ÁRBOLES, LÓGICA Y MECANISMOS DE DECISIÓN

R. Beneyto

1. *El concepto de árbol.*

Las tablas de verdad, el análisis veritativo-funcional, el sistema de deducción natural de Gentzen, las tablas semánticas de Beth y las tablas analíticas de Smullyan constituyen, entre otras, aplicaciones en campos lógicos —más veladas unas, más claras otras— de las configuraciones matemáticas denominadas *árboles.*

Puede el concepto de *árbol* ser definido de modo riguroso y preciso. [1] A propósito del presente trabajo es suficiente, sin embargo, el concepto intuitivo del mismo del que sin duda todos disponemos y que precisaremos con las siguientes observaciones.

Los *árboles* son conjuntos de puntos —en número finito o infinito—, uno y sólo uno de los cuales constituye el *origen.* Tales puntos se distribuyen en *ramas;* y cada una de ellas parte del origen. La relación *sucesor inmediato* nos permite, en teoría, recorrer todos los puntos que forman éstas. Dicha relación es tal que, a excepción del punto origen, todo punto es sucesor inmediato de un y sólo un punto. Es posible, por el contrario, que un punto tenga dos o más sucesores inmediatos. Limitaremos a 2 los posibles sucesores inmediatos de cada punto y denominaremos *punto de bifurcación* a todo punto que tenga dos sucesores inmediatos.

Finalmente, denominaremos *punto extremo* a todo punto que no tenga sucesor alguno; y diremos que una rama *progresa al infinito* si no contiene punto extremo.

[1] Cf. R. M. Smullyan: *First-Order Logic* (Berlin: Springer-Verlag, 1968), pp. 3 y 4.

Si convenimos que cada número encerrado entre paréntesis representa un punto y que cada trazo representa la relación 'sucesor', el siguiente es un árbol diádico —cada punto tiene a lo sumo dos sucesores inmediatos— cuyo origen es '(1)':

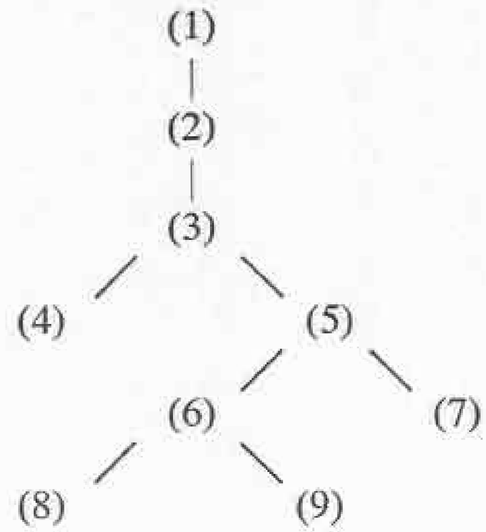


Fig. 1

Consta de nueve puntos agrupados en las cuatro ramas siguientes:

(1)-(2)-(3)-(4),
(1)-(2)-(3)-(5)--(6)-(8),
(1)-(2)-(3)-(5)-(6)-(9) y
(1)-(2)-(3)-(5)-(7),

cuyos puntos extremos son, respectivamente, (4), (8), (9) y (7). (3) y (5) son, por ejemplo, puntos de bifurcación; (6) es sucesor inmediato de (5) y antecede inmediatamente a (8) y (9).

Comparemos ahora el árbol de la figura 1 con el de la figura que sigue.

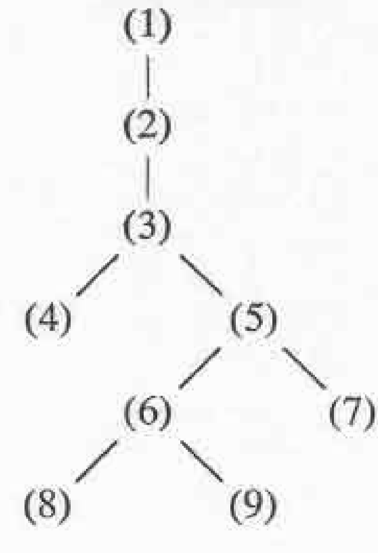


Fig. 2

Ambos árboles contienen el mismo número de puntos. Digamos que el punto (1) del primer árbol es un *punto conjugado* del punto (1) del segundo árbol y viceversa; el punto (2), del (2); y así sucesivamente. Los puntos conjugados se distribuyen en ramas tales que, si a un punto (p) de un árbol le antecede/sucede inmediatamente el punto (p′), al conjugado de (p) en el otro árbol le antecede/sucede inmediatamente el conjugado de (p′). Si T es el árbol de la primera figura y T′ el de la segunda, diremos que T′ es una imagen de T y viceversa (o mejor, que T y T′ son *árboles conjugados*).

En tales circunstancias, llamaremos *ramas conjugadas* a cada par de ramas ρ y ρ' de T y T′ respectivamente tales que sus constituyentes sean todos puntos conjugados.

Si llamamos *puntos coincidentes* a los puntos que constituyen una rama, consideraremos además que los puntos coincidentes de (p) son no sólo los puntos coincidentes que le corresponden en T, sino también su conjugado (p′) y los puntos de T′ coincidentes con (p′).

2. *El uso de contraejemplos.*

Supongamos que alguien nos dice

Algunos suecos son viejos y
Algunos viejos son calvos;
por tanto Algunos suecos son calvos.

No necesitamos mucha agudeza lógica para hacerle observar que efectivamente cada uno de sus enunciados es verdadero; pero que su argumentación no es correcta. Pero si insiste podemos hacerle patente su error con una argumentación como la que sigue:

	Algunos españoles son ciegos y
	Algunos ciegos son chinos;
por tanto	Algunos españoles son chinos.

Es decir, con una argumentación que tiene la misma estructura; pero que, a diferencia con la precedente, la conclusión es falsa mientras que las premisas son verdaderas. Le hemos mostrado un contraejemplo a su argumentación.

Este artilugio que aquí hemos empleado para descubrir argumentaciones incorrectas puede también ser usada para establecer que una argumentación es correcta. Y ello si contáramos con un método que estableciera que es imposible encontrar un contraejemplo a dicha argumentación; porque

> "Un enunciado Ψ es una consecuencia lógica del conjunto Γ de enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ si y sólo si el conjunto de enunciados $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, -\Psi\}$ es insatisfacible o inconsistente."

Veamos, por ejemplo, si es posible encontrar un contraejemplo a una argumentación que presente la siguiente estructura:

	$P \rightarrow Q$ y
	$Q \rightarrow R$;
por tanto	$P \rightarrow R$.

En el contraejemplo en cuestión $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow R$ han de ser enunciados verdaderos, mientras que $P \rightarrow R$, falso.

La última condición impone que P sea verdadero y R, falso. La primera puede ser satisfecha con uno de dos requisitos mínimos. Hay pues dos posibles modos de encontrar un contraejemplo: que P sea falso o que Q sea verdadero. Se ha de descartar la primera opción, puesto que ya establecimos que P había de ser verdadero. Así, pues, tenemos como posibilidad abierta que P y Q han de ser verdaderos y R falso, y $Q \rightarrow R$ verdadero.

De modo similar, para esta última condición se nos abre una doble posibilidad: que Q sea falso o que R sea verdadero. Condiciones incompatibles con los requisitos últimamente establecidos, con lo que se cierran todas las puertas a un posible contraejemplo: El conjunto de enunciados $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, — (P \rightarrow R)\}$ es insatisfacible; y, por tanto, toda argumentación que presente la estructura de la argumentación analizada es correcta.

Con vistas a poder sistematizar este método de dilucidación sobre la corrección o incorrección de las argumentaciones, presentaré en el próximo apartado el lenguaje formal de que haremos uso y la caracterización de enunciados. Posteriormente estudiaré el método de tablas que engloba las *Semantic Tableaux* de Beth [2] y las *Analitic Tableaux* de Smullyan. [3]

3. *Lenguaje L y Caracterización de enunciados.*

El alfabeto del lenguaje artificial de que nos vamos a servir consta de los siguientes objetos:

a: constantes individuales: *a, b, ..., q;*
b: variables individuales: *r, s, ..., z;*
c: predicados: $A^n, B^n, \ldots, Z^n$ donde $n \geq 0$;
d: juntores: —, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
e: cuantores: ($\forall$.), ($\exists$.), donde los puntos están ocupados por una y sólo una variable individual cualquiera.

(Podemos omitir, por ser de todos conocida, la definición de *fórmula de L.*)

[2] E. W. Beth: *The Foundations of Mathematics* (Amsterdam: North Holland, 1965), 2.ª edición.
E. W. Beth: "Semantic Entailment and Formal Derivability". En J. Hintikka (ed.): *The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 1956).

[3] R. M. Smullyan: *First-Order Logic* (op. cit.).

Con vistas a poder presentar conjuntamente el sistema de Beth y el de Smullyan —así como cualquier otro similar— es conveniente introducir el concepto de *caracterización de enunciados*. Ambos sistemas hacen uso simultáneo de enunciados tales que unos son considerados verdaderos y otros, falsos.

Es, por otra parte, la caracterización concreta de un enunciado, junto con el signo principal del mismo, la que determina el modo en que progresan los árboles en que se apoyan los sistemas, así como los enunciados que ocupan sus puntos y la caracterización de dichos enunciados.

Como es bien sabido, en una interpretación lógicamente reglada la verdad de los enunciados es función de la verdad de los enunciados atómicos.

Pero en las interpretaciones la verdad de los enunciados atómicos —y, en consecuencia, la verdad de los enunciados moleculares— depende, con frecuencia, de la selección de un dominio de individuos y de una serie de subconjuntos de dicho dominio.

Como en la dilucidación de la corrección o incorrección de las argumentaciones no importan los contraejemplos concretos sino la posibilidad o imposibilidad (lógicas) de que éstos existan, tal selección carece de relevancia; por lo que reformulamos las interpretaciones en términos de 'caracterización de enunciados'.

Caracterizar un enunciado es asignarle uno de los dos valores de verdad 'Verdad' y 'Falsedad'. Lo representaremos aquí por $C^V\varphi$ y $C^F\varphi$ respectivamente, siendo φ un enunciado cualquiera.

Interpretar por caracterización el lenguaje L es caracterizar sus enunciados atómicos. El resto de enunciados resulta caracterizado en atención a las siguientes normas:

Si φ y Ψ son enunciados, entonces

a. C^V-φ si y sólo si $C^F\varphi$;
b. $C^V\varphi$ & Ψ si y sólo si $C^V\varphi$ y $C^V\Psi$;
c. $C^V\varphi$ v Ψ si y sólo si $C^V\varphi$ o $C^V\Psi$ o ambas cosas;
d. $C^V\varphi \rightarrow \Psi$ si y sólo si $C^F\varphi$ o $C^V\Psi$ o ambas cosas;
e. $C^V\varphi \longleftrightarrow \Psi$ si y sólo si o $C^V\varphi$ y $C^V\Psi$ o $C^F\varphi$ y $C^F\Psi$;

f. C^V $(\forall \alpha)$ φ, donde α es una variable individual cualquiera, si y sólo si, para toda constante individual β_1, β_2, ..., β_n, $C^V\alpha\varphi\beta_1$, $C^V\alpha\varphi\beta_2$, ..., $C^V\alpha\varphi\beta_n$, —donde, para $i \leq n$, $\alpha\varphi\beta_i$ es el resultado de sustituir por β_i todas las ocurrencias libres de α en φ;
g. $C^V(\exists \alpha)\varphi$ si y solo si, para alguna constante individual β_i, $C^V\alpha\varphi\beta_i$;
a′. C^F-φ si y sólo si $C^V\varphi$;
b′. $C^F\varphi$ & Ψ si y sólo si $C^F\varphi$ o $C^F\Psi$ o ambas cosas;
c′. $C^F\varphi$ v Ψ si y sólo si $C^F\varphi$ y $C^F\Psi$;
d′. $C^F\varphi \rightarrow \Psi$ si y sólo si $C^V\varphi$ y $C^F\Psi$;
e′. $C^F\varphi \longleftrightarrow \Psi$ si y sólo si o $C^V\varphi$ y $C^F\Psi$ o $C^F\varphi$ y $C^V\Psi$;
f′. C^F $(\forall \alpha)\varphi$ si y sólo si, para alguna constante individual β_i, $C^F\alpha\varphi\beta_i$.
g′. C^F $(\exists \alpha)\varphi$ y sólo si, para toda constante individual β_1, β_2, ..., β_n $C^F\alpha\varphi\beta_1$, $C^F\alpha\varphi\beta_2$, ..., $C^F\alpha\varphi\beta_n$.

4. *El método de tablas.*

Los métodos de tablas de Beth y de Smullyan se basan en la anteriormente citada definición de "consecuencia lógica":

> "El enunciado Ψ es una consecuencia lógica del conjunto Γ de enunciados φ_1, φ_2 ..., φ_n si y sólo si el conjunto de enunciados $\{ \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, -\Psi \}$ es insatisfacible o inconsistente".

Más concretamente —en términos de 'caracterización de enunciados'— "si y sólo si no existe caracterización lógicamente normada en la que $C^V\varphi_1$, $C^V\varphi_2$, ..., $C^V\varphi_n$ y $C^F\Psi$".

