hecho, es lo que pasa –y lo que se dice que pasa– en el estudio de un artista: el pintor pinta un cuadro (una pintura) del (o de la) modelo.

Ferrater distingue entre pinturas que representan –en su terminología, que pintan –con similaridad pictórica y pinturas que representan sin similaridad pictórica.[1] Entre las pinturas que representan sin similaridad pictórica se encuentran –él no lo dice explícitamente, pero yo lo entiendo así, y me imagino que él también– las teorías. El científico es el pintor que pinta (construye) esa peculiar pintura –la teoría– que representa (describe) una determinada parcela de la realidad. Como la teoría es un caso especialmente interesante (al menos para Ferrater y para mí) de pintura, en lo que sigue voy a exponer unas consideraciones sobre el concepto de modelo de (ese tipo de pintura que es) una teoría.

Teorías, sistemas y modelos

Lo que despierta el interés científico y es sometido a investigación no suele ser tanto un individuo aislado como un sistema. Un sistema es una entidad compleja formada por diversos individuos y por una serie de funciones y relaciones entre esos individuos. Ejemplos de sistemas son el sistema de los números naturales (formado por el 0, el 1, el 2, el 3, etc. y la relación de ser el siguiente de), nuestro sistema solar (formado por el sol, los planetas, los cometas, etc. y sus órbitas, velocidades y distancias), el ecosistema del lago de Bañolas (formado por el agua de dicho lago y los organismos que lo habitan, sus fluctuaciones, y sus relaciones tanto entre ellos –cadenas alimenticias, etc.– como con el entorno), el sistema bancario suizo (formado por los bancos de ese país, sus clientes, sus operaciones, etc.), el sistema español de correos (formado por los carteros, las estafetas, las redes de distribución, la subordinación entre oficinas y personas, etc.), etc.

El estudio científico de un modelo aspira a elaborar una teoría del sistema, es decir, un conjunto de enunciados, ecuaciones, fórmulas, esquemas, etc. que permitan describir adecuadamente el funcionamiento presente del sistema, así como explicar lo ocurrido en el pasado y predecir lo que pasará en dicho sistema en el futuro. Si el empeño tiene éxito, logramos una teoría del sistema. Las variables de esta teoría se referirán a los individuos del sistema y sus conceptos corresponderán a las relaciones y funciones del mismo. Si el sistema funciona tal y como lo indica la teoría, si en él se cumple lo que dice la teoría, decimos que el sistema es un modelo de la teoría. Así, el sistema de los números naturales es un modelo de la teoría aritmética de Peano, nuestro sistema planetario es un modelo de la teoría de Kepler, el sistema de las placas continentales terrestres es un modelo de la teoría de Weneger, etc.

Uno puede aspirar a teorías de más alcance, que sean aplicables no ya a un sistema, sino a toda una clase de sistemas. Así, la teoría de grupos es aplicable al sistema formado por los números enteros y la adición, o al formado por los números racionales menos el cero y la multiplicación, o al formado por los automorfismos de un conjunto cualquiera y la composición, etc. Así, también, la mecánica clásica de partículas es aplicable al sistema formado por la Tierra y la Luna y sus respectivos movimientos, o a nuestro sistema solar entero con los suyos, o al sistema formado por un péndulo y la Tierra, o al formado por las bolas de billar en una mesa determinada, etc. Así también, la teoría limnológica es aplicable a todos (o a muchos) lagos.

A veces ocurre que la teoría elaborada para un solo sistema resulta tener también otros modelos. Así, lo dicho por la teoría aritmética de Peano no sólo se cumple en el sistema de los números naturales, para el que fue construida, sino en muchos otros sistemas, que son otros tantos modelos (por así decir, involuntarios) de esa teoría. Y la teoría mecánica clásica de partículas no sólo se cumple en los sistemas (Tierra, Luna, mareas; sistema solar; Tierra y péndulo; Tierra y proyectil ...) en los que Newton pensaba al elaborarla –es decir, en sus modelos paradigmáticos–, sino que también es aplicable a muchos otros sistemas, tiene muchos otros modelos, como la comunidad científica formada en torno a ella se encargaría de mostrar. En definitiva, lo que Kuhn llama "ciencia normal" (la actividad de una comunidad científica formada en torno a una teoría) consiste fundamentalmente en la búsqueda de nuevas aplicaciones de la teoría, en el descubrimiento de otros sistemas en que se cumple, de nuevos modelos suyos.

También puede ocurrir que la teoría elaborada —aunque coherente e incluso brillante— carezca —al menos hasta hoy— de modelos reales, de aplicaciones. Así, quizás determinadas teorías económicas sólo serían aplicables (sólo tendrían como modelos) a sistemas económicos donde la competencia, transparencia y elasticidad de ciertos factores fueran perfectas. Mientras no exista ninguna economía de esas características, dichas teorías carecerán de modelos reales (aunque si son consistentes, tendrán modelos numéricos, pero eso no interesa a los economistas).

¿Qué tienen de común todos los modelos de una misma teoría? Una estructura, la estructura caracterizada por esa teoría. Así, todos los modelos de la teoría de grupos —todos los grupos— tienen de común la estructura de grupo. Todos los modelos de la teoría de espacios vectoriales tienen de común la estructura de espacio vectorial. Todos los modelos de la teoría clásica de formación de precios tienen de común la estructura de mercado libre. Todos los modelos de la teoría cibernética de la servorregulación tienen de común la estructura de servomecanismo.

La estructura asociada con una teoría puede considerarse (intensionalmente) como lo que de común tienen todos los modelos de esa teoría, los rasgos o propiedades comunes a todos ellos, o (extensionalmente) como la clase de todos los modelos de la teoría.

Noticia de la teoría de Modelos

En la matemática está muy avanzado el estudio de las relaciones de las teorías con sus modelos, habiéndose alcanzado aquí un envidiable nivel de precisión y habiéndose desarrollado una potente teoría —la teoría de modelos—[2] que incluso permite obtener determinados resultados algebraicos por procedimientos más sencillos (por ejemplo, vía el *compactness theorem*) que los usuales.

Consideremos, a fin de aclarar las ideas, el caso más sencillo, el de un sistema relacional simple y el de una teoría formal homóloga con él. Un sistema es aquí una entidad $\boldsymbol{A}$ compuesta por una clase no vacía (el universo del sistema) y una serie de relaciones entre elementos de esa clase.

$\boldsymbol{A}$ es un sistema si y sólo si para algún A, $R_1 \ldots R_n$:

(1) $\boldsymbol{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$
(2) $A \neq \phi$
(3) para cada i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: R_i es una relación en A, es decir, para algún número m: $R_i \subset A^m$

Dos sistemas son similares si tienen el mismo número de relaciones y a cada relación n-ádica del uno corresponde otra relación n-ádica del otro.

Sean $\boldsymbol{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\boldsymbol{B} = \langle B, S_1 \ldots S_m \rangle$ dos sistemas. $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son similares si y sólo si (1) $n = m$ y (2) para cada i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: R_i y S_i son relaciones del mismo número ádico o ario (es decir, ambas son monarias, o ambas binarias, o ambas ternarias, o para algún otro número j, ambas son j-arias o j-ádicas).

Dos sistemas similares son isomorfos si tienen igual cantidad de individuos en sus universos y si en ambos ocurre lo mismo respecto a sus relaciones respectivas.

Los sistemas similares $\boldsymbol{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\boldsymbol{B} = \langle B, S_1 \ldots S_m \rangle$ son isomorfos si y sólo si existe una función h tal que:

(1) h es una biyección de A en B
(2) Para cada i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y cada j individuos $a_1 \ldots a_j \in A$: $R_i\, a_1 \ldots a_j$ si y sólo si $S_i\, h(a_1) \ldots h(a_j)$.

En ese caso, decimos que h es un isomorfismo entre A y B.

Una teoría formal formulada en el lenguaje $\boldsymbol{L}$ es homóloga con el sistema $\boldsymbol{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ si en dicho lenguaje hay precisamente n predicados (o relatores) $P_1, \ldots P_n$ y ocurre que para cada i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, el número ario del predicado P_i de $\boldsymbol{L}$ es igual al de la relación R_i de $\boldsymbol{A}$.

Sean $\boldsymbol{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\boldsymbol{B} = \langle B, S_1 \ldots S_n \rangle$ dos sistemas similares y homólogos con la teoría T formulada en un lenguaje con los predicados $P_1 \ldots P_n$. Dado un teorema a de la teoría T, podemos interpretar a sobre el sistema $\boldsymbol{A}$ suponiendo que las variables se refieren a elementos cualesquiera de A y que los predicados P_i se refieren a las correspondientes relaciones R_i de $\boldsymbol{A}$ e igualmente podemos interpretar a sobre el sistema $\boldsymbol{B}$, suponiendo que las variables se refieren a elementos cualesquiera de B y que cada predicado P_i se refiere a la correspondiente relación S_i de $\boldsymbol{B}$. Si todos los teoremas de la teoría T, así interpretados o "traducidos", resultan verdaderos –se cumplen– en $\boldsymbol{A}$, mientras que algún teorema de la misma teoría resulta falso –no se cumple– en $\boldsymbol{B}$, decimos que $\boldsymbol{A}$ es un modelo de T, pero que $\boldsymbol{B}$ no lo es.

Todos estos conceptos están interrelacionados entre sí. Por ejemplo, si dos sistemas son isomorfos entre sí, entonces ambos son modelos de exactamente las mismas teorías. La isomorfía sirve precisamente para establecer la distinción entre teorías categóricas (cuyos modelos son todos isomorfos entre sí) y teorías polimorfas (que tienen modelos no isomorfos).

