LOS ESCRITOS LÓGICOS DE VENTURA REYES Y PRÓSPER (1863-1922)

Juan Antonio del Val
Universidad Autónoma de Madrid

PUBLICAMOS AQUÍ LOS ESCRITOS sobre lógica de D. Ventura Reyes y Prósper. Este matemático español de fines del siglo XIX fue el primero, por lo que sabemos,[1] que se ocupó sistemáticamente de la lógica en el sentido moderno, es decir, de la lógica posterior a Boole, la que a veces se denomina lógica matemática, lógica simbólica o logística y que constituye hoy la única lógica, cosa que ignoran todavía algunas reliquias del pasado, fósiles vivientes, entre los que se encuentran profesores que enseñan aún en nuestras universidades, institutos de Enseñanza Media y Escuelas Normales y que continúan inspirando los programas de estudios a diversos niveles.[2]

El hecho de que esta publicación coincida con el 50 aniversario de la muerte de Reyes y Prósper, acaecida el 27 de noviembre de 1922, no es sino un pretexto para llevar a cabo algo que esperábamos realizar desde hacía tiempo: rendir un pequeño homenaje a este personaje extraordinario dentro de

[1] Se dice que Juan Cortázar (1809-1873), que fue catedrático de matemáticas en la Universidad Central, dejó inéditos apuntes muy completos de sus cursos sobre Lógica matemática, pero no hemos encontrado ninguna información que lo confirme.

[2] Parece ridículo tener que recordar a estas alturas que la Lógica ha continuado desarrollándose en los últimos siglos y que hoy sólo existe una forma de Lógica. Es tan absurdo pensar que hay dos tipos de Lógica como que alguien enseñara la matemática del siglo XIII y pretendiera oponerla a la matemática actual en tanto que cosas comparables y no como dos momentos en el desarrollo de una misma ciencia. Pero en nuestro país siempre pasan cosas sorprendentes...

la ciencia española del siglo XIX y cuyo interés radica no sólo en haber sido un pionero y en sus aportaciones reales a la ciencia sino también en que constituye un ejemplo particularmente claro de las limitaciones con que tropieza la realización de una tarea científica en nuestro país.

Nació Ventura Reyes y Prósper[3] en Castuera (Badajoz) el 31 de mayo de 1863. Después de brillantes estudios de ciencias, sección de Naturaleza, se doctoró en 1885 con una tesis titulada "Catálogo de las aves de España, Portugal e Islas Baleares". Este trabajo lo presentó en una de las sesiones de la Sociedad Española de Hitoria Natural en la que fue discutido y en ella se decidió su publicación en los Anales de dicha Sociedad. Constituía este catálogo el primero en su género, y pese a que estaba realizado con escasísimos medios, mereció que su autor fuera felicitado por el Presidente y el Secretario del Comité ornitológico internacional con sede en Viena, quienes, entre otras cosas, le manifestaban que había llenado un importante vacío en la Ciencia. Por ello, en el Congreso ornitológico internacional de Budapest fue nombrado miembro permanente de dicho Comité. Su interés por las Ciencias naturales, y en particular por la ornitología y malacología, sin ser abandonado nunca, fue sustituido por una creciente dedicación a las matemáticas. Por estos años realizó un viaje a Alemania acompañado de su hermano mayor Eduardo, un naturalista bastante conocido en su tiempo y que fue catedrático de la Universidad Central. Allí en Alemania conoció al gran mate-

[3] Los datos sobre la vida y actividades científicas de V. Reyes y Prósper están tomados de los expedientes y actas de oposiciones del Ministerio de Educación que se encuentran en el Archivo Histórico Nacional. Algunas informaciones nos han sido suministradas por su sobrino don Eduardo de los Reyes Sanz a quien agradecemos su colaboración. Buena parte de estos datos están recogidos en nuestro artículo: "Un lógico y matemático español del s. XIX: Ventura Reyes y Prósper", *Revista de Occidente*, n.º 36, 1966, pp. 252-261, donde se encontrarán otras informaciones complementarias. Véase también, R. San Juan: "La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes y Prósper", *Gaceta matemática*, primera serie, tomo II, n.º 2, 1950, pp. 39-41. Ricardo San Juan fue alumno de Reyes en el Instituto de Toledo. El citado artículo está constituido en gran parte por una transcripción (sin decirlo) de la hoja de servicios y méritos presentada ante el Ministerio de Instrucción Pública en 1915 por el propio D. Ventura.

mático Félix Klein y a F. Lindemann, que poco antes, en 1882, había demostrado que π es un número trascendente.

Durante unos cuantos años prepara oposiciones a Instituto y Universidad, y finalmente, en 1891, obtiene cátedra de historia natural en el Instituto de Teruel; pero, más interesado ya por las matemáticas, oposita de nuevo a una cátedra de esta asignatura que obtiene en 1892 en el Instituto de Albacete. Apenas había tomado posesión de su nuevo puesto, una reducción general de las cátedras de matemáticas le dejó excedente, y tuvo que optar a una de física y química, asignaturas que no le interesaban y que se vio obligado a explicar durante quince años hasta que finalmente, en 1907, y tras ímprobos esfuerzos, consiguió volver a desempeñar una cátedra de Matemáticas en el Instituto de Toledo, en donde permaneció hasta su muerte.

Su actividad científica se desarrolló en diferentes disciplinas, pero especialmente en las matemáticas, ocupándose con preferencia de dos campos relativamente nuevos, sobre todo en nuestro país: la lógica matemática y la geometría no euclidiana. Su estilo de trabajo contrasta muy poderosamente con el de sus contemporáneos españoles y es una de las muestras más claras de su carácter excepcional dentro de nuestra cultura. Desde su época de estudiante comenzó a aprender diversos idiomas y llegó a saber francés, inglés, alemán, italiano y latín, disponiendo además de unas buenas nociones de griego, ruso, sueco y noruego. Esto le permitía no tener que depender únicamente de la cultura francesa, lo cual constituye una de las limitaciones tradicionales de la cultura española, en la cual las modas científicas o los movimientos literarios sólo son conocidos tras haber pasado por el tamiz francés. Y aunque la cultura francesa posee una riqueza innegable es evidentemente parcial y fragmentaria y presenta en muchos casos numerosas lagunas. [4] Mientras que la mayor parte de los cien-

[4] Este mal que nos aqueja hace muchos siglos —recordemos por ejemplo que desde el siglo XVIII, al menos las novelas y los libros científicos o jurídicos, ya fuesen ingleses, alemanes o incluso italianos, se traducían, la mayor parte de las veces de su versión francesa— no ha desaparecido por completo. Aunque ahora se imponga la costumbre de realizar traducciones directas todavía los

tíficos de su época se dedicaban principalmente a escribir manuales y a ello se reducía su actividad científica (pues como decía Rey Pastor "matemático se proclama a quien de dos manuales sabe sacar un tercero"), Reyes, mucho más próximo a los hábitos de los verdaderos científicos, sólo escribió pequeñas notas sobre problemas concretos o artículos informativos sobre nuevas teorías que sus compatriotas desconocían. Esto último era posible porque estaba sorprendentemente al tanto de las publicaciones científicas. Es casi inexplicable que pudiera conseguirlo perdido, como estaba, en los institutos de provincias, a los que hoy, como entonces, sigue sin llegar una sola publicación científica extranjera. La única respuesta que hemos encontrado se halla en el hecho de que matenía una activísima correspondencia científica con muchos autores extranjeros que le enviaban sus trabajos, y en que adquiría los libros más importantes de los temas que le interesaban. Una última característica que lo diferencia de sus contemporáneos españoles es que D. Ventura, como muy bien señala Rey Pastor, tenía la inmodestia y el coraje de comunicar sus investigaciones a sabios extranjeros o de publicarlas en revistas de otros países, "porque había vencido el complejo de inferioridad que acobardaba a casi todos los españoles, y porque además tenía cosas interesantes que decir en los variados sectores de su sabiduría". [5]

En todas las disciplinas científicas de las que se ocupó mostraba Reyes y Prósper, no sólo estar al corriente de las tendencias más modernas, sino que pretendía además incor-

movimientos intelectuales se aceptan en su versión francesa. Pensemos en el redescubrimiento de la obra de Hegel o de Nietzsche que está teniendo lugar en nuestro país de forma similar a como ha sucedido en Francia pero con varios años de retraso. Fenómeno afín es también la delirante moda estructuralista (nos referimos naturalmente al estructuralismo filosófico de los Foucault, Althusser, Derrida, etc. y de sus epígonos nacionales), o el rechazo e incluso la ignorancia de la gramática transformativa por parte de nuestros filólogos, que curiosamente empieza a mitigarse cuando en Francia comienza a ser aceptada.

[5] Véase el hermoso discurso de contestación de Julio Rey Pastor al Discurso de ingreso de Ricardo San Juan en la Real Academia de Ciencias, Madrid, 1956, especialmente las páginas 38 y 39 en las que dedica párrafos muy elocuentes a nuestro autor.

porarlas a los estudios desde la enseñanza media, como hacía constar en los programas que presentó a las oposiciones de Instituto y Universidad, tanto de matemáticas como de historia natural. Por ejemplo, en el programa de historia natural para oposiciones a Instituto incluía lecciones sobre la hipótesis en torno al origen del globo terrestre, exponía las teorías de Darwin, Wallace y Haeckel; no se limitaba a la mineralogía descriptiva, sino que analizaba las propiedades generales de los cristales, dedicaba especial atención a los organismos inferiores y unicelulares, etc. El programa de matemáticas para oposiciones a Instituto presentado el 27 de agosto de 1888 comenzaba diciendo:

"En el presente programa procuro introducir aquellas modificaciones que en el extranjero, en Francia, Italia, Inglaterra, Rusia y Alemania especialmente, son ya vulgares. No en balde los sabios trabajan en el acrecentamiento de la Ciencia. Es menester enseñar los nuevos descubrimientos. He procurado ser extremadamente conciso en las cuestiones sencillas, pues es probado que en poquísimo tiempo pueden aprenderse."

Y, en efecto, la primera lección trataba de las "nuevas ideas sobre el objeto de las matemáticas según los trabajos de Carmichael, Boole, Staudt, Gauss, Lobachefski, Riemann, Bolyai, Grassmann, etc.". Las primeras lecciones contenían abundantes referencias históricas con el fin de permitir al estudiante que situara las teorías en su contexto. Incorporaba también al programa la teoría de las sustituciones según Cauchy y Galois. Tres lecciones estaban dedicadas a la "Algoritmia de la Lógica según Boole, Robert Grassmann, Peirce y Schröder". La parte de geometría se ocupaba de las teorías de Lobachefski y Bolyai y se basaba en los trabajos de Staudt, Klein y Pasch, explicaba además la geometría euclidiana como una particularización de la no euclidiana.

Vemos, pues, que tanto sus posiciones científicas como los presupuestos pedagógicos de los que partía eran esencialmente correctos. Lo que Reyes proponía por tanto era introducir la ciencia moderna desde la enseñanza elemental, cosa que evidentemente debía sorprender a los que formaban parte de los tribunales de oposición que con seguridad desconocían las teorías científicas de las que Reyes hablaba. Desgraciadamente hay que reconocer que se ha avanzado muy poco desde entonces, los actuales programas de bachillerato siguen ignorando buena parte de las innovaciones que Reyes practicaba, quizá porque los responsables de la educación continúan siendo tan ignorantes como entonces. Podemos imaginarnos lo estrafalario e incomprensible que podía resultar un profesor de Instituto que en mil ochocientos noventa y tantos hablaba de la geometría no euclidiana o del álgebra de la lógica. Si desde el punto de vista didáctico su idea de introducir la ciencia moderna desde la enseñanza elemental nos parece excelente y constituye hoy todavía una urgente necesidad, lo que sí podemos reprocharle es que no se ocupara más en sus cursos de mostrar la conexión de las teorías matemáticas con los fenómenos que mediante ellas pueden describirse.

Como puede verse en la bibliografía que incluimos al final, la mayor parte de los trabajos de D. Ventura versan sobre matemáticas. Publicó artículos en las revistas de matemáticas más importantes de su tiempo. Ya en 1887 presentaba en *Matematische Annalen* una simplificación de una demostración dada por Klein y al año siguiente demostraba un nuevo teorema en una carta dirigida a Pasch y publicada también en *Matematischen Annalen*, a la que contestaba Pasch en la misma revista. Posteriormente este autor incluyó la demostración en sus *Lecciones de geometría moderna* citándola elogiosamente. [6] No vamos a entrar aquí en el análisis de sus trabajos matemáticos, para lo cual carecemos de la competencia necesaria. Nos parece sin embargo que, aunque limitadas, se trata de aportaciones reales a problemas concretos de la ciencia. Por ello resulta exagerado decir, como hace R. San Juan: "Profundas y elegantes han sido todas sus creaciones, y algunas trascendentales para el desarrollo de la ciencia. La demostración del teorema de los triángulos homológicos, sin la cual no hubiera podido Schur desarrollar su teoría de los elementos ideales, cerró definitivamente la fundamentación de la geometría proyectiva, iniciada por Klein y trabajosamente desarrollada por Pasch". [7]

[6] Pasch, M., *Lecciones de geometría moderna,* trad. de J. G. Álvarez Ude y J. Rey Pastor. Madrid, 1913, pág. 58.

[7] Vid. *San Juan,* op. cit., pág. 39.

Aunque Reyes no fuera un gran creador, es necesario tener en cuenta al enjuiciar su obra, como ya señala Rey Pastor,[8] todo el conjunto de circunstancias en las cuales se produjo. Evidentemente no era lo mismo, ni por supuesto sigue siéndolo, trabajar en Alemania o en los Estados Unidos que trabajar en España. Los escasísimos individuos de nuestro país que han logrado descollar en la ciencia, y de los cuales el ejemplo máximo y siempre citado es Ramón y Cajal, lo han conseguido gracias a titánicos esfuerzos que no todos pudieron realizar. Muchos de los que hubieran sido investigadores de un nivel internacional alto se malograron por falta de las condiciones mínimas necesarias para llevar a cabo una tarea sistemática; otros lo han logrado a costa de tener que exilarse por razones políticas o intelectuales. No basta, en efecto, con poder mantener, como hacía Reyes, una abundante correspondencia con colegas extranjeros, es necesario también no encontrar en torno de sí la más absoluta indiferencia, la falta total de otras personas con las cuales discutir, la carencia de información sobre lo que se hace en otros países y la ausencia de revistas en las cuales publicar. Si a ello añadimos el denodado esfuerzo que los burócratas realizan para dificultar, con todos los medios a su alcance, la investigación científica: y la oposición de los sectores más conservadores, casi siempre en el poder, hacia todo lo que sea ciencia, podemos comprender por qué nuestro país es, científicamente, uno de los más atrasados de Europa. A estas actitudes se une una rara capacidad para la recuperación póstuma de los intelectuales a los que en vida se ha mantenido en el más completo olvido, recuperación mucho más espectacular cuando la figura desaparecida ha pasado una temporada exiliada en algún país extranjero donde sus méritos han sido reconocidos. Evidente-

[8] "Mal juez será siempre el que interprete en abstracto los hechos del frío sumario escrito sin interesarse por el caso concreto del encausado con todo su entorno de circunstancias vitales; y así resulta en este caso: que quien sería friamente calificado como profesor corriente y *normal*, juzgado fuera de aquí, es en verdad *genial*, precisamente por ser *normal afuera* y por tanto excepcional aquí *dentro*; por ser distinto de todos sus colegas; y por parecerse a los hombres de otro mundo más que a los del propio". *Op. Cit.* en nota 5, p. 39.

mente una vez muertos sólo pueden proporcionar lustre a bajc precio. Entonces se da su nombre a una calle, se descubre una lápida en su pueblo natal o ilustres académicos le dedican sentidas palabras en discursos y periódicos. Recordemos el caso de Duperier. Reyes, que no tuvo que exiliarse, tampoco tuvo derecho a honores póstumos, tal vez en aquella época se practicaban menos. Se le echaron algunas migajas hacia el final de su vida: una medalla, ser nombrado miembro correspondiente de tres Academias, ser designado Director del Instituto de Toledo. Aunque sus trabajos eran citados en el extranjero y su biografía y bibliografía aparecen en el Diccionario de Poggendorff,[9] estos méritos no parece que fueran tenidos en cuenta cuando opositaba a cátedras de Universidad o cuando pretendía, en concursos de traslado, venir al Instituto Cardenal Cisneros o San Isidro.[10] Probablemente los jueces de los tribunales de oposiciones —la mayoría de cuyos nombres están justamente olvidados—, que no leían publicaciones extranjeras, no alcanzaban a valorar los méritos del modesto D. Ventura.

El largo ostracismo a que se lo tuvo condenado influyó sobre su actividad científica como podemos apreciar fácilmente ojeando sus publicaciones y viendo cómo con los años

[9] Poggendorff's J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschafften*, Vierter Bd., II Abtheilung M-Z. Leipzig. Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1904, página 1238, 1.ª col.

Algunos científicos extranjeros como Gino Loria, Schur, Burkhardt, Bonola, Pasch, etc. hacen referencia a sus trabajos o reproducen demostraciones suyas. Schröder le cita en el último tomo de sus *Vorlesungen*. También aparece citado en el libro de Max Simon, *Entwicklung der Elementar Geometrie in XIX Jahrhundert*, en el *Index operum ad geometriam absolutam expectantium* de Bonola, en la bibliogrfaía del *A Survey of Symbolic logic*, de C. I. Lewis, en la *Formale Logik* de Bochenski, etc., siendo en todos los casos uno de los poquísimos españoles citados o el único.

Además del Comité Ornitológico Internacional, era miembro de la Sociedad Físico-Matemática de la Universidad de Kazan, la tierra de Lobachefski, y de la Sociedad Astronómica de Francia.

[10] A lo largo de su vida firmó seis oposiciones y solicitó tomar parte en nueve concursos de traslado, la mayoría de las veces sin éxito. Hizo cinco intentos de ser catedrático de Instituto de Madrid, sin conseguirlo.

disminuye el número de ellas.[11] Su audacia para ponerse en contacto con investigadores extranjeros era equivalente a su falta de capacidad para el medro personal. Era un hombre tímido y pusilánime, débil físicamente, que estuvo enfermo con frecuencia durante su vida, y de un descuido y desaliño personales legendarios, lo cual en una ciudad tan provinciana como Toledo puede comprenderse que diera lugar a que se convirtiera en el hazmerreir de muchos, y que lo consideraran como un poco chiflado. Él siempre fue un individuo profundamente bondadoso y humano que procuraba comunicar sus conocimientos por todos los medios a su alcance y para ello, además de sus tareas docentes en el Instituto, enseñaba idiomas y taquigrafía, técnica que consideraba de gran utilidad, e iba al penal de Toledo a dar clase a los reclusos sobre diversas materias. Aunque durante toda su vida permaneció soltero, se casó poco antes de morir con una muchacha que su familia había tenido recogida con el fin de que pudiese cobrar su viudedad, lo cual dio origen a denuncias insidiosas como la de un profesor de religión que escribió al Ministerio pidiendo se le abriera expediente y que se le inhabilitara como Director del Instituto, porque según él, el matrimonio había sido civil, lo cual por otra parte era falso. Esto es un último botón de muestra de las dificultades con las que tuvo que enfrentarse a lo largo de su vida.

* * *

[11] Su nota sobre el matemático japonés del siglo XVII Seki, pone en evidencia la amplitud de su curiosidad. Señala en ella que en un discurso del Dr. Emil Lampe, editor del *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, se enteró de los progresos de las matemáticas en el Japón y de la favorable acogida que la geometría no euclidiana había tenido en ese país. "La curiosidad muy excitada, no paré hasta entablar relación con un miembro de la Imperial Universidad de Tokio, el Dr. Dairoku Kikuchi, que amable y cortés me ha remitido desde entonces una serie de periódicos notabilísima, con trabajos en inglés y alemán, acerca de puntos de investigación referentes a física y matemáticas". Al terminar prometía nuevos trabajos sobre el tema en caso de que su nota agradase. Es de suponer que no fue así porque no volvió a escribir nada sobre esto. Esta falta de eco de sus trabajos, le llevó a escribir cada vez menos.

Como puede verse en la bibliografía que hemos incluido, las publicaciones de Reyes no son ni muy numerosas ni extensas. Los artículos en los que se ocupa de la lógica son tan solo seis, más uno dedicado a la fundamentación de la aritmética. Estos siete trabajos son los que publicamos ahora, no tanto por su interés intrínseco cuanto por su valor para la casi inexistente historia de la lógica moderna en España. Incluso podemos decir que estos escritos de lógica no constituyen lo más valioso de la obra de Reyes y Prósper, sino que sus aportaciones más originales se refieren a las matemáticas y en concreto a la geometría no euclidiana. Es sorprendente, sin embargo, como ya decíamos más arriba, que un individuo, en las precarias condiciones en que se movía un investigador en la España de fines del siglo XIX haya podido estar tan al corriente del desarrollo de la lógica como lo estaba nuestro autor.

¿Cómo comenzó Reyes a ocuparse de la lógica? Podemos suponer que, interesado como estaba por los nuevos desarrollos de la matemática (seguía, en efecto, los trabajos de Klein, Kronecker, Weierstrass, Cantor, Poincaré, etc.) conoció en su viaje a Alemania el *Operationskreis des Logikkalkus* (1877) de Schröder. Como él mismo cuenta en su artículo sobre este autor (*vid. infra,* p. 344), el libro le produjo "grandísima impresión", y añade, "desde entonces he venido dedicándome asiduamente a esta ciencia [la lógica simbólica] para mí tan querida". Luego consiguió establecer una activa correspondencia con los más importantes lógicos de la época (a los que cita al comienzo de su "Proyecto de clasificación...", *vid. infra.* p. 333), los cuales le enviaron sus escritos.

Sus trabajos sobre lógica consisten en notas expositivas sobre las distintas tendencias y problemas del momento: la obra de los lógicos americanos (Peirce, Mitchell, Ladd-Franklin), los italianos (Peano y Nagy), Schröder, las máquinas lógicas. En ellos se ocupa, por ejemplo, del problema de la notación y de la introducción de nuevas operaciones, cuestiones importantes en aquel momento en que el edificio clásico de la Lógica estaba siendo completado por distintos autores y adquiriendo su independencia frente al matematicismo de

Boole. No vale la pena comentar aquí estos diversos artículos que presentamos, pues sería tarea larga dado la cantidad de puntos a los que en ellos se alude. Lo que sorprende al leerlos es que están escritos de tal manera que suponen que el lector conoce el tema y simplemente le proporcionan una información complementaria. En ninguno de ellos hay una exposición introductoria y detallada que permita al lector prescindir de la lectura de los textos a los que se alude. Y podemos imaginar que en aquel momento eran pocos los que tenían los conocimientos suficientes para poder apreciar la novedad y utilidad que presentaba la introducción de la exclusión por Ch. Ladd y los problemas que planteaba la demostración de la ley distributiva de la multiplicación lógica dada por Peirce.

El artículo en el que pretendía ser más original es su "Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos especialmente de los post-boolianos". Desgraciadamente aquí se ve todavía más claro lo que acabamos de decir. Resulta tan esquemático que el lector encuentra dificultades insalvables para comprender los criterios mediante los cuales se han constituido los grupos y que el autor no explica. Es de señalar que en este artículo cita a Frege y le coloca en el grupo "antibooliano", junto con Hamilton, basándose en "su infecundidad y lo extraño de sus notaciones". No supo ver, como todos sus contemporáneos, la genialidad del autor del *Begriffsschrift* cuyo simbolismo se sale, como dice Bochenski, "del marco de la práctica histórica de la humanidad, que ha fijado casi siempre sus pensamientos en escritura unidimensional". [12] Por ello, como es bien sabido, la obra de Frege no fue realmente conocida hasta que la redescubrió Russell.

Los trabajos sobre lógica de Reyes se interrumpieron sin que sepamos por qué. Había iniciado diversas tareas que no llegó a terminar. El "Proyecto..." constituía un trabajo preliminar por una historia de la lógica simbólica que intentaba escribir pero que no llevó a cabo. Lo mismo sucedió con la traducción de las *Vorlesungen* de Schröder (aparecidas en 1890 y 1891) y que anunciaba en 1892 en su artículo sobre el lógico

[12] *Historia de la lógica formal.* Trad. esp., Madrid, Ed. Gredos, 1966, p. 331.

alemán y que no publicó nunca ni parece que acabara. De hecho todos sus escritos sobre lógica aparecieron entre 1891 y 1893 y a partir de ese año no volvió a escribir nada sobre el tema.

Todos los artículos los publicó en el *Progreso Matemático,* la primera revista consagrada únicamente a la matemática, que apareció en España. Esta revista fue fundada en 1891 por don Zoel García de Galdeano, catedrático, en aquel momento, de geometría analítica en la Universidad de Zaragoza. Don Zoel era un hombre emprendedor y que tenía fama de ser más audaz y decidido que profundo. En sus trabajos abordaba diversos campos de la matemática y en su revista publicó recensiones de los más variados escritos matemáticos. Entre los libros recensionados están los *Principi di Logica* de Albino Nagy (*Progr. matem.*, II, 1892, pp. 337-340) y los *Vorlesungen* de Schroder (ibid. I, 1891, pp. 139-142 y 194-203). Tuvo el mérito de conseguir una revista en la que se publicaban trabajos de numerosos autores extranjeros (entre ellos apareció una nota de Peano: "Principios de lógica matemática", II, 1892, pp. 20-24 y 49-53) y que mantenía informados a los lectores de lo que sucedía al otro lado de los Pirineos en el campo de las matemáticas.

Su creación puede considerarse, por tanto, como un paso importante en la difusión de la cultura matemática en España, precediendo a la labor que años más tarde Rey Pastor (que estudió en Zaragoza) realizaría en la Universidad Central y a través de la Junta para Ampliación de Estudios.

Desde la aparición del *Progreso Matemático,* Reyes se contó entre los más asiduos colaboradores, y allí publicó buena parte de sus trabajos. Es de lamentar que sus conocimientos no se plasmaran en escritos más amplios y sistemáticos que hubieran supuesto un considerable adelanto para la difusión de la lógica en España, pues, como es bien sabido, hay que esperar hasta 1934 la aparición de la primera obra sobre lógica matemática escrita por un español. [13]

* * *

[13] Nos referimos a la *Introducció a la logística* de García Bacca publicada en catalán.

En la ordenación de los artículos he procurado agruparlos por temas. He colocado en primer lugar "El raciocinio a máquina", el primero de los que escribió, porque en él presenta un breve panorama de los lógicos contemporáneos. A continuación el "Proyecto de clasificación" que completa y desarrolla ese panorama. Después, los dos artículos sobre la Lógica Baltimoreana (como él decía) por la que sentía un especial interés, luego los artículos sobre Schröder y sobre Peano y Nagy y, por último, su trabajo sobre la aritmética en el que habla de la aritmetización del análisis y se cuenta entre los defensores del logicismo con respecto al problema de los fundamentos de a matemática.

El texto de los artículos se publica tal y como apareció en el *Progreso matemático.* Me he limitado a corregir algunas erratas y en algunos casos a completar una referencia; esas adiciones van entre corchetes.

BIBLIOGRAFÍA DE LAS PRINCIPALES OBRAS DE VENTURA REYES Y PRÓSPER

1. Catálogo de las aves de España, Portugal e Islas Baleares. *Anales de la Sociedad Española de Historia Natural,* tomo XV, Madrid 1886, págs. 5-109. Publicado también en tirada aparte con el siguiente pie: Madrid, imprenta de Fortanet, Calle de la Libertad n.º 29, 1886.
2. Sur la géométrie non-Euclidienne, *Mathematische Annalen,* 1887, tomo XXIX, págs. 154-156.
3. Sur les propiétés graphiques des figures centriques (Extrait, d'une lettre adressée à Mr. Pasch), *Mathematische Annalen,* 1888, tomo XXXII, págs. 157-158.
4. El raciocinio a máquina, *El Progreso Matemático,* I, 1891, n.º 9, págs. 217-220.
5. Christina Ladd-Franklin: Matemática americana y su influencia en la lógica simbólica, *Progr. Matem.* I, 1891, n.º 12, págs. 297-300.
6. Nota acerca de la geometría proyectiva sobre la superficie esférica, *Progr. Matem.* II, 1892, n.º 13, págs. 7-10.
7. Ernesto Schroeder. Sus merecimientos ante la lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras. *Progr. Matem.* II, 1892, n.º 14, págs. 33-36.
8. Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner, *Progr. Matem.* II, 1892, n.º 17, págs. 147-148.

9. Charles Santiago Peirce y Oscar Howard Mitchell, *Progr. Matem.* II, 1892, n.° 18, págs. 170-173.
10. Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos, especialmente de los post-boolianos, *Progr. Matem.* II, 1892, n.° 20, págs. 229-232.
11. Recensión de Dodgson [Lewis Carroll]. Curiosa mathematica. Parte I. A new theory of Parallels. London, 1890, tercera Ed. *Progr. Matem.* II, 1892, n.° 21, págs. 265-266.
12. Nuevo modo de considerar la aritmética, *Progr. Matem.* III, 1893, n.° 25, págs. 23-26.
13. La lógica simbólica en Italia, *Progr. Matem.* III, 1893, n.° 26, págs. 41-43.
14. Nicolás Ivanovich Lobachefski. Reseña biográfico-bibliográfica, *Progr. Matem.*, III, 1893, n.° 36, págs. 321-324.
15. Breve reseña histórica de la geometría no ecuclídea, especialmente de dos y tres dimensiones, *Progr. Matem.*, IV, 1894, n.° 37, págs. 13-16.
16. Wolfgang y Juan Bolyai. Resea bio-bibliográfica, *Progr. Matem.*, VI, 1894, n.° 38, págs. 37-40.
17. Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado euclídeo, 1.ª parte, *Progr. Matem.*, V, 1895, págs. 205-208.
17. Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual a la suma o diferencia de dos dados, *Archivos de Matemáticas* (Valencia), 1896, 2 páginas.
18. Un punto de geometría no euclídea, *Arch. Matem.*, 1897, 3 páginas.
19. Note sur le théorème de Pythagore et la géométrie non-Euclidienne, *Bull. de la Societé physico-mathematique de Kasan*, 1897, Deuxième série, T. VII, pág. 67.
20. La obra científica de Seki y sus discípulos, *Revista de la R. Academia de Ciencias E. F. y N. de Madrid*, T. I, 1904, págs. 251-254.
21. Nota con dos demostraciones nuevas de proposiciones trigonométricas, *Educational Times*, n.° I, 1910.
22. Juan Martínez Silíceo, *Rev. de la Soc. Mat. Española*, 1911, I, n.° 5, págs. 153-156.
23. Dos toledanos ilustres en la luna. *Boletín de la Sociedad Arqueológica de Toledo.*
24. Lista de los moluscos recogidos por el doctor Osorio en Fernando Poo y en el Golfo de Guinea, *Anales de la Sociedad Española de Historia Natural.*

EL RACIOCINIO A MÁQUINA *

La rica herencia de Aristóteles se halla hoy en poder de los que un tiempo llamó con desdén el pueblo latino bárbaros del septentrión. A los hombres de raza anglo-sajona se deben los nuevos y fecundos derroteros que en nuestro siglo ha tomado la Lógica deductiva é inductiva, que dejando bajo su impulso de ser un estudio soporífero, promete dar en breve al mundo la Pasigrafía Universal.

La Lógica simbólica, á pesar de los trabajos de Bernouilli, Lambert, Holland, Darjes, Ploucquet, Semler, Segner y otros, no puede decirse que ha nacido hasta los días de George Boole, el ilustre Profesor de la Universidad de Dublín. En su obra gigantesca le han auxiliado en Inglaterra: Augustus de Morgan, Stanley Jevons, Mac-Coll, Venn, Murfhy, Mac-Farlane, Kempe, Elizabeth Blacwood y otros. En Alemania se han distinguido, sobre todo en este estudio, Robert Grassmann, hermano del insigne geómetra Hermann Grassmann, Ernst Schröder, el sapientísimo Profesor de Karlsruhe, autor de una monumental obra que traduzco, con su benévola autorización al castellano, cuyos méritos ante la Ciencia son inmensos, y Andreas Voigt de Freiburg. En los Estados-Unidos del Norte de América se nos presenta la escuela americana de tan utilísimas é ingeniosas iniciativas, constituida por Charles Santiago Peirce, Maestro venerable á cuyo alrededor se agrupaban el difunto Howard Mitchell, la simpática figura de Christine Ladd Franklin, Gilman y Allan Marquand, habiéndose también distinguido George Bruce Halsted, el bibliógrafo de la Geometría No-Euclídea, Profesor de la Universidad del Estado de Texas.

En lenguas neolatinas sólo existen, á lo que creo, los trabajos del Sr. Delbœuf, los muy notables del Sr. Peano y los que en la actualidad publica un sabio Profesor, italiano tam-

* *Progr. Matem.*, I, 1891, n.º 9, pp. 217-220.

bién, el Sr. Nagy, á cuya exquisita amabilidad debo la lectura de sus muy interesantes publicaciones que promete continuar. Espero que los trabajos de Poretzki difundan entre las razas eslavas el gusto por estos estudios.

Mas no sólo la Ciencia ha hallado el modo de seguir mediante ecuaciones, subsumciones, exclusiones, etc. el raciocinio, llegando por medio del cálculo á sacar todas las posibles conclusiones de un sistema dado de premisas; aun ha hecho algo que siendo de secundaria importancia, aparece á primera vista como mucho más sorprendente.

Cuenta el Deán Swift en sus viajes de Gulliver á países remotos, que los sabios de Laputa poseían una máquina con la que el más inepto podía discurrir sobre todas las Ciencias, en lo que se cree aludía con su habitual malicia á las obras de Aristóteles ó del Canciller Bacon llamadas *Organum*, si ya no es que indicaba burlescamente las máquinas calculadoras de Pascal y Leibnitz.

Pues bien, el sueño de Swift ha sido una profecía, y la Lógica posee hoy una serie de aparatitos desde los sencillos cartones de Cuninghame hasta la ingeniosa y complicada máquina de Allan-Marquand, que permiten raciocinar á máquina tan correctamente como el más privilegiado cerebro lo hiciera. Es posible tocando un teclado hacer silogismos, por más extraño que esto parezca. Los trabajos hechos hasta la actualidad se limitan á problemas lógicos en que sólo entran á lo más seis ú ocho letras, mas posible es que algún día se encuentre el Jacquard lógico de que habla Peirce, y resolviendo el problema de que tratamos, admire al mundo con asombroso mecanismo en que rápidamente se resuelvan las más complicadas cuestiones de la Dialéctica.

Vamos á pasar una ligerísima revista á los mecanismos ideados, empezando por el más simple y sencillo de todos, que sólo como una curiosidad (no siendo propiamente máquina) puede citarse, los cartones silogísticos de Henry Cuninghame. La descripción detallada de ellos la encontrará el lector en la obra de Jevons que al final se cita. Como su nombre suficientemente indica, consisten en una colección de cartones que permiten obtener la conclusión de dos premisas dadas. Esto se consigue mediante superposición de unos cartones sobre otros, con lo que por una abertura rectangular del cartón que se coloca encima, aparece en el de abajo la conclusión deseada. Adaptando los cartones sobre un cilindro, se obtiene el cilindro lógico, que sólo es una modificación insignificante del anterior sistema.

La primera descripción de una verdadera máquina lógica es la del difunto profesor Stanley Jevons. Esta máquina recibe las premisas en forma de ecuaciones lógicas ó igualdades, y moliéndolas por decirlo así lo mismo que el trigo en el molino, produce, mediante su manejo, las conclusiones pedidas. Pero sólo se limita a cuatro letras y su generalización para un número mayor sería muy difícil.

De igual defecto adolece el ingenioso mecanismo descrito en 1880 por el profesor Venn del colegio Caius en Cambridge, pues que descansando sobre la presentación diagramática de las proposiciones ideada por él, la cual no puede extenderse á más de cuatro clases (que se representan por elipses), tampoco puede ir más allá.

La pequeña máquina ideada por el Sr. Allan Marquand para producir variaciones silogísticas, aunque ingeniosa, sólo sirve para el limitado objeto que entonces se propuso su autor.

Mas durante el invierno de 1881-82 había ideado el Sr. Marquand una lindísima máquina que fué construida con auxilio de los grandes talentos mecánicos del Profesor C. J. Rockivood. Lo notable de este mecanismo es que fácilmente podría extenderse á más de cuatro letras, lo que le da una gran superioridad sobre sus similares. Está fundada en las teorías de Howard Mitchell y Christine Ladd Franklin. Las premisas se escriben en foma de subsumciones en que el predicado es 0, lo que fácilmente se consigue con los métodos de Peirce y su escuela.

La máquina, construida de un poste de cedro, mide 32 cm. de alto, 21 de largo y 15 de ancho. Tal como está construida, sirve sólo para cuatro letras á las que en unión de sus negativas, designadas por las minúsculas respectivas, corresponden ocho teclitas, una para cada una.

Hay además otras dos teclas que llevan escrito encima la una la unidad y la otra el 0. La primera de éstas se denomina tecla regenerativa, pues sirve para poner el aparato en disposición de funcionar de modo que indique que ninguna premisa se halla aún establecida. La segunda se denomina tecla destructiva, pues sirve para ir expresando las diferentes premisas introducidas en forma de imposibilidades lógicas.

En el frente de la máquina hay diez y seis manecillas dispuestas en cuadro, que cuando el aparato no ha funcionado aún, deben estar horizontales y que van cayendo á la posición vertical a medida que se introducen premisas. A cada una de las manecillas corresponde una de las diez y seis agrupaciones lógicas que con las cuatro letras y sus negativas se pueden formar, y puede saberse con ahorro de letras á cuál corresponde, por un ingenioso artificio.

Supongamos ahora que se quiere hacer funcionar el aparato. Lo primero es poner todas las manecillas horizontales, para lo que se bajan las teclas 0 y 1. Para expresar luego las diferentes subsumciones, se van tocando las teclas correspondientes á las letras de cada agrupación de las que hay que destruir, y luego la tecla destructiva. La conclusión final puede ser expresada por la suma lógica de las agrupaciones representadas por las manecillas que al final de la operación han quedado horizontales.

Tal es el estado actual de las cosas con respecto á los mecanismos raciocinadores. Pueda pronto la Ciencia simplificar y generalizar los aparatos de que hoy dispone, lo que no podrá menos de dar atractivo á sus admirables progresos y vulgarizar sus inesperados resultados. ¡Ojalá este artículo despierte la curiosidad de nuestro público científico hácia una disciplina matemática tan hermosa como el Álgebra de la Lógica!

VENTURA REYES Y PRÓSPER

Madrid y Agosto 1891.

PROYECTO DE CLASIFICACIÓN DE LOS ESCRITOS LÓGICOS-SIMBÓLICOS

ESPECIALMENTE DE LOS POST-BOOLIANOS *

Mi afición á los estudios lógicos me ha hecho reunir cierto número de escritos referentes al Álgebra de la Lógica, habiendo además consultado algunos otros, pocos, que existen en nuestras bibliotecas. Yo me complazco en dar desde aquí las gracias á los señores Christine Ladd, Ernest Schröder, Charles Santiago Peirce, John Venn, Joseph Murphy, Bray Kempe, Andreas Voigt, Johnson, Hugh Mac-Coll, Albino Nagy y Peano, que me han auxiliado grandemente remitiéndome publicaciones suyas ó ilustrándome con sus consejos. Ha venido á mi mente la idea de preparar una historia de la lógica simbólica, y a éste fin clasificar primero los escritos lógico-simbólicos.

La sola clasificación seria que conozco es la del señor Venn, publicada en su *Symbolic Logic.* Á pesar del mérito de su autor, yo adopto una clasificación diferente, y que me parece ser más natural.

Voy, pues, ligeramente á indicarla.

Ante todo dividiré los secritos de lógica simbólica en grupos principales. Son éstos: el ante-booliano, el booliano, el peirceano, el de Delbœuf, el de la lógica de los relativos, el mitcheliano y el de la lógica aplicada. Varios autores tienen escritos que corresponden á grupos diferentes, y por otra parte á estos grupos no es posible asignarles límites fijos de tiempo.

I. Grupo ante-booliano

Está caracterizado por la anarquía grande de notaciones y poca fecundidad de éstas. Los resultados prácticos son insignificantes y nulas las aplicaciones á otras ciencias.

* *El Progreso Matemático*, II, 1892, n.º 20, pp. 229-232.

Pertenecen á este grupo los escritos de Leibniz, Bernoulli, Maimon, Plouquet, Holland, Darjes, Segner, Lambert, Dalgarno y otros. Aunque hechos en época moderna los unos y reciente los otros, deben corresponder, sin embargo, á este grupo, con el que tienen muchas afinidades, los trabajos de Hamilton y Frege, sobre todo si se tiene en cuenta su infecundidad y lo extraño de sus notaciones. No están con todo exentos de mérito ambos autores.

En el período ante-booliano se habían ya ideado representaciones esquemáticas ingeniosas (Euler, Bolzano, etc.); pero no existen aún las máquinas lógicas.

II. Grupo booliano

A éste corresponden escritos lógicos de muy diversas épocas, unos que datan de Boole mismo y otros recientes. Tales son las obras de George Boole, las de Stanley Jevons, John Venn, Bruce Halsted, Artur Cayley, W. Clifford, Alexander Mac-Farlane, Bray Kempe, Albino Nagy[1] y los primeros escritos de Peirce y Schröder, todos los cuales forman un grupo bastante natural, difiriendo sólo en algunas mejoras sucesivamente aportadas al sistema booliano. Es de advertir que los trabajos del señor Kempe comprenden una rama especial, muy notable por cierto.

III. Grupo Peirceano

Lo constituyen las publicaciones de Grassmann, de Hugh Mac-Coll, parte de las modernas de Peirce y de sus discípulos de la escuela de Baltimore (excepto Mitchell), las del sabio profesor de Karlsruhe señor Schröder, posteriores á su *Operationskreis des Logikkalkuls*, y los escritos de Giuseppe Peano.

IV

Los trabajos del señor Delbœuf y algunos del señor Murphy forman un grupo bien caracterizado y diferente de los anteriores.

[1] Aún no se ha publicado su anunciada última obra que publicará Loesche en Turin. [Se refiere a *Principi di logica esposti secondo le dottrine moderne*, Torino, Loescher, 1892.]

V. Grupo de los relativos

Dentro de este grupo se comprende la mayor parte de las memorias del inmortal De Morgan, las más hermosas de las de Pierce y algunas de Murphy, Mac-Farlane, Christine Ladd, J. Ellis, etc.

VI. Grupo de enlace entre la lógica de lo absoluto y la de los relativos

Es del período actual y fué iniciado por Oscar Howard Mitchell, habiendo sido seguido por su maestro Santiago Peirce, por Christine Ladd, por Andreas Voigt y por todos los lógicos modernos.

VII. Lógica aplicada

La Aritmética ha llegado á ser, merced á los trabajos de Grassmann, Peirce, Dedekind y Peano, una rama de la lógica. Los escritos de Mac-Coll comprenden además curiosas aplicaciones al estudio de las integrales.

Es de advertir que de algunos autores no conozco todas las obras (de los citados conozco alguna por lo menos de cada uno) y que los que no cito me son desconocidos por completo. Sólo son estos últimos Elizabeth Blacwood y Poretzki, que ha introducido en Rusia estos estudios.

Los escritos referentes á máquinas y diagramas lógicos podrían formar un nuevo grupo. Además el día en que la Historia de la Lógica simbólica haya tomado incremento deberá crearse otro para los trabajos históricos.

Ventura Reyes y Prósper

CRISTINA LADD FRANKLIN

MATEMÁTICA AMERICANA Y SU INFLUENCA EN LA LÓGICA SIMBÓLICA *

Cristina Ladd (ahora la esposa del señor Franklin, profesor de Matemáticas en la Johns Hopkins University, de Baltimore) que hoy accidentalmente se encuentra en Europa, es uno de los más distinguidos discípulos del célebre lógico Charles Santiago Peirce, lector que fué de la mencionada Universidad.

Desde hace algunos años viene esta señora ocupándose mucho y brillantemente de Geometría, Álgebra, Lógica, Fisiología é Instrucción. Vamos á reseñar muy ligeramente las meritísimas obras de tan distinguida autora.

En una hermosa memoria destinada á dilucidar ciertos puntos de vista del gran lógico y matemático inglés Augustus De Morgan, ya inicia sus preferencias por los estudios lógicos, tanto, que al indicar que el sentido de la palabra función, es en su escrito mucho más lato que el vulgarmente adoptado, introduce como ejemplo los relativos. Tan bello trabajo fué incluído en el *American Journal of pure and applied Mathematics*, vol. III, págs. 209 á 226, y se encuentran análisis de él, en varios periódicos y revistas matemáticas, como por ejemplo en el *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, que Darboux publica en París. Las originales notaciones que Cristina propone en su memoria, han sido adoptadas después en la que Peirce publicó posteriormente con el título de *Algebra of Relatives*.

Durante el año 1883, editó Santiago Peirce la obra de sus alumnos y la suya propia en un pequeño pero hermoso libro

* *Progr. Matem.* I, 1891, n.º 12, pp. 297-300.

1 Esto es, prescindiendo de los números, y entendiendo la adición lógica al modo de Stanley Jevona y Peirce, lo que es hoy general, con la sola excepción de un distinguido sabio inglés, el señor John Venn.

titulado *Studies in Logic by members of the Johns Hopkins University*, y desde entonces ha venido dedicándose Cristina Ladd, sin interrupción á lo que parece, al *calculus ratiocinator*. Uno de los artículos comprendido en dicho librito, con el nombre de *On the Algebra of Logic* es debido á ella. Las obras de George Boole estaban agotadas en el comercio y habían quedado un tanto antiguas, haciendo falta al lector no impuesto en la materia una brevísima exposición de teorías boolianas modificadas, [1] á ejemplo de lo que en Alemania había hecho el esclarecido profesor Schroeder, sabio de quien detenidamente pensamos también ocuparnos; màs no es sólo una exposición de hechos ya conocidos la obra de la Sra. Ladd, también en ella introduce interesantísimas novedades debidas á su inventiva. Boole había tratado la Lógica, abordando sus problemas mediante ecuaciones, lo que aparte de ser compleja la cópula "igual", presentaba otros varios inconvenientes, cosa que hubo de decidir á Santiago Peirce á valerse de implicaciones ó sea subsumciones. Pues bien, Cristina Ladd trata los problemas mediante "exclusiones", adoptando una cópula diferente de las ya usadas, entre las que De Morgan había indicado, lo que tiene en determinados casos sus ventajas sobre los otros métodos usados.

Y á propósito de esto, he de decir que cualquier tratamiento matemático de un problema lógico dado, no hará más que repetir en un lenguaje simbólico diferente de los otros, hechos que para un mismo problema son siempre los mismos. Al variar de método se cambia el idioma simbólico, se traduce simplemente á él, lo ya escrito de otro modo, mas á semejanza de un libro políglota, el contenido es siempre el mismo. La Lógica de Boole, la de Ladd, Mitchell, Peirce ó Schroeder es por completo la misma, sólo cambian los signos empleados y la gramática de los signos. Y es, que el origen de estas leyes es el indicado por Benjamín Peirce, en una de sus obras, con las palabras *divine source of all-geometry*, inmutable, inflexible, eterno.

A la cópula de exclusión, corresponde también su cópula negativa, y es interesante en alto grado ver cómo mediante las dos combinadas, se tratan con pasmosa facilidad los antiguos silogismos, considerados como casos particulares de más amplios problemas.

No se ocupa Cristina Ladd en su obrita ya citada de ciertas cuestiones más delicadas y enojosas, debatidas hoy, considerando al contrario como evidentes por sí, según se trasluce por el contexto, las bases en que apoya su desarrollo. Así, por ejemplo, no examina la parte fundamental de las leyes distintivas de la multiplicación lógica, asunto que después ha dado margen á discusión sostenida entre Santiago Peirce y Schroeder. Verdad es, que cuando se publicó el libro, tratábase más bien de encontrar métodos que reemplazasen á los poco prácticos de Boole, que no de dilucidar ciertos puntos críticos de la Lógica formal.

Es también interesante la parte del trabajo que examinamos, referente al universo del discurso. Una errata deslizada ha hecho que Schroeder no fijase su atención sobre importantes resultados allí obtenidos, como puede verse en una nota publicada en los *Mathematische Annalen.*

Problemas de los enunciados en la parte matemática del periódico inglés *The Educational Times,* son varios los propuestos ó resueltos por nuestra autora, y no hemos de fijarnos detenidamente en ellos.

Las últimas publicaciones lógicas que conozco de Cristina Ladd, han visto la luz pública en el *American Journal of Psychology* y en *Mind* revista inglesa de Psicología.

En el primero intitulado "On some characteristics of symbolic Logic" (*Am J. of Psychology,* 1880) y que debo á su bondad el haber leído, lo mismo que el segundo, indica ideas generales acerca de las cópulas, y recaba para su malogrado colega Oscar Howard Mitchell[2] una gloria que difícilmente puede ser apreciada en justicia, por los lógicos que no sean matemáticos al mismo tiempo.

El trabajo contenido en *Mind* (vol. XV, núm. 57) ["Some proposed reforms in common logic" 1890, pp. 75-85] es harto notable. En él propone su autora nuevas notaciones ingeniosamente ideadas, comprendiendo todas las cópulas De Morgan. Si algún día se realizasen las notaciones de esta memoria y los

[1] A quien son aplicables las palabras de Newton referentes al profesor Cotes: "Si él hubiese vivido, sabríamos cosas nuevas".

métodos que Santiago Peirce propone en su escrito *On the Algebra of Logic, a contribution to the Philosophy of notation,* podría desaparecer entonces toda analogía entre los símbolos lógicos y los que se usan en las otras disciplinas matemáticas. En efecto, los signos + y × sería posible sustituirlos por los que la señora Ladd usa como signos de las cópulas *complement* y *partient*.

Sé que quizás con el tiempo publiquen los esposos Franklin un tratado de Lógica, que abarque á la vez la deductiva y la inductiva, y sólo desearé que esto se verifique pronto, pues del claro talento de sus autores, mucho y bueno podríamos prometernos.

Trabajos de Cristina Ladd sobre asuntos de índole diferente son sus investigaciones sobre el exágrama místico, su *A method for the experimental determination of the horopter* y su *The education of woman in the Southern states,* que forma parte de una obra editada por Annie Nathan Meyer.

Ahora únicamente me resta, terminando, dirigir mis saludos á la dama y pedir mis escusas á la investigadora científica, por los errores en que al ocuparme de élla haya podido incurrir.

VENTURA REYES Y PRÓSPER

CHARLES SANTIAGO[1] PEIRCE
Y
OSCAR HOWARD MITCHELL *

Voy á presentar una ligera reseña de los trabajos lógico-matemáticos de tan distinguidos sabios norte-americanos, ocupándome á la vez de ambos, porque han ejercido el uno sobre el otro una acción recíproca. El gran lógico Santiago Peirce ha sido el maestro de Mitchell y á su vez los trabajos de éste han tenido influencia sobre los últimos de su insigne profesor.

Charles Santiago Peirce es el hijo de uno de los más distinguidos matemáticos americanos, el profesor Benjamin Peirce, de la Universidad de Harvard.

Padre é hijo han enriquecido á la ciencia con numerosas notas y trabajos insertos en diferentes publicaciones científicas y con especialidad en las memorias y actas de las sociedades y academias de América, habiendo contribuído ambos á la tarea de crear y dar caracter á la ciencia americana, librándola de ser tributaria de la europea.

Prescindiendo de los trabajos del padre, de los cuales uno solo, á lo que yo sepa, puede tener relación con la Lógica de los relativos (me refiero á su admirable libro *Linear associative algebras*), voy á indicar ligeramente los méritos del hijo ante la Lógica, objeto preferente de sus estudios, aunque ciertamente no le son estrañas otras muchas ciencias.

Santiago Peirce ha sacado á lo que supongo su instrucción lógica principalmente de los escritos del egregio matemático y lógico Augustus De Morgan, por quien profesa tal admiración que declara en uno de sus escritos parecerle ser (como lo es en efecto) uno de los mayores lógicos que hayan nunca existido. Peirce es el heredero científico de De Morgan, y su

[1] Aunque parezca estraño, el primer nombre está en inglés y el segundo en español, ignoro porqué. [El segundo nombre es Sanders.]

* *Progr. Matem.*, II, 1892, n.º 18, pp. 170-173.

mayor título de gloria son sin duda sus trabajos sobre la Lógica de los relativos, de la que el lógico inglés fué padre.

Limítase Peirce en sus más antiguos trabajos titulados:

"On an improvement in Booles calculus of logic."

"On the natural classification of arguments."

"On a new list of categories."

á introducir algunas notables modificaciones en la Lógica ecuacional ó cálculo Booliano, modificaciones de las cuales alguna había sido indicada por Stanley Jevons, y á ilustrar la lógica aristotélica.

Donde verdaderamente aparece su eminente personalidad científica es, á mi modo de ver, en su hermosa memoria "Description of a notation for The logic of relatives" llena de interesantísima doctrina lógica y de la que me parece que quizás no se han ocupado los sabios tanto como merece. En esta memoria, publicada en las de la Academia Nacional de Ciencias de Washington en el año 1870, se introduce la cópula implicativa que después había de ser ya casi exclusivamente adoptada por nuestro autor con preferencia á la cópula *igual* que es de más compleja naturaleza.

Como el título indica, el autor se ocupa principalmente de la Lógica de los relativos, tratando muy poco de la Lógica de lo absoluto. Difícil es dar una idea del rico contenido de este trabajo y de los originales y profundos conceptos en él expuestos. Peirce sabe hallar curiosísimas conexiones entre cosas que á primera vista parecen no existir.

La publicación más capital de Peirce es su memoria *On the Algebra of Logic* inserta en el *American Journal of Mathematics* vol. III, 1880. En ella cifra en símbolos toda la antigua Lógica, y establece después el cálculo de Boole, valiéndose con grandísima sagacidad de las fórmulas implicativas, en vez de seguir la marcha inversa, esto es, fundar mediante postulados el cálculo, y de él deducir como casos particulares los silogismos.

El eminente lógico alemán Schröder opina que los procedimientos de Peirce se asemejan quizás al de escribir una gramática en el idioma mismo que se pretende enseñar, pues la base de su edificio científico es precisamente el cálculo de proposiciones.

El trabajo de Peirce ocasionó una correspondencia científica con Schröder á propósito de la segunda ley distributiva de la multiplicación lógica, según queda ya relatado al ocuparme de este último lógico (*Progreso Matemático* núm. 14).

Está unánimamente reconocido por todos que la memoria de que nos ocupamos ha tenido el privilegio de marcar un nuevo camino dentro de la Lógica simbólica y que forma época en la historia de esta ciencia

Entre tanto, Peirce, lector de Lógica en la Universidad de Johns Hopkins, de Baltimore (por muchos títulos ilustre) había reunido á su alrededor algunos notables discípulos, Gilman, Allan Marquand, Christine Ladd y Oscar Howard Mitchell, publicándose en el año 1883, en Boston por Litle, Brown and C.º, el hermoso librito *Studies in Logic* by members of the Johns Hopkins University, en el que se colecciona la obra común de maestro y discípulos. Peirce contribuyó á este libro con las siguientes notas.

A theory of probable inference (hermosa exposición de la lógica inductiva).

On a limited Universe of marks.

The logic of relatives (donde en parte se expone lo ya dicho en su otra memoria de igual título, y además se comentan los descubrimientos de Mitchell).

Mitchell por su parte contribuyó con su memoria: *On a new Algebra of logic,* que en extracto había sido ya publicada en las *Johns Hopkins University Circulars.* Las ideas de Mitchell, que al crear la teoría de las múltiples dimensiones en Lógica, llegaba á lo que hasta él había sido un imposible, esto es, á enlazar en un cuerpo común de doctrina la lógica de lo absoluto y la de lo relativo, fueron adoptadas inmediatamente con su maestro. Lástima grande que un sabio como Mitchell, de quien tanto podía esperarse, falleciese á los 38 años de edad en Marietta (Ohío) de donde era profesor de matemáticas. Yo no sé si desde 1883 volvió á publicar nada referente á Lógica; sólo conozco algunos trabajos referentes á la teoría de los números.

En el *American Journal of Mathematics* vol. 7, año 1885, publicó, en fin, Peirce, bajo el título de "On the Algebra of Logic, a contribution to the Philosophy of notation" un resumen completo de sus doctrinas, empleando el descubrimiento de Mitchell bajo una notación diferente de la usada por el inventor. En dicho resumen se señalan más y más las diferencias existentes entre la exposición de las cuestiones lógicas, adoptada por los lógicos de Baltimore de la adoptada por los sabios alemanes. Los primeros reducen todo con preferencia al cálculo de las proposiciones, los segundos al cálculo de las cases, considerado desde un punto de vista diferente del adoptado por los americanos.

Posterior á lo citado, no conozco nada escrito sobre Lógica, excepto una pequeña nota incluída en el núm. I del *American Journal of Psychology* y titulada *On the logical machines.* Otros opúsculos hay anteriores á 1884 del Sr. Peirce, pero yo creo que los más importantes son los que llevo indicados.

Reciba el Sr. Peirce, con las escusas por los errores en que haya incurrido, un testimonio de admiración sincera que desde el otro lado de los mares le envía un extranjero.

Dios quiera que pronto amanezca *el hermoso día en que alguien ilumine con un rayo de luz las múltiples cuestiones de la lógica de los relativos.*

VENTURA REYES Y PRÓSPER

Madrid 3 de Junio 1892.

ERNESTO SCHROEDER

Sus merecimientos ante la Lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras. *

En tanto que una ciencia cualquiera no traspasa los límites de las revistas destinadas á las investigaciones de los sabios, no puede decirse que ha logrado carta de naturaleza: en efecto, la gran masa del público científico no cobra afición por aquéllo que ha de rebuscar con el fin de aprender en actas de Academias, Memorias de sociedades, reseñas de sesiones, etc., cosa que exige pérdida grande de tiempo y dinero ú oportunidad de buenas Bibliotecas públicas.

Además, en estas publicaciones se suele remitir muy frecuentemente á otras de análoga índole y que para mejor inteligencia del texto se hace preciso consultar, suponiendo generalmente por de contado, que el lector ya conoce algo la materia. Tales sacrificios sólo puede imponérselos el hombre apasionado por el estudio y á él decididamente consagrado.

La difusión de las diferentes disciplinas científicas, exige libros de conjunto en donde el autor, reuniendo los pequeños trabajos diseminados de sus predecesores, sean ilustres ú obscuros, de todos los que han aportado materiales al edificio y agregando su obra propia, construya el monumento.

El haber hecho esto con respecto á la Lógica simbólica es, aparte del mérito que le dan sus propios descubrimientos, una de las glorias del Sr. D. Ernesto Schroeder, profesor de la Escuela técnica de Karlsruhe y uno de los más simpáticos investigadores lógicos del día.

La primera publicación que leí del Sr. Schroeder fué su *Operationskreis des Logikkalküls.* Sin ser esta obra tan profunda ni detallada como la última del mismo autor, produjo en mi una grandísima impresión. Desde entonces he venido

* *Progr. Matem.*, II, 1892, n.° 14, pp. 33-36.

dedicándome asíduamente á esta ciencia para mí tan querida. El autor copia al principio algo de la escasa literatura entonces existente. Prescinde en ella de los números Boolianos (que aparte de la teoría de las probabilidades pueden en la Lógica ser suprimidos), y adopta la adición lógica en el sentido hoy ya corriente. Los métodos que para resolver los problemas lógicos propone son elegantes y sencillos á la par. Tiene cuidado de escribir á dos columnas mostrando la dualidad lógica que tiene cierta semejanza con la geométrica, aunque no en el fondo.

Posteriormente llegaron á sus manos los meritísimos trabajos de Peirce, y entonces tuvo Schroeder la ocasión de hacer, é hizo en efecto, un hermoso descubrimiento. Muchos se fijaron sin duda, aunque sin comprender la trascendencia, en que la demostración de una de las partes de la ley distributiva de la multiplicación lógica que Peirce decía no explanar por ser pesada *(too tedious to give)* no podía en modo alguno obtenerse siguiendo el camino indicado por el eminente lógico americano. En general debieron cansarse del poco éxito de sus tentativas de reconstrucción de tal prueba. Lo que aquí estaba oculto, lo vió la perspicacia de Schroeder. Con las leyes que en el escrito de Peirce precedían á la conclusión de que tratamos, era imposible absolutamente el deducirse ésta. Para hallarla hay que introducir la idea de *indivíduo,* esto es, si se parte de tal base puede legitimarse la segunda parte de la ley distributiva de la multiplicación. Esto es lo que Peirce denominó una demostración dilemática. Y la prueba mejor de que para evidenciar completamente la ley distributiva hacen falta otros principios que los antepuestos por Peirce, es que existen *relaciones* en que no se cumple una de las partes de la ley distributiva, á pesar de que tales *relaciones* satisfacen á todas las otras fórmulas de la cópula implicativa. Peirce lo reconoce así en su último trabajo (que yo conozca) inserto en el *American Journal of Mathematics,* "On the Algebra of Logic, a contribution to the Philosophy of notation". En éste dá una demostración rigurosa de la ley distributiva, pero referente sólo al cálculo de las proposiciones de donde por la consideración del *indivíduo* se aplica á las clases.[1] Pero queda en pié la

[1] En el antiguo sentido.

afirmación de Schroeder y como una de sus más bellas aplicaciones se presenta el cálculo lógico con los grupos.

A la verdad, Peirce ya había demostrado por completo la ley distributiva en uno de sus antiguos trabajos publicados en los *proceedings* de la Academia Americana de Ciencias y Artes, pero introduciendo la idea de indivíduo; su demostración no puede ni podrá nuca obtenerse de otro modo.

Nos hallamos aquí en presencia de un caso parecido (parecido sólo) al de los postulados de Euclides y Arquímedes en la Geometría. Así, pues, hoy se ha creado una Geometría no Euclidea por Gauss, Lobachefski y Bolyai, en que para nada se tiene en cuenta el axioma Euclideo (yo sigo la opinión de los que creen que quizás sea falso); Du Bois Reymond, Stolz y Thome han estudiado el concepto de *contínuo* en unión de Veronese y Betazzi, y hoy se sabe que existen entes análogos á las cantidades y que no satisfacen al postulado de Arquímedes.

La cópula implicativa de los silogismos se nos presenta como un caso particular de relaciones más generales á las que no se aplica más que una parte de las leyes relativas á la suma y multiplicación propias de la primera. Creo que, aunque no explane más el asunto, se comprenderá perfectamente la inmensa trascendencia del descubrimiento de Schroeder. Las partes de la ciencia que menos postulados exigen, son frecuentemente, sin embargo, pobres, pues á medida que las hipótesis se van introduciendo, el rigor y la generalidad perdidos se transforman en numerosas proposiciones nuevas, á la manera como las fuerzas de la naturaleza se cambian entre sí. ¡Nuestra pobre ciencia humana ha de ser limitada si ha de ser sólida!

Schroeder publicó su descubrimiento en una concisa nota titulada "On the most commodions and comprehensive calculus: Exposition of a Logical principle, as disclosed by the Algebra of Logic, but overlooked by the Ancient Logicians", inserta en el *Report of the British Association* de 1884. Después ha detallado completamente sus ideas sobre el asunto en sus admirables *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, en el primer tomo y en la parte primera del segundo. [2] Hay

[2] Con especialidad las lecciones 6 y 7 del primer tomo, algunas

pues una diferencia esencial de tratamiento de la lógica entre Mac Coll y Peirce de un lado y Schroeder de otro. Los primeros basan el cálculo de identidades sobre el cálculo de proposiciones. El método de Schroeder es más general.

Muchas reseñas hay de las obras de Schroeder y todas las hechas por matemáticos no pueden serle más favorables. Yo creo que la Lógica simbólica sólo encontrará alguna oposición de parte de filósofos más ambiguos de charla que de estudio, ó de personas que acostumbradas á ser los solos sabios, nunca miran con buenos ojos aquéllo que ignoran.

Un espíritu de justicia diferente anima al Sr. Schroeder, cuidadoso de dar siempre á cada cual lo suyo. Ultimamente publicaba en los *Matematische Annalen* una nota satisfactoria para la Sra. Ladd y recientemente me escribe para indicarme los derechos de esta señora en otro punto distinto. Este se refiere al número de proposiciones que pueden formarse con rspecto á *—n clases*. Christine Ladd cuenta el número de las que pueden formarse absurdas ó falsas, y Peano y Schroeder el número de las que puedne formarse que sean verdaderas. De ahí la diferencia de resultados obtenidos.

He aquí ahora una lista de los escritos matemáticos que conozco de Schroeder:

1. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.*
2. *Der Operationskreis des Logikkalkuls.*
3. Note über den Operationskreis des Logikkalkuls. (*Math. ann.* 1877).
4. Crítica de la memoria de Gottlob Frege, titulada: *Begriffsschrift* (Gaceta de matemáticas de Schloemilch).
5. Exposition of a logical principle (ya citada antes).
6. Über das Eliminationsproblem im identischen Kalkul.
7. Tafeln der eindeutig umkehrbaren Funktionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. *Math. ann.* 1887.
8. Über Algorithmen und Kalkuln (Archivos de Matemácas Grunert Hoppe. 1887).

del segundo y en los apéndices interesantísimos p. e. el del cálculo lógico de los grupos.

9. Über die Anzahl der Urteile etc. (62.ª Reunión de médicos y naturalistas [3] alemanes en Heilderberg.

10. *Vorlesungen über die Algebra der Logik. (Exakte Logik)* I Band 1890.

11. Über das Zeichen 1890. (Discurso).

12. *Vorlesungen über die Algebra der Logik. II Band.* Erste Abtheilung, 1891.

Después de esta lista poco habré de añadir yo.

La Lógica simbólica se impone cada día más y con su difusión crecerá la fama del Sr. Schroeder. No en vano termina su discurso *Uber das Zeichen* con las palabras del Lábaro imperial que Constantino, vencedor de Magencio, vió escritas en el cielo: *In hoc signo vinces!*

En otro escrito daría las gracias al Sr. Schroeder por sus bondades continuadas para conmigo, en este no lo hago por no mezclar las ideas de justicia con las de gratitud.

VENTURA REYES Y PRÓSPER

[3] *Naturforscher,* investigadores de la naturaleza, en sentido general.

LA LÓGICA SIMBÓLICA EN ITALIA *

Dos tendencias bien manifiestas se observan en nuestra hermana nación Italia, á propósito de tan bella como importante ciencia.

Dos son también los matemáticos que sostienen estas diferentes direcciones. De una parte el Sr. Peano ilustre profesor en la Universidad de Turín, acepta sin pararse en discutirlos los principios fundamentales del *calculus ratiocinator*, poco más o menos tal como Peirce ó Mac-Coll los exponen, apresurándose en seguida á aplicarlos al tecnicismo matemático, dando los medios de crear un lenguaje universal, expédito y racional, para uso de los matemáticos. No se para mucho en el exámen del instrumento que emplea, sabe que es seguro y eficaz, y sólo se ocupa en utilizarlo. Dos áureos libritos han sido, especialmente, el fruto de sus profundos estudios: *Arithmetices principia, nova methodo exposita* se titula el uno: *Principi di geometria logicamente esposti*, lleva el otro por encabezamiento. Ambos han sido publicados en Turín, 1889. Con auxilio tan poderoso como la Lógica exacta, desmenuza pacientemente las hipótesis y operaciones, llevando una luz vivísima á los fundamentos de la aritmética y de la geometría. Continúa sus sabias investigaciones con el mayor fruto en su preciosa *Rivista di Matematica* dedicada en especial al esclarecimiento de los principios de las Ciencias exactas.

Pero, por grande que sea el mérito de las publicaciones del señor Peano, tienen un inconveniente que no las hace adaptar para la completa difusión de la Lógica Baltimoreana. Se dirigen á un público acostumbrado de antemano al raciocinio tranquilo y desapasionado, público entusiasta del lema de Gauss, *pauca sed matura*. Queremos indicar que se dirigen á los matemáticos. Pero existe otro público habituado á la pasión y al apresuramiento. Este es el de los que hoy se llaman

* *Progr. Matem.*, III, 1893, n.° 26, pp. 41-43.

filósofos. Tales gentes necesitan que se les conquiste poco á poco para las nuevas docrtinas por las cuales hoy no pueden sentir ningún amor. Parte de ellos se dedica á la Psicología experimental, parte á la Metafísica más abstracta y laberíntica. Es, pues, lo más probable que poquísimos de ellos estén contentos de sujetarse al férreo yugo de una ciencia tan encadenada y rigurosa como la de las matemáticas, donde queda poco espacio para las suposiciones, divergencias y espíritu de partido. Creo que el reconciliar á este público con la Lógica simbólica, será obra principalmente de mi sabio amigo el Dr. Nagy profesor en el Liceo Mancinelli de Velletri (Roma), y ventajosamente conocido en la ciencia. Aunque de procedencia húngara, como indica su apellido, es, sin embargo, un italiano bien amante de su nación. Me parece que es el primer matemático de Italia que se haya ocupado de Lógica exacta, ya que desde muy temprano se empezó á apasionar por ella con ocasión de estudiar en el gimnasio de Zara, continuando luego su carrera en la Universidad de Viena, donde escogió como tema de su tesis doctoral el siguiente: *Ueber Anwendungen der Mathematik auf die Logik.*

Los principales resultados consignados en esta hermosa é interesantísima memoria en que se ponen de manifiesto los grandes conocimientos matemáticos y filosóficos de su autor, no menos que su profunda erudición, han sido después consignados también en sus "Fondamenti del calcolo logico", publicados en el *Giornale di Matematiche* del Sr. Battaglini. Curiosas son en extremo también dos notas suyas, publicadas en las actas de la Academia dei Lincei y referentes á las representaciones gráficas en la Lógica, asunto que había sido poco estudiado aún. El Sr. Nagy no posee solamente las matemáticas y la Lógica, conoce perfectamente además la Historia de la Filosofía y esperamos como un acontecimiento la publicación de sus trabajos acerca de la Filosofía entre los orientales. Varios artículos lleva también publicados en la *Rivista di Filosofia Italiana,* uno de ellos referