LÓGICA DEÓNTICA. DEDUCCIÓN NATURAL Y DECISIÓN MEDIANTE TABLAS SEMÁNTICAS

Jesús Rodríguez Marín

1. *Deducción natural*

LOS SISTEMAS CONOCIDOS de lógica deóntica utilizan en la prueba de los teoremas la deducción axiomática. Aquí trataré de introducir las técnicas de la deducción natural para los cálculos deónticos monádico-juntoriales. Me parece absolutamente irrelevante el enumerar aquí las diferencias existentes entre ambos tipos de deducción y las ventajas e inconvenientes que cada uno de ellos plantea. Todas estas cuestiones se considerarán como conocidas.

Mi exposición se apoyará en dos bases:

a) El sistema de deducción natural tal como aparece en el *Natural Deduction* de Anderson-Johnstone, [1] en su parte correspondiente a lógica proposicional.

b) El antiguo sistema de lógica deóntica construido por von Wright en 1951, al que me referiré con el nombre DL-51. [2]

Se darán por supuestas las reglas de deducción natural del arriba citado sistema de Anderson-Johnstone, y a ellas se añadirán una serie de reglas específicas del cálculo deóntico. Como se utiliza la notación simbólica de Lukasiewicz la nomenclatura de las reglas se ha modificado convenientemente: I significará "Introducción", y El significará "Eliminación". Estas letras acompañarán a las correspondientes

[1] Anderson-Johnstone, *Natural Deduction*, fundamentalmente el cap. 2, pp. 17-78.

[2] Von Wright, *Deontic Logic*, en *Logical Studies*, pp. 58-74.

letras símbolos de juntores. Así, por ejemplo: IK significará introducción del conjuntor", ElK significará "eliminación del conjuntor", y así sucesivamente. Otro tipo de símbolos que puedan aparecer se explicitarán en cada caso concreto.

1.1. Reglas adicionales para el cálculo deóntico

RDND1.

$$\begin{array}{c} Ox \\ \hline\hline NPNx \end{array}$$

RDND2.

$$\begin{array}{c} PAxy \\ \hline\hline APxPy \end{array}$$

RDND3a.

$$\begin{array}{c} NPx \\ \hline PNx \end{array}$$

RDND3b.

$$\begin{array}{c} NPNx \\ \hline Px \end{array}$$

RDND4.

$$\begin{array}{c} Exy \\ \hline\hline EPxPy \end{array}$$

Estas reglas corresponden a los principios básicos establecidos por von Wright para el DL-51: definición del concepto de obligación mediante el de permisión, principio de distribución deóntica, principio de permisión deóntica y regla de extensionalidad. Los símbolos específicamente deónticos que aparecen son P y O, que simbolizan respectivamente los conceptos "permitido" y "obligatorio". La lectura del resto de los símbolos es la usual para la deducción natural en el cálculo juntorial.

1.2. Algunos teoremas

Una vez dadas las reglas básicas del cálculo puede exponerse a manera de ejemplo la prueba de algunos teoremas del DL-51.

T1. EOpNPNp. (Definición de O en términos de P.)

1.	Op	
2.	NPNp	1, RDND1.
3.	COpNPNp	1-2, IC.
4.	NPNp	
5.	Op	4, RDND1.
6.	CNPNpOp	4-5, IC.
7.	KCOpNPNpCNPNpOp	3, 6, IK.
8.	EOpNPNp	7, IE.

T2. COpPp. (Si algo es obligatorio entonces está permitido.)

1.	Op	
2.	NPNp	1, RDND1.
3.	Pp	2, RDND3b.
4.	COpPp	1-3, IC.

T3. EPpNONp. (Definición de P en términos de O.)

1.	EONpNPNNp	T1, Sust. p/Np
2.	EONpNPp	1, reemplazo.
3.	ENONpNNPp	2, LP. [3]
4.	ENONpPp	3, reemplazo.
5.	EPpNONp	4. Com. E

[3] Negación de los dos miembros de E. La licitud del paso viene dada por lalógica proposicional (LP).