Una teoría cualquiera determina la clase de sus modelos. Y un sistema cualquiera determina unívocamente la clase de todas las teorías de las que él es modelo. Así, podemos partir de una teoría y buscarle modelos, o partir de un modelo (de un sistema) y buscarle teorías. Y podemos obtener información sobre las teorías estudiando sus modelos, y sobre los sistemas, estudiando sus teorías. Respecto a todos estos y otros muchos aspectos de las relaciones entre teorías y modelos la teoría de modelos ofrece métodos precisos y resultados abundantes, a los que evidentemente no quisiéramos renunciar.

El uso de "modelo" en el lenguaje ordinario

Si nos atenemos a la relación entre la pintura y lo pintado, la representación y lo representado, la fotografía y lo fotografiado, etc. nos encontramos con que el lenguaje ordinario usa la palabra "modelo" en dos sentidos fundamentales que no sólo son distintos sino que son contrapuestos. En efecto, a veces se usa "modelo" para designar lo pintado, lo representado, lo fotografiado. Así, se habla del modelo de un pintor o un escultor, de la modelo de un fotógrafo, del auge de la profesión de modelo desde que se inició el destape, etc. Pero otras veces se usa "modelo" para designar el extremo opuesto de la relación, es decir, la pintura, la escultura, la representación, la maqueta.[3] Así, se habla del modelo de un barco, del modelo (o maqueta) a escala reducida de un edificio, etc. Esta radical equivocidad del vocablo "modelo" en el lenguaje ordinario se ha trasladado a la ciencia, dando lugar a dos usos opuestos de la palabra. En las ciencias formales se habla de modelo como de aquello a lo que se refiere la teoría, como lo que está frente a la teoría, como (exagerando) lo opuesto a la teoría. Es el sentido que tiene la voz en la teoría de modelos. En las ciencias empíricas, sin embargo, con frecuencia se habla de modelos en otro sentido; a veces, incluso se habla de modelo como sinónimo de teoría. A veces, los economistas o los psicólogos dicen que buscan un modelo para explicar un sistema que les interesa, queriendo decir que buscan una teoría que describa adecuadamente ese sistema.

Dado que el primer significado de la palabra "modelo" —modelo como lo opuesto a teoría, modelo como sistema en que se cumple lo que dice la teoría— es el único que ha sido precisado, estudiado y desarrollado —ahí está el formidable arsenal conceptual de la teoría de modelos—, parece conveniente darle la preferencia al menos en el campo de la metodología.[4] Donde se emplea la palabra "modelo" como sinónimo de teoría, lo más práctico sería dejar de usarla en dichos contextos y sustituirla por la palabra "teoría", de uso mucho menos confundente. Respecto a los otros usos de "modelo" en la ciencia empírica, convendría precisarlos en función de los conceptos desarrollados a partir de la teoría de modelos, máxime ahora que estos conceptos encuentran creciente aplicación en las investigaciones metodológicas sobre las teorías físicas.[5]

Servir de Modelo

En las ciencias empíricas con frecuencia ocurre que el sistema que se quiere describir teóricamente es enormemente complicado y que el investigador no sabe cómo hincarle el diente, no sabe por dónde empezar. A veces lo que hace es buscar o construir otro sistema "que le sirva de modelo" para el estudio del primero.

Si estudiamos el tránsito rodado en Barcelona y nos perdemos en la complejidad del tema, sin llegar a resumirlo en principios o ecuaciones esclarecedoras, quizás encontremos la inspiración estudiando otro sistema que tenga algunas características en común con el tránsito en Barcelona, pero que sea más simple o mejor conocido y estudiado –como el flujo de líquidos de densidad variable por un sistema de canales de perfil variable. Es decir, el flujo de dichos líquidos nos puede quizás servir de modelo para estudiar el tránsito rodado en Barcelona.[6]

Si queremos estudiar la resistencia que ejercerá el aire sobre un determinado avión a diversas velocidades, la investigación directa puede resultar peligrosa y llena de problemas y dificultades. Una manera racional de proceder consistirá en construir una maqueta a escala del avión en cuestión y una cámara de ensayo donde podamos provocar corrientes controladas de aire, en estudiar cómo funciona ese sistema simple (qué resistencia opone el avión-maqueta a las corrientes de aire de la cámara) y en formular una teoría que lo describa adecuadamente. Con un poco de suerte, esa misma teoría será aplicable también al sistema formado por el avión grande y los vientos de verdad. El avión-maqueta y la cámara de viento nos habrán servido de modelo para estudiar la resistencia del avión grande al viento de verdad –que es lo que nos interesa.

¿Qué ocurre en estos casos? Queremos describir teóricamente –construir una teoría que nos sirva para explicar y predecir– un sistema muy complicado y poco conocido, y no sabemos cómo proceder directamente. Entonces seguimos un camino indirecto. Nos fijamos en otro sistema más simple o mejor conocido que el primero, pero que posea algunos de sus rasgos o características, que se le parezca en algún respecto que intuitivamente nos parezca relevante. Si no encontramos tal sistema, lo construimos (con plástico, madera y acero o, al menos, con la imaginación). En cualquier caso, nos encontramos con dos sistemas: el que nos interesa, pero que nos resulta demasiado complicado o desconocido, y el que se le parece en algo, pero que es más simple o mejor conocido o más fácilmente estudiable. Construimos una teoría que describa adecuadamente el funcionamiento del sistema simple, que tenga al sistema simple por modelo. Y, finalmente, tratamos de aplicar esa misma teoría al sistema complejo o desconocido. Pueden pasar dos cosas. Puede que en el sistema complejo no se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. En ese caso decimos que ese sistema simple o conocido no sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. Y hay que volver a empezar o buscar la inspiración por otro camino. Pero puede que en el sistema complejo sí se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. Entonces decimos que el sistema simple o conocido sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. En ese caso, ambos sistemas son modelos de la misma teoría y, por tanto, tienen ciertas propiedades estructurales en común, tienen cierta estructura en común (a saber, la estructura caracterizada por la teoría en cuestión).[7]

El *servir de modelo* es, pues, algo distinto de (pero reducible al) *ser modelo de*.

Podemos decir que el sistema $\boldsymbol{A}$ sirve de modelo del sistema $\boldsymbol{B}$ al científico H si y sólo si (1) $\boldsymbol{A}$ es más simple o resulta más conocido a H que $\boldsymbol{B}$, (2) a partir de $\boldsymbol{A}$ H desarrolla la teoría T, de la que $\boldsymbol{A}$ es un modelo y (3) $\boldsymbol{B}$ es también un modelo de T.

Es de esperar que otras expresiones usadas en las ciencias empíricas en las que aparezca la palabra "modelo" sean igualmente reducibles al concepto de modelo que se usa en teoría de modelos, aunque la mayor parte del trabajo –evidentemente– está todavía por hacer.

NOTAS

1 (*Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo*, Tecnos, Madrid, 1973, pp. 90–91). Esta distinción es importante y esclarecedora. Por desgracia, la elaboración y caracterización de la distinción en el texto de Ferrater es muy confusa, confusión a la que contribuye el uso que Ferrater hace de los vocablos técnicos matemáticos "isomorfismo" y "homomorfismo". En el significado matemático de estos términos –que es el único que yo conozco– los isomorfismos son un tipo especial y extremo de homomorfismos, es decir, todo isomorfismo es homomórfico, pero no a la inversa. Por eso expresiones como "el isomorfismo, sea o no homomórfico ..." y oraciones como "Tanto si x pinta y con similaridad pictórica como (si) no, es menester que x sea isomórfico con y; sólo cuando la pintura ofrece similaridad pictórica es menester, además, que x sea homomórfico con y" no resultan excesivamente inteligibles, al menos si se da a esos términos su significado matemático. Y si Ferrater les da otro significado distinto –y puesto que se trata de palabrotas técnicas ajenas al lenguaje ordinario–, debiera informarnos de cuál es ese significado, a fin de que lo entendamos.

2 La teoría de modelos fue iniciada por Tarski. Una presentación actual de la misma puede encontrarse, por ejemplo, en *Model Theory*, de C. Chang y H.J. Keisler (North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1973).

3 Ferrater sólo parece ser consciente en su ponencia de este segundo uso de "modelo" en el lenguaje ordinario (*Las palabras y los hombres*, Península, Barcelona 1971, pp. 139, 143 y 144, o *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo*, pp. 89 y 92), pero no del primero.

4 Esta postura afortunadamente no es original. Es la misma que mantiene, por ejemplo, Patrick Suppes en "A comparation of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciences", impreso en *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences* (D. Reidel, Dordrecht, Holanda 1961).

5 Piénsese en el importante papel que juegan los modelos en la reconstrucción de las teorías físicas por Joseph Sneed y sus discípulos. De todos modos, el concepto sneediano de teoría es mucho más complejo que el concepto simple e ingenuo aquí propuesto.

6 Varios ejemplos –entre ellos, uno casi igual que éste– de sistemas que sirven de modelos para el estudio de otros se encuentran en la ponencia de Ferrater. Véase la pág. 147 de *Las palabras y los hombres*, o las págs. 94–95 de *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo*.

7 Quizás es esto lo que Ferrater quiere decir al final del primer párrafo de la pág. 147 de *Las palabras y los hombres*, o de la pág. 95 de *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo*.