Tanto las tablas de Beth como las de Smullyan analizan todas las posibilidades de construir una caracterización tal. Con la ayuda de los árboles, ambos sistemas despliegan las diversas opciones que se nos ofrecen para encontrarla, y con las condiciones mínimas que dicha caracterización requiere. Cada una de tales opciones ocupa en el árbol una rama, cada uno de cuyos puntos contiene un requisito de la caracterización en cuestión.

Si, una vez finalizada la construcción de una rama, ninguno de sus requisitos colisiona con alguno de los restantes (si en esa rama no se da el caso de que en un punto figure un enunciado caracterizado de 'Verdad' y en otro el mismo enunciado caracterizado de 'Falsedad'), tal rama garantiza la existencia de una caracterización lógicamente normada en la que los diversos enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son todos asociados con 'Verdad' y el enunciado Ψ asociado con 'Falesdad'.

Por tanto, el enunciado Ψ no es consecuencia lógica de tal conjunto de enunciados.

Ahora bien, puesto que el conjunto de todas las posibilidades de encontrar una caracterización que constituya un contraejemplo está representado por el conjunto de todas las ramas, si en todas éstas existe colisión de puntos ello significa que toda caracterización en la que los diversos enunciados φ estén caracterizados de 'Verdad' y el enunciado Ψ esté caracterizado de 'Falsedad' es una caracterización que no es lógicamente normada. (Adelantemos que una rama se clausura si en ella se produce colisión de puntos.)

En consecuencia, si todas las ramas se clausuran, Ψ es una consecuencia lógica del conjunto Γ de enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Como ya hemos dicho, tanto Beth como Smullyan hacen uso en sus respectivos sistemas —*Semantic Tableaux* y *Analitic Tableaux*— de las configuraciones conocidas como 'árboles', así como de enunciados caracterizados que ocupan los puntos de dichos árboles.

La función que determina los subconjuntos que dentro de un árbol constituyen las diversas ramas y la relación que determina los sucesores inmediatos de los diversos puntos coinciden en ambos sistemas.

En realidad, lo que diferencia a las *Semantic Tableaux* de las *Analitic Tableaux* es el modo de presentar la caracterización de enunciados.

Beth recurre a parejas de árboles tales que el uno es imagen del otro: recurre a parejas de árboles conjugados, uno de *izquierda* y otro de *derecha.* Cada presencia de un enunciado en una tabla de Beth está caracterizada de 'Verdad' o de 'Falsedad' según que dicha presencia ocupe un punto del árbol de izquierda o un punto del árbol de derecha.

Por su parte, Smullyan recurre a un sólo árbol cuyos puntos pueden estar ocupados, indistintamente, por enunciados caracterizados de 'Verdad' o por enunciados caracterizados de 'Falsedad'. Razón por la que precisa caracterizar explícitamente cada una de las ocurrencias de cada uno de los enunciados que ocupan los distintos puntos del árbol; a este respecto, antepondremos a cada uno de ellos una 'V' o una 'F'.

Si tenemos en cuenta que a cada punto de un árbol le corresponde otro —su conjugado —en el árbol imagen con idénticas características —y, en consecuencia, a cada rama le corresponde otra conjugada similar, a cada bifurcación en una rama una bifurcación en su conjugada, etc.— podemos presentar conjuntamente ambos sistemas.

Por ejemplo, una de las reglas de construcción [4] y clausura de las *Semantic Tableaux* reza así:
"V[a]) Si $U \rightarrow V$ figura en una columna de la izquierda, entonces la (sub-)tabla se bifurca; en la columna de la derecha de una de las sub-tablas introducimos U, y en la columna izquierda de la otra, V."

Y hay que añadir: Una tabla o sub-tabla de la izquierda significa una rama del árbol de la izquierda (del árbol de enunciados caracterizados de 'Verdad'); una tabla o sub-tabla de la derecha es una rama del árbol de la derecha (del árbol de enunciados caracterizados de 'Falsedad'); "de una sub-tabla se dice que se halla *subordinada* a aquellas (sub-)tablas de cuyas bifurcaciones ha resultado; se considera que las fórmulas de las dos columnas de una (sub-)tabla figuran en las columnas correspondientes de *toda* sub-tabla que se halle subordinada a ella". [5]

Concretamente, supongamos que $\varphi \rightarrow \Psi$ figura en el primer punto del árbol de la izquierda. Las tablas procederían así:

[4] Cf. E. W. Beth: *The Foundation of Mathematics,* p. 197.

[5] Cf. E. W. Beth: *The Foundation of Mathematics,* p. 197, regla (iij[a]).

(1) $\varphi \rightarrow \Psi$ / (2) — (3) Ψ

(1) / (2) φ — (3)

La regla correspondiente de las *Analitic Tableaux* de Smullyan dice así: [6]

$$\frac{\text{“3)}\quad V(X \rightarrow Y)}{FX \;\; / \;\; VY\text{”}}$$

El árbol cuyo primer punto estuviese ocupado por el enunciado $V(X \rightarrow Y)$ procedería del siguiente modo:

(1) $V(X \rightarrow Y)$ / (2) FX — (3) VY

Si consideramos que en el sistema de Beth las columnas de la derecha (izquierda) son ramas del árbol de la derecha (izquierda), entonces advertiremos que los enunciados que ocupan sus puntos son enunciados caracterizados de 'Falsedad' ('Verdad'). A tenor de lo cual podemos reformular conjuntamente ambas reglas más o menos así:

“Si $C^V\varphi \rightarrow \Psi$ figura en algún punto no prohibido de una rama no clausurada, entonces bifúrquese dicha rama. En una de las nuevas ramas introdúzcase $C^F\varphi$ y en la otra, $C^V\Psi$.” [7]

5. *Reglas de construcción y clausura de tablas.*

Es fácil comprender que, para cada uno de los símbolos lógicos —constantes lógicas y cuantificadores— existen dos

[6] Cf. R. M. Smullyan: *First-Order Logic*, p. 17.

[7] Tengamos presente que, si operamos con árboles conjugados, 'bifurcar una rama' es bifurcar esa rama y su conjugada; 'caracterizar un enunciado de 'Verdad' ('Falsedad') es introducirlo en un punto del árbol de izquierda (derecha); y que cuando decimos —en el caso de producirse bifurcación— “introdúzcase tal enunciado caracterizado de 'Verdad' en una de sus ramas, y tal otro caracterizado de 'Falsedad' en la otra rama” estamos diciendo “introdúzcase en

reglas relativas a la construcción de las tablas. Y ello en razón de que el enunciado del que es signo principal sea un enunciado caracterizado de 'Verdad' o un enunciado caracterizado de 'Falsedad'.

Conviene advertir que en cada regla cabe distinguir dos partes. Una de ellas cumple la finalidad de determinar de modo riguroso la forma en que progresan las tablas (es decir, el número de nuevos puntos que la presencia de una fórmula en una tabla determina, así como su relación de sucesión respecto de determinados puntos). La otra especifica qué enunciados, y bajo qué caracterización, ocupan esos nuevos puntos.

Presentaremos en primer lugar las reglas de la lógica de enunciados. Posteriormente extenderemos estas reglas a la lógica de predicados.

A. Lógica de enunciados

1.a) *Negador y Verdad:* Sea, por ejemplo, el enunciado '—P' y supongamos que, en un punto de una rama no clausurada,[8] figura C^{V}—P. Es decir, el posible contraejemplo a determinar por dicha rama ha de satisfacer la condición de que '—P' sea verdadero; o lo que es lo mismo —teniendo en cuenta la interpretación de los enunciados— ha de satisfacer la condición de que 'P' sea falso (esté caracterizado de 'Falsedad'). Por esta razón, en un nuevo punto de dicha rama introduciremos C^{F}P.

Ahora bien, un punto, en una tabla, puede —y con frecuencia así sucede— pertenecer a ramas diferentes. La regla en cuestión está formulada de modo que recoge de una vez las operaciones a realizar en dichas ramas.

una de las ramas del árbol de izquierda tal enunciado y en *la conjugada de la otra rama...*".

[8] La condición de que figure en una rama no clausurada tiene como único fin evitar operaciones innecesarias. Efectivamente, como puede observarse si se examinan las reglas de clausura, una rama se clausura si y sólo si, para algún enunciado φ, en alguno de los puntos de aquélla figura $C^{V}\varphi$ y en otro $C^{F}\varphi$; con lo que dicha rama ya no puede proporcionar contraejemplo alguno lógicamente legítimo.

Si C^V—φ *figura en un punto no prohibido* p_i *de una tabla* T, *entonces increméntese en un nuevo punto* p_n *cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que* p_i *pertenece, de modo que, si* p_m *es el punto extremo de* ρ, *entonces* $R(p_m, p_n)$. [9] *Introdúzcase* $C^F\varphi$ *en* p_n. Y, para evitar innecesarias presencias [10] de $C^F\varphi$ en dichas ramas —o en ramas a ellas subordinadas: *Prohíbase* p_i (con ello significamos que no procede ninguna nueva operación con la ocurrencia del enunciado que figura en el punto p_i).

1.b) *Negador y Falsedad:* Las consideraciones que preceden a esta regla son similares a aquéllas que preceden a la anterior. Sea el enunciado '—P', y supongamos que C^F—P figura en un punto de una rama no clausurada. Todo contraejemplo que dicha rama pueda determinar ha de satisfacer la condición de que '—P' sea falso; y esto sucede si y sólo si el enunciado 'P' es verdadero, está caracterizado de 'Verdad'. Por ello, en un nuevo punto de dicha rama introducimos C^VP.

Si C^F—φ *figura en un punto no prohibido* p_i *de una tabla* T, *entonces increméntese en un nuevo punto* p_i *cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que* p_i *pertenece, de modo que, si* p_m *es el punto extremo de* ρ, *entonces* $R(p_m, p_n)$. *Introdúzcase* $C^V\varphi$ *en* p_n *y prohíbase* p_i.

2.a) *Conjuntor y Verdad:* Supongamos que en un punto de una rama no clausurada figura C^VP & Q. Los posibles contraejemplos determinados por dicha rama han de ser tales que el enunciado 'P & Q' sea verdadero.

Teniendo en cuenta las condiciones necesarias y suficientes establecidas al respecto, tanto el enunciado 'P' como el enunciado 'Q' han de ser enunciados verdaderos en dicho con-

[9] $R(p_m, p_n)$ significa 'p_n es sucesor inmediato de p_m'.

[10] Operar dos veces con el enunciado que ocupa un punto no conduce a ninguna situación favorable al hallazgo de un contraejemplo —o a la determinación de una clausura de ramas— que no sé dé ya con una simple operación. Efectivamente, en las diversas ramas ρ —y en las ramas a ellas subordinadas— figuran *ya* los resultados que puedan obtenerse de una segunda operación, razón por la que ésta se puede considerar improcedente.

traejemplo. En consecuencia, hemos de introducir en dos nuevos puntos de dicha rama C^VP y C^VQ.

Si $C^V\varphi$ *&* Ψ *figura en un punto no prohibido* p_i *de una tabla* T, *entonces increméntese en dos nuevos punto* p_n *y* p_{n+1} *cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que* p_i *pertenece, de modo que, si* p_m *es el punto extremo de* ρ, *entonces* $R(p_m, p_n)$ *y* $R(p_n, p_{n+1})$. *Introdúzcase* $C^V\varphi$ *en* p_n *y* $C^V\Psi$ *en* p_{n+1} *y prohíbase* p_i.

2.b) *Conjuntor y Falsedad:* Supongamos que C^FP & Q figura en un punto de una rama que no ha sido clausurada. Como sabemos, 'P & Q' es falso si y sólo si 'P' es falso, o 'Q' es falso, o ambas cosas. Es decir, todo posible contraejemplo ha de satisfacer, cuando menos, una de esas tres condiciones: C^FP o C^FQ, o C^FP y C^FQ. Parece, pues, que exista una triple posibilidad de contraejemplo, y que, en consecuencia, la rama se trifurque.

Sin embargo, la opción "C^FP y C^FQ" es sólo aparente. Mejor dicho, en la rama correspondiente a esta posibilidad puede encontrarse un contraejemplo *sólo si* el contraejemplo se da en las dos ramas correspondientes a las otras opciones: puesto que en el resto de cada una de las respectivas ramas la situación es idéntica, si en la clausura no interviene ninguna subfórmula de 'P' ni de 'Q' que proceda de C^FP y C^FQ respectivamente, se clausuran las tres ramas; si en la clausura interviene algunas de tales subfórmula, también se clausura la rama en que figuran C^FP y C^FQ simultáneamente por contener asimismo tales subfórmulas —y permanecer idénticas, como ya hemos dicho, en el resto. Por esta razón, se desprecia la tercera posibilidad.

Por otra parte, si elegimos, por ejemplo, solamente C^FP pueden suceder dos cosas. En primer lugar, tal elección puede conducirnos a un contraejemplo (y en este caso no había problema). Pero, en segundo lugar, también puede suceder que dé pie a una clausura de rama, con lo que eliminamos la posibilidad de encontrar un contraejemplo en el que 'P' sea verdadero y 'Q' falso.

Realmente, el que C^FP & Q sea requisito de un contraejemplo abre una doble vía a la posibilidad de construirlo.

Una de ellas sobre la base de C^FP y la otra, sobre la base de C^FQ.

Por esta razón, la rama se bifurca, da lugar a dos ramas, cada una de las cuales tiene un nuevo punto (además de los puntos de la rama inicial). En ese punto de una de las ramas se introduce C^FP, y en el de la otra se introduce C^FQ.

> *Si $C^F\varphi$ & Ψ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en dos nuevos puntos p_n y p_{n+1} cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de* ρ, *entonces $R(p_m, p_n)$ y $R(p_m, p_{n+1})$. Introdúzcase $C^F\varphi$ en p_n y $C^F\Psi$ en p_{n+1} y prohíbase p_i.*

3.a) *Disyuntor y Verdad:* Sea el enunciado 'P v Q' y supongamos que C^VP v Q figura en un punto de una rama no clausurada. Pero C^VP v Q si y sólo si C^VP, o C^VQ, o ambas cosas. Es decir, todo posible contraejemplo determinado por dicha rama ha de cumplir con el requisito de que en él uno de los enunciados 'P' y 'Q' —o ambos— ha de ser verdadero. Como en el caso del conjuntor caracterizado de 'Falsedad', y por las mismas razones, estas tres posibilidades se reducen a dos: la rama se bifurca con la introducción de dos nuevos puntos, cada uno de ellos sucesor inmediato del punto extremo de la rama. En el primer sucesor se introduce C^VP y en el segundo, C^VQ. Es decir:

> *Si $C^V\varphi$ v Ψ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *increméntese en dos nuevos puntos p_n y p_{n+1} cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de* ρ, *entonces $R(p_m, p_n)$ y $R(p_m, p_{n+1})$. Introdúzcase $C^V\varphi$ en p_n y $C^V\Psi$ en p_{n+1} y prohíbase p_i.*

3.b) *Disyuntor y Falsedad:* Supongamos que el enunciado 'P v Q' figura, caracterizado de 'Falsedad', en un punto de una rama que no ha sido clausurada: C^FP v Q. El enunciado 'P v Q' es falso si y sólo si son falsos los enunciados 'P' y 'Q'; y ésta es una condición que ha de satisfacer todo posible contraejemplo determinado por la rama en cuestión.

En consecuencia, en dos nuevos puntos de la rama introducimos, respectivamente, C^FP y C^FQ. La regla que corresponde a la transformación del disyuntor caracterizado de 'Falsedad' es la siguiente:

> *Si $C^F\varphi \vee \Psi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T*, entonces increméntese en dos nuevos puntos p_n y p_{n+1} cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$ y $R(p_n, p_{n+1})$. Introdúzcase $C^F\varphi$ en p_n y $C^F\Psi$ en p_{n+1} y prohíbase p_i.*

4.a) *Implicador y Verdad:* Puede ser que el contraejemplo que una rama puede determinar se halle sometido a la condición de que un enunciado 'P → Q' sea verdadero, por figurar en uno de los puntos de la rama correspondiente C^VP → Q. En toda interpretación lógicamente reglada el enunciado 'P → Q' es verdadero si y sólo si en ella o 'P' es falso, o 'Q' es verdadero, o ambas cosas —en términos de interpretaciones por caracterización, C^VP → Q si y sólo si C^FP, o C^VQ, o ambas cosas. Como en el caso de 2.b o en el caso de 3.a, y por las mismas razones, prescindimos en la construcción de la tercera opción y bifurcamos la rama en que C^VP → Q aparece. A su punto extremo se le añaden dos sucesores inmediatos, en el primero de los cuales se introduce C^FP y en el segundo, C^VQ. En consonancia con lo dicho:

> *Si $C^V\varphi \rightarrow \Psi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T*, entonces increméntese en dos nuevos puntos p_n y p_{n+1} cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$ y $R(p_m, p_{n+1})$. Introdúzcase $C^F\varphi$ en p_n y $C^V\Psi$ en p_{n+1} y prohíbase p_i.*

4.b) *Implicador y Falsedad:* Si en un punto de una rama figura C^FP → Q, entonces en el contraejemplo correspondiente posible el enunciado 'P → Q' ha de ser falso. Y esto equivale a decir que el enunciado 'P' es un enunciado verdadero en la interpretación pertinente, mientras que el enunciado 'Q' es falso en esa misma interpretación. En otras palabras, la presencia de $C^F P \rightarrow Q$ en la rama impone al posible contraejemplo una doble condición: la de que $C^V P$ y la de que $C^F Q$.

Por esta razón, se introducen en la rama dos nuevos puntos —sin bifurcación—, en uno de los cuales figurará $C^V P$ y en el otro figurará $C^F Q$. Es decir:

> *Si $C^F \varphi \rightarrow \Psi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en dos nuevos puntos p_n y p_{n+1} cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$ y $R(p_n, p_{n+1})$. Introdúzcase $C^V \varphi$ en p_n y $C^F \Psi$ en p_{n+1} y prohíbase p_i.*

5.a) *Coimplicador y Verdad:* Sea el enunciado '$P \longleftrightarrow Q$' y supongamos que en uno de los puntos de una rama no clausurada figura $C^V P \longleftrightarrow Q$. Sabemos que un enunciado cuyo signo principal es un coimplicador es verdadero si y sólo si o los dos enunciados 'P' y 'Q' relacionados por el coimplicador son verdaderos o los dos son falsos.

Como en los casos 2.b, 3.a y 4.a, nos encontramos ahora con la posibilidad de dos contraejemplos. En consecuencia, la rama se bifurca. Pero, a diferencia con lo que ocurría en aquellas ocasiones, cada caso de la presente alternativa presenta una doble condición. Por esta razón, cada una de las nuevas ramas que resultan de la bifurcación incrementan en dos los puntos ya existentes en la rama de que ambas proceden. En los dos nuevos puntos de una de ellas se introducen $C^V P$ y $C^V Q$, y en los de la otra, $C^F P$ y $C^F Q$.

> *Sí $C^V \varphi \longleftrightarrow \Psi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en cuatro nuevos puntos p_n, p_{n+1}, p_{n+2} y p_{n+3} cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$, $R(p_m, p_{n+2})$, $R(p_n, p_{n+1})$ y $R(p_{n+2}, p_{n+3})$. Introdúzcase $C^V P$ en p_n, $C^V Q$ en p_{n+1}, $C^F P$ en p_{n+2} y $C^F Q$ en p_{n+3} y prohíbase p_i.*

5.b) *Coimplicador y Falsedad:* Supongamos ahora que en uno de los puntos de una rama no clausurada figura

$C^F P \longleftrightarrow Q$. El correspondiente contraejemplo, si es que es posible, deberá satisfacer la condición de que el bicondicional '$P \longleftrightarrow Q$' sea falso. Y esto sucede cuando y sólo cuando en la interpretación correspondiente, de los enunciados 'P' y 'Q', uno es verdadero y el otro, falso.

La posibilidad de que esto suceda es doble: Puede 'P' ser verdadero y 'Q' ser falso; y puede 'P' ser falso y 'Q' verdadero. En consecuencia, nuestra posibilidad de contraejemplo se resuelve en dos: sometida una a las condiciones $C^V P$ y $C^F Q$ y sujeta la otra a las condiciones $C^F P$ y $C^V Q$.

La rama, pues, se bifurca; y, como en el caso anterior, cada rama resultante presenta dos nuevos puntos. Introducimos $C^V P$ y $C^F Q$ en los puntos de la primera y, en los de la segunda, $C^F P$ y $C^V Q$.

> *Si $C^F \varphi \longleftrightarrow \Psi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en cuatro nuevos puntos p_n, p_{n+1}, p_{n+2} y p_{n+3} cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$, $R(p_m, p_{n+2})$, $R(p_n, p_{n+1})$ y $R(p_{n+2}, p^{n+3})$. Introdúzcase C^VP en p_n, C^FQ en p_{n+1}, C^FP en p_{n+2} y C^VQ en p_{n+3} y prohíbase p_1.*

6.a) *Clausura de rama:* Supongamos que en un punto de una rama figura $C^V P$ y que en otro punto de la misma rama figura $C^F P$. El contraejemplo que esta rama podría determinar sería tal que, en la interpretación correspondiente, el enunciado 'P' sería a la vez verdadero y falso. En consecuencia, dicha interpretación no sería lógicamente reglada. En consecuencia, desde el punto de vista lógico, no se trataría de un contraejemplo legítimo, no sería un contraejemplo.

Ello significa que el conjunto de enunciados que ocupan los puntos de la rama es inconsistente, y que, por mucho que progrese dicha rama, el resultado será un(os) conjunto(s) inconsistente(s). En tales circunstancias, no tiene sentido proseguir la ampliación de la tabla a lo largo de dicha rama.

Por esta razón la rama se clausura, aun cuando alguno de sus puntos no haya sido transformado.

Si $C^{V}\varphi$ *y* $C^{F}\varphi$ *figuran en sendos puntos* p_i *y* p_j *de una tabla* T*, entonces clausúrense todas las ramas* ρ *en que* p_i *y* p_j *sean puntos coincidentes.* (Clausúrese toda rama ρ que contenga ambos puntos.)

6.b) *Clausura de tabla: Una tabla se clausura cuando se clausuran todas sus ramas.* Recordemos que el (los) árbol(es) correspondiente(s) a la tabla representa(n) todas las alternativas posibles a la obtención de una caracterización adecuada, una caracterización en la que los diversos enunciados φ estén caracterizados de 'Verdad' y el enunciado Ψ de 'Falsedad'. Tal caracterización pondría de manifiesto que el enunciado Ψ no es una consecuencia lógica de φ.

Ahora bien, si todas las ramas se han clausurado, ninguna de las alternativas sería una caracterización lógicamente normada. Con lo que se demuestra que el enunciado Ψ es una consecuencia lógica de los enunciados φ.

B. Lógica de predicados

7.a) *Cuantor universal y Verdad:* Supongamos que en un punto de una rama no clausurada figura $C^{V}(\forall x)Px$. La condición que este punto impone es la de que los elementos del posible dominio que, junto con una interpretación adecuada de L, han de constituir el contraejemplo al problema planteado, han de satisfacer todos ellos la variable predicativa 'P', que es monádica. Es decir, han de pertenecer al conjunto al que en la interpretación se haga corresponder 'P^1'.

Por lo tanto, si el dominio consta de n individuos y a_1, a_2, ..., a_n son las distintas constantes individuales que los representan, entonces los enunciados 'Pa_1', 'Pa_2', ..., 'Pa_n' han de ser todos enunciados verdaderos. Por ello, si en la confección de la tabla intervienen n constantes individuales distintas, hemos de introducir en la rama n nuevos puntos; y en ellos los enunciados $C^{V}Pa_1$, $C^{V}Pa_2$, ..., $C^{V}Pa_n$. (Recordemos que es frecuente que un mismo punto pertenezca a ramas distintas; en cada una de ellas —si no está clausurada— se ha de llevar a cabo la operación indicada. La regla que sigue, así como las restantes, tiene esto presente.)

> *Si* $C^V(\forall\alpha)\varphi$ *figura en un punto no prohibido* p_i *de una tabla* T *de* r *puntos, y* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *son las distintas constantes individuales ya introducidas o todavía por introducir en* T*, entonces increméntese en* n *nuevos puntos* $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_{r+n}$ *cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que* p_i *pertenece, de modo que, si* p_m *es el punto extremo de* ρ*, entonces* $R(p_m, p_{r+1})$ *y, para todo* j *tal que* $1 \leq j \leq n—1, R(pd\ '_{r+jr+j+1})$*. Para todo* j *tal que* $1 \leq j \leq n$ *introdúzcase* $C^V\alpha\varphi\beta_j$ *en* p_{r+j} —donde $\alpha\varphi\beta_j$ es el resultado de sustituir por β_j todas las ocurrencias libres de α en φ. *Prohíbase* p_i.

7.b) *Cuantor universal y Falsedad:* Sea el enunciado '$(\forall x)Px$' y supongamos que $C^F(\forall x)Px$ figura en un punto de una rama no clausurada. En tal caso, el dominio que, con una adecuada interpretación de L, pueda constituir el contraejemplo buscado se halla sujeto a la condición de que no todos los elementos que lo constituyen satisfagan la variable predicativa 'P'. Es decir, ha de haber por lo menos un elemento, que representaremos por la constante individual *a,* que no pertenezca al conjunto que en la interpretación se hace corresponder a 'P^1'. En consecuencia, el enunciado 'Pa' ha de ser un enunciado falso.

Por otra parte, imponer al contraejemplo la condición de que haya más de un elemento del dominio en tal situación es exigir demasiado, más de lo que permite la presencia de $C^F(\forall x)Px$ en la rama. Por ello, en un nuevo punto de la rama se introduce $C^F Pa$.

Supongamos que en otro punto de la rama figura un enunciado 'Qa' —por ejemplo—, caracterizado de 'Verdad' o de 'Falsedad' y que tal punto procede de una aplicación de la regla 7.b o de una aplicación de la regla 8.a —que presentaremos más adelante. La utilización, en este caso, de una misma constante individual para las dos operaciones impone al contraejemplo la condición de que un mismo individuo *a* se encuentre respecto de 'P^1' y 'Q^1' en las condiciones indicadas por sus respectivas caracterizaciones; y ello reduce las posibilidades de encontrar un contraejemplo. Lo que en cada caso se exigía era encontrar en el dominio al menos un individuo en determinadas condiciones, y no que sea el mismo.

Tampoco sería legítimo hacer uso de la constante individual en casos similares al siguiente. Supongamos que en un punto de una rama figura $C^F(\forall x)Pax$. La condición que se impone a la selección del dominio es la de que al menos uno de los elementos que lo componen no se encuentre en la relación 'P^2' con el individuo representado por la constante individual *a*. Introducir en un nuevo punto de la rama $C^F Paa$ supone someter el contraejemploplo a la condición de que sea el propio individuo representado por *a* el que garantice que $C^F(\forall x)Pax$, y no un individuo cualquiera *b* (que puede ser el mismo u otro diferente del representado por *a* —recordamos que dos o más constantes distintas pueden representar a un mismo individuo, aunque no vale la inversa).

Estas dos últimas dificultades pueden obviarse mediante la utilización de una constante nueva en la rama. La regla correspondiente garantiza esta condición de una vez para todas las ramas con la introducción de una constante que resulta ser nueva en toda la tabla.

> *Si $C^F(\forall \alpha)\varphi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en un nuevo punto p_n cada una de las ramas ρ no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de ρ, entonces $R(p_m, p_n)$. Introdúzcase $C^F\alpha\varphi\beta$ en p_n —donde β es una constante nueva en la tabla* (y $\alpha\varphi\beta$ es el resultado de sustituir por β todas las ocurrencias libres de α en φ). *Prohíbase p_i.*

8.a) *Cuantor existencial y Verdad:* Sea ahora el enunciado '$(\exists x)Px$', y supongamos que $C^V(\exists x)Px$ figura en un punto de una rama no clausurada.

Todo posible contraejemplo a que esta rama dé lugar ha de contar con un dominio de individuos tal que, con una adecuada interpretación para 'P^1' —un conjunto de individuos de dicho dominio— al menos uno de sus elementos ha de satisfacer la variable predicativa 'P^1' —el conjunto que se le asigna a 'P^1' no debe ser vacío.

Es decir, en la caracterización correspondiente, para al menos una de las constantes individuales *a*, C^VPa. Ahora bien, como en el caso anterior, sólo se puede exigir del contraejemplo que exista un individuo en tales condiciones. Se nos pueden presentar en la aplicación de 8.a las mismas dificultades que consideramos en 7.b. Como en este caso, dichas dificultades —el que la constante *a* figure ya en la rama en puntos que resultan de una aplicación de la regla 7.b, o de la regla 8.a y el que la constante *a* figure ya en la matriz del cuantificador— se obvian con la utilización de una nueva constante en la tabla.

> *Si $C^V(\exists\alpha)\varphi$ figura en un punto no prohibido p_i de una tabla* T, *entonces increméntese en un nuevo punto p_n cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que p_i pertenece, de modo que, si p_m es el punto extremo de* ρ, *entonces $R(p_m, p_n)$. Introdúzcase $C^V\alpha\varphi\beta$ en p_n —donde* β *es una constante individual nueva en la tabla (y $\alpha\varphi\beta$ es el resultado de sustituir por* β todas las ocurrencias libres de α en φ). *Prohíbase p_i.*

8b) *Cuantor existencial y Falsedad:* Sea el enunciado '$(\exists x)Px$' y supongamos que $C^F(\exists x)Px$ figura en un punto de una rama no clausurada.

Si en el dominio hubiera algún individuo que satisficiera 'P^1', entonces $C^V(\exists x)Px$. La presencia de $C^F(\exists x)Px$ en la rama impone, pues, al contraejemplo la condición de que en el dominio correspondiente ningún elemento satisfaga 'P^1'.

Es decir, si el dominio constara de *n* individuos y a_1, a_2, ..., a_n fueran las distintas constantes individuales de L que los representan, entonces la interpretación de 'P^1' ha de ser tal que los distintos enunciados 'Pa_1', 'Pa^2', ..., 'Pa_n' han de ser todos enunciados falsos.

Por esta razón, si en la confección de la tabla correspondiente —y ahora nos referimos a la tabla una vez concluida y no sólo a la sección que ya lo está en el momento de la aplicación— intervienen *n* constantes individuales distintas, entonces, como en el caso 7.a, hemos de introducir en la rama n nuevos puntos, y en ellos, $C^F Pa_1$, $C^F Pa_2$, ..., $C^F Pa_n$.

> *Si* $C^F(\exists\alpha)\varphi$ *figura en un punto no prohibido* p_i *de una tabla* T *de* r *puntos, y* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *son las distintas constantes individuales ya introducidas o todavía por introducir en* T, *entonces increméntese en* n *nuevos puntos* $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_{r+n}$ *cada una de las ramas* ρ *no clausuradas a que* p_i *pertenece, de modo que, si* p_m *es el punto extremo de* ρ, *entonces* $R(p_m, p_{r+1})$ *y, para todo* j *tal que* $1 \leq j \leq n-1$, $R(p_{r+j}, p_{r+j+1})$. *Para todo* j *tal que* $1 \leq j \leq n$ *introdúzcase* $C^F\alpha\varphi\beta^j$ *en* p_{r+j} —donde $\alpha\varphi\beta^j$ es el resultado de sustituir por β^j todas las ocurrencias libres de α en φ. *Prohíbase* p_i.

§6. *Construcción de tablas.*

Al construir una tabla dos son los tipos de problemas que se nos pueden presentar: a) Decidir si un enunciado φ es un teorema lógico (un enunciado universalmente verdadero); y b) Decidir si un enunciado Ψ es una consecuencia lógica de un conjunto de enunciados $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ —donde n es finito.

En el primer caso iniciamos la tabla introduciendo $C^F\varphi$ en el punto origen correspondiente. Lo cual significa que si optamos por el sistema de Smullyan escribimos "Fφ" en el origen; y si optamos por el sistema de Beth, introducimos "φ" en el origen del árbol de derecha, dejando en blanco el origen del árbol de izquierda:

Smullyan	*Beth*	
(1) Fφ	(1)	(1) φ
.	.	.
.	.	.

En el segundo caso escribimos una cadena de $n + 1$ puntos (1)-(2)-...-(n)-($n + 1$) tal que (1) es el origen. Introducimos $C^V\varphi_1$, $C^V\varphi_2$, ..., $C^V\varphi_n$ en los puntos (1), (2), ..., *(n)* respectivamente e introducimos $C^F\Psi$ en el punto ($n + 1$). Así:

Smullyan	*Beth*	
(1) $V\varphi_1$	(1) φ_1	(1)
(2) $V\varphi_2$	(2) φ_2	(2)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
(n) $F\varphi_n$	(n) φ_n	(n)
(n + 1) $F\Psi$	(n + 1)	(n + 1) Ψ
.	.	.

Porteriormente, tanto si se trata del primero como del segundo caso, se procede a operar punto a punto en una rama hasta que se clausure o en ella todos los puntos se encuentren prohibidos o no proceda aplicación alguna de regla sobre ninguno de sus puntos.

Operamos después con el primer punto no prohibido de otra rama, y así sucesivamente hasta que el árbol se clausure o en ninguna rama proceda aplicación ulterior alguna de reglas de transformación.

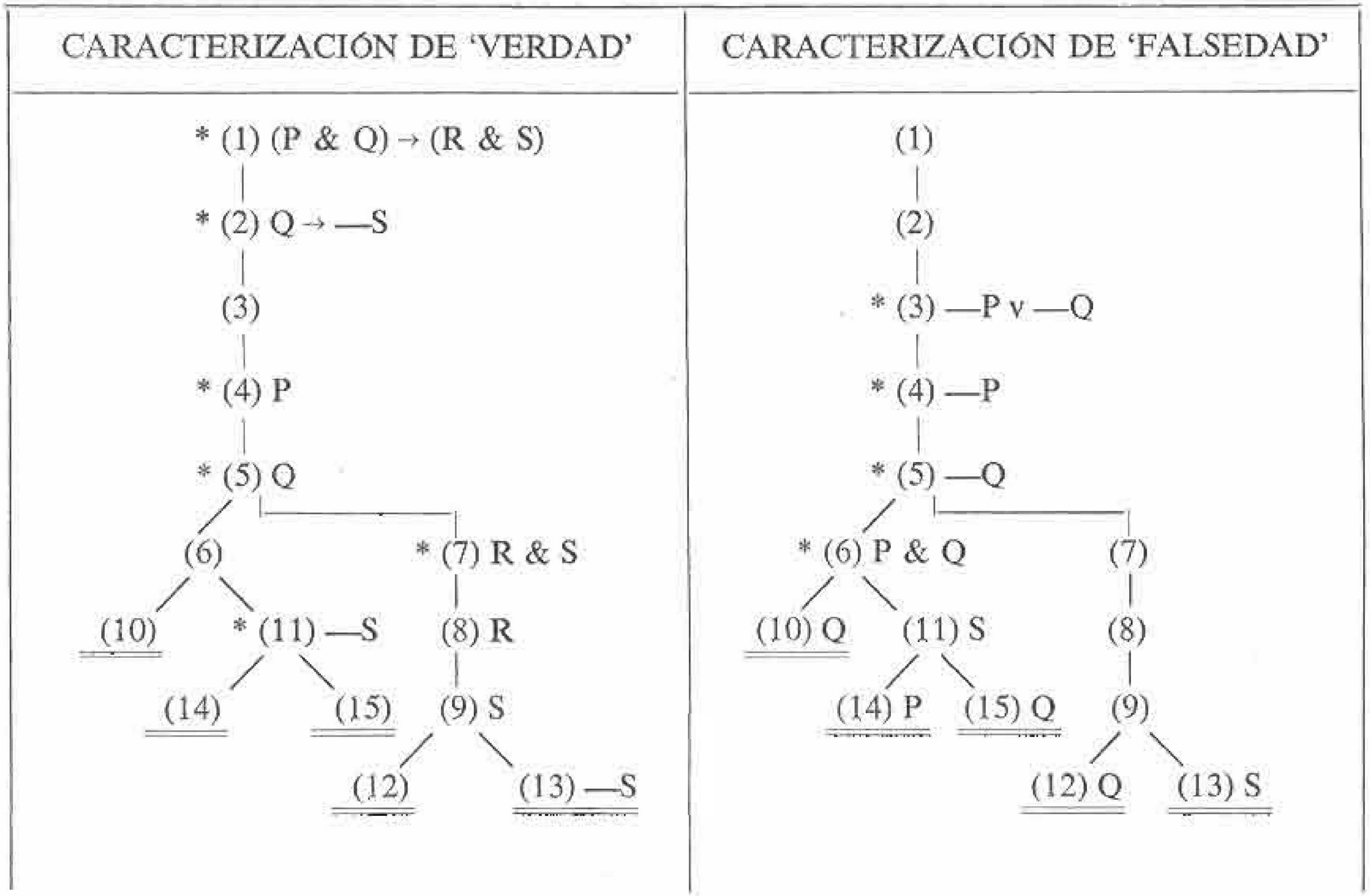
Con todo, si una rama en la que no procede seguir operando no ha sido clausurada, es innecesario operar con el resto del árbol. La rama en cuestión presenta ya una caracterización lógicamente normada que resuelve negativamente el problema.

Los siguientes son dos ejemplos resueltos, respectivamente, por el método de tablas semánticas y por el de tablas analíticas. Los asteriscos han de interpretarse como *prohibiciones* de puntos.

Universidad de Valencia

Ejemplo I: Demuéstrese mediante tablas semánticas que

$(P \& Q) \rightarrow (R \& S),\ Q \rightarrow —S \vdash —P \vee —Q$



Ejemplo II: Demuéstrese mediante tablas analíticas que el siguiente es un enunciado universalmente verdadero:

$(\forall x)(Px \rightarrow Ax) \rightarrow (\forall x)((\exists y)(Py \& Cxy) \rightarrow (\exists z)(Az \& Cxz))$

* (1)F $(\forall x)(Px \rightarrow Ax) \rightarrow (\forall x)((\exists y)(Py \& Cxy) \rightarrow (\exists z)(Az \& Cxz))$

(2)V $(\forall x)(Px \rightarrow Ax)$

* (3)F $(\forall x)((\exists y)(Py \& Cxy) \rightarrow (\exists z)(Az \& Cxz))$

* (4)V $Pa \rightarrow Aa$

* (5)V $Pb \rightarrow Ab$

* (6)F $(\exists y)(Py \& Cay) \rightarrow (\exists z)(Az \& Caz)$

* (7)V $(\exists y)(Py \& Cay)$

* (8)F $(\exists z)(Az \& Caz)$

* (9)V $Pb \& Cab$

* (10)F $Aa \& Caa$

* (11)F $Ab \& Cab$

(12)V Pb

(13)V Cab

(14)F Pa (15)V Aa

(16)F Pb (17)V Ab (18)F Pb (19)V Ab

(21)F Aa (22)F Caa (23)F AA (24)F Caa

(25)F Ab (26)F Cab (27)F Ab (28)F Cab (29)F Ab (30)F Cab