T4. *EPApqAPpPq*. (Distribución de la permisión en la disyunción.)

1.	PApq	
2.	APpPq	1, RDND2.
3.	CPApqAPpPq	1-2, IC.
4.	APpPq	
5.	PApq	4, RDND2.
6.	CAPpPqPApq	4-5, IC.
7.	KCPApqAPpPqCAPpPqPApq	3, 6, IK.
8.	EPApqAPpPq	7. IE.

T5. *EOKpqKOpOq*. (Distribución de la obligación en la conjunción.)

1.	ENONApqANONpNONq	T4, reemplazo aut. T3.
2.	ENOKNpNqNKNNONpNNONq	1, DM.
3.	ENOKNpNqNKONpONq	2, reemplazo.
4.	ENNOKNpNqNNKONpONq	3, LP [4]
5.	EOKNpNqKONpONq	4, reemplazo.
6.	EOKNNpNNqKONNpONNq	5, sust. p/Np, q/Nq.
7.	EOKpqKOpOq	6, reemplazo.

2. *Método de tablas semánticas*

Igualmente para la lógica deóntica monádico-juntorial presentaré aquí un método de decisión mediante técnica semántica basado en las ideas de Føllesdal&Hilpinen, expuestas en su artículo *Deontic Logic: An Introduction* (que a su vez se basan en las ideas al respecto de Hintikka, Kanger y Kripke), y en el método de las tablas semánticas tal y como ha sido presentado por Smullyan en su *First-order Logic.* [5]

[4] Ver nota (3).

[5] El artículo de Follesdal & Hilpinen que se cita está recogido en Hilpiner, R. (ed.) *Deontci Logic. Introductory and systematic readings*, pp. 1-35.

El método posibilita determinar la validez de las fórmulas deónticas de una manera mucho más agil que si se utiliza el clásico método de tablas de verdad propuesto por von Wright.

Comenzaré indicando las pertinentes reglas para evaluación de las fórmulas de LP y de un sistema standard de lógica deóntica (en este caso el DL-51 citado anteriormente). Llamaré evaluación V de una fórmula X a la operación mediante la cual se asigna a X un valor de verdad T o F en cada mundo posible $M \epsilon S$, donde S representa el conjunto de "mundos posibles". La operación será simbolizada mediante una función binaria V(X,M), cuyo rango es el conjunto $\{T,F\}$.

Sobre estas bases se establecen las siguientes reglas:

R1. V(Np,M) = T si y sólo si V(p,M) = F, y en cualquier otro caso V(Np,M) = F.

R2. V(Kpq,M) = T si y sólo si V(p,M) = V(q,M) = T, en cualquier otro caso V(Kpq,M) = F.

R3. V(Apq,M) = F y si y sólo si V(p,M) = V(q,M) = F; en cualquier otro caso V(Apq,M) = T.

R4. V(Cpq,M) = F si y sólo si V(p,M) = T y V(q,M) = F, en cualquier otro caso V(Cpq,M) = T. [6]

Para las fórmulas deónticas propondré las cuatro reglas siguientes:

R5. V(OX,M) = T si y sólo si $V(X,M_i) = T$ para todo $M_i \epsilon S$ tal que $R(M_i,M)$.

R6. V(PX,M) = T si y sólo si $V(X,M_i) = T$ para algún $M_i \epsilon S$ tal que $R(M_i,M)$.

R7. V(PX,M) = F si y sólo si $V(X,M_i) = F$ para todo $M_i \epsilon S$ tal que $R(M_i,M)$.
tal que $R(M_i,M)$.

R8. V(OX,M) = F si y sólo si $V(X,M_i) = F$ para algún $M_i \epsilon S$

[6] Las reglas se basan en las proporcionadas por Follesdal & Hilpinen, op. cit., p. 17.

Volvamos ahora sobre las cuatro reglas específicamente deónticas desde una perspectiva intuitiva. M y M_i son "mundos posibles" ($M \in S$, $M_i \in S$), y las obligaciones establecidas en M se consideran cumplidas en M_i. Por otro lado, si un estado de cosas p es permitido en M se considera compatible con todos los estados de cosas obligatorios en M y por tanto cumplidos en M_i. De una manera más estricta la permisión de p en M exige que haya *al menos* un mundo posible M_i en el que se dé p; es decir, $V(p,M_i)=T$. Esa es la diferencia básica con la obligación, ya que un estado de cosas p que es obligatorio en M exige que para todos los mundos posibles M_i se dé p. Se da, por tanto, una especial relación entre M y M_i. Esa relación viene expresada por $R(M_i,M)$ y recibe el nombre (debido a Hintikka) de "relación de alternatividad deóntica" de M_i con M. En otras palabras, y citando a Føllesdal&Hilpinen, un mundo M_i en el que son verdaderas todas las proposiciones cuya obligatoriedad es verdadera en M se llama una *alternativa deóntica* de M. Si pensamos M como nuestro mundo actual, entonces las alternativas deónticas de M pueden considerarse como "mundos deónticamente perfectos" o "mundos ideales".

Dado que todo M pertenece a S, que igualmente todo M_i pertenece a S, y que siempre, dentro de este contexto, se da $R(M_i,M)$, podremos evitar escribir en las reglas tales anotaciones por razones obvias. En consecuencia reescribiré éstas de una manera más simple. Así:

R5. $V(OX,M) = T$ si y sólo si $\Pi M_i(V(X,M_i) = T)$
R6. $V(PX,M) = T$ si y sólo si $\Sigma M_i(V(X,M_i) = T)$
R7. $V(PX,M) = F$ si y sólo si $\Pi M_i(V(X,M_i) = F)$
R8. $V(OX,M) = F$ si y sólo si $\Sigma M_i(V(X,M_i) = F)$.

Propondré ahora la siguiente expresión decisoria: Una fórmula deóntica es un teorema del sistema elegido si y sólo si su negación es inconsistente. Con otras palabras, y con vistas al uso de las tablas semánticas diré que una fórmula deóntica es un teorema del sistema cuando de su negación es deducible una contradicción. O, por decirlo de otra manera, es un teorema si no es concebible un contra-ejemplo de élla sin contradicción.

Daré por sentado y conocido lo referente al uso de las tablas semánticas tal como aparecen en el ya citado libro de Smullyan. Las reglas que allí se indican las he adecuado a la terminología empleada aquí de la siguiente manera:

RT1.

$$\frac{V(NX,M) = T}{V(X,M) = F} \qquad \frac{V(NX,M) = F}{V(X,M) = T}$$

RT2.

$$\frac{V(KXY,M) = T}{\begin{array}{c} V(X,M) = T \\ V(Y,M) = T \end{array}} \qquad \frac{V(KXY,M) = F}{V(X,M) = F \;\big|\; V(Y,M) = F}$$

RT3.

$$\frac{V(AXY,M) = T}{V(X,M) = T \;\big|\; V(Y,M) = T} \qquad \frac{V(AXY,M) = F}{\begin{array}{c} V(X,M) = F \\ V(Y,M) = F \end{array}}$$

RT4.

$$\frac{V(CXY,M) = T}{V(X,M) = F \;\big|\; V(Y,M) = T} \qquad \frac{V(CXY,M) = F}{\begin{array}{c} V(X,M) = T \\ V(Y,M) = F \end{array}}$$

A estas reglas se añaden las específicamente deónticas:

RT5.

$$\frac{V(OX,M) = T}{\Pi M_i(V(X,M_i) = T)} \qquad \frac{V(OX,M) = F}{\Sigma M_i(V(X,M_i) = F)}$$

RT6.

$$\frac{V(PX,M) = T}{\Sigma M_i(V(X,M_i) = T} \qquad \frac{V(PX,M) = F}{\Pi M_i(V(X,M_i) = F)}$$

Hay que anotar también que una tabla, o subtabla correspondiente, podrá ser cerrada cuando en ella aparezcan dos fórmulas del tipo:

$\Pi M_i(V(X, M_i)=T)$	y	$\Pi M_i(V(X, M_i)=F)$,	o bien
$\Pi M_i(V(X, M_i)=T)$	y	$\Sigma M_i(V(X, M_i)=F)$,	o bien
$\Sigma M(X(X,M_i)=T)$	y	$\Pi M_i(V(X, M_i)=F)$.	

Sobre estas bases consideraremos algunos teoremas aplicando sobre ellos el método a manera de ejemplo.

T2. COpPp.

1.	$V(COpPp,M) = F$	
2.	$V(Op,M) = T$	1, RT4.
3.	$V(Pp, M) = F$	1, RT4.
4.	$\Pi M_i(V(p, M_i) = T)$	2, RT5.
5.	$\Pi M_i(V(p, M_i) = F)$	3, RT6.

4.5

En la línea uno se supone la adjudicación de F como valor de verdad de la fórmula. A partir de ella y mediante la aplicación de las reglas indicadas aparecen las líneas 4 y 5 que son contradictorias entre sí. Por tanto se puede establecer la verdad de la fórmula en cuestión. El procedimiento es similar en todos los otros casos. Las anotaciones a la derecha de cada línea indican la línea de la que se parte y las operaciones realizadas (reglas aplicadas).

T3. EPpNONp.

1. V(EPpNONp, M)=F
2. V(KCPpNONpCNONpPp, M)=F 1.

3.	V(CPpNONp, M)=F	2,RT2.	4.	V(CNONpPp,M)=F	2,RT2.
5.	V(Pp, M)=T	3,RT4.	11.	V(NONp, M)=T	4,RT4.
6.	V(NONp, M)=F	3,RT4.	12.	V(Pp, M)=F	4,RT4.
7.	V(ONp, M)=T	6,RT1.	13.	V(ONp, M)=F	11,RT1.
8.	ΠM_i(V(Np, M_i)=T	7,RT5.	14.	ΣM_i(V(Np, M_i)=F)	13,RT5.
9.	ΠM_i(V(p, M_i)=F)	8,RT1.	15.	ΣM_i(V(p, M_i)=T)	14,RT1.
10.	ΣM_i(V(p, M_i)=T)	5,RT6.	16.	ΠM_i(V(p, M_i)=F)	12,RT6.
	9.10			15.16	

T4. EPApqAPpPq.

1. V(EPApqAPpPq, M)=F
2. V(KCPApqAPpPqCAPpPqPApq, M)=F

Left branch:

3. V(CPApqAPpPq, M)=F — 2,RT2.
5. V(PApq, M)=T — 3,RT4.
6. V(APpPq, M)=F — 3,RT4.
7. ΣM_i(V(Apq, M_i)=T) — 5,RT6.
8. V(Pp, M)=F — 6,RT3.
9. V(Pq, M)=F — 6,RT3.
10. ΠM_i(V(p, M_i)=F) — 8,RT6.
11. ΠM_i(V(q,M_i)=F) — 9,RT6.

12. ΣM_i(V(p,M_i)=T)	13. ΣM_i(V(q, M_i)=T) 7,RT3.
10.12	11.13

Right branch:

4. V(CAPpPqPApq, M)=F — 2,RT2.
14. V(APpPq, M)=T — 4,RT4.
15. V(PApq, M)=F — 4,RT4.
16. ΠM_i(V(Apq,M_i)=F) — 15,RT6.
17. ΠM_i(V(p, M_i)=F) — 16,RT3.
18. ΠM_i(V(q, M_i)=F) — 16,RT3.

19. V(Pp, M)=T 14,RT3.	20. V(Pq,M)=T 14,RT3.
21. ΣM_i(V(p,M_i)=T) 19,RT6.	22. ΣM_i(V(q, M_i)=T) 19,RT6.
17.21	18.22

T5. EOKpqKOpOq.

1. V(EOKpqKOpOk, M)=F
2. V(KCOKpqKOpOq CKOpOqOKpq, M)=F

Left branch:

3. V(COKpqKOpOq,M)=F   2,RT2.
5. V(OKpq,M)=T   3,RT4.
6. V(KOpOq, M)=F   3,RT4.
7. $\Pi M_i(V(Kpq,M_i)=T$ 5,RT5.
8. $\Pi M_i(V(p,M_i)=T)$ 7,RT2.
9. $\Pi M_i(V(q,M_i)=T)$ 7,RT2.

Left-left branch:

10. V(Op, M)=F   6,RT2.
12. $\Sigma M_i(V(p, M_i)=F)$ 10,RT5.

8.12

Left-right branch:

11. V(Oq, M)=F   6,RT2.
13. $\Sigma M_i(V(q,M_i)=F)$ 11,RT5.

6,RT2.
9.13   11,RT5.

Right branch:

4. V(CKOpOqOKpq, M)=F   2,RT2.
14. V(KOpOq, M)=T   4,RT4.
15. V(OKpq, M)=F   4,RT4.
16. V(Op, M)=T   14,RT2.
17. V(Oq, M)=T   14,RT2.
18. $\Pi M_i(V(p, M_i)=T)$ 16,RT5.
19. $\Pi M_i(V(q, M_i)=T)$ 17,RT5.
20. $\Sigma M_i(V(Kpq, M_i)=F)$ 15,RT5.

Right-left branch:

21. $\Sigma M_i(V(p,M_i)=F)$

18.21

Right-right branch:

22. $M_i(V(q,M_i)=F)$ 20,RT2.

19.22

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON & JOHNSTONE, *Natural Deduction*, Wadsworth, Belmont (California), 1963.

BENEYTO, R. Laberintos analíticos, *Teorema* 4 (1971), 19-30.

BETH, E. W. *The Foundation of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1959. *Formal Methods*, D. Reidel Pub., Dordrecht, Holland, 1962.

CRESWELL, M. J. Some further semantics for Deontic Logic, *Logique et Analyse* 10 (1967), 179-191.

DOPP, J. *Logiques construites par une méthode de déduction naturelle*, Nauwelaerts, Louvain, 1962.

FØLLESDAL & HILPINEN, "Deontic Logic: An Introduction", en HILPINER, R. (ed.), *Deontic Logic: Introductory and systematic readings*, D. Reidel Pub. Dordrecht-Holland, 1971, pp. 1-35.

HANSON, W. H. Semantics for deontic logic, *Logique et Analyse* 8 (1965), 177-190.

HINTIKKA, J. *Models for Modalities*, D. Reidel Pub. Dordrecht-Holland, 1969. "Some main problems of deontic logic," en HILPINEN, (ed.), *op. cit.*, pp. 59-104.

KANGER, S. "New foundations for Ethical Theory," en HILPINEN, R. (ed.), *op. cit.*, pp. 36-58.

KRIPKE, S. A. "Semantical analysis of Modal Logic I," *Zeitschrift für Matemathische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67-69. "Semantical consideration on modal logic," *Acta Philosophica Fennica*, 16 (1963), 83-94.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic*, Springer-Verlag, Berlin-Heilderberg-New York, 1968.

WRIGHT, G. H. von, "Deontic Logic," *Mind* 60 (1951), pp. 1-15. Reimpreso en *Logical Studies*, Londres, 1957. "Deontic Logic," *American Philosophical Quarterly* 4 (1967), 136-143. *An Essay in Deontic Logic and the general Theory of Action*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

Julio, 1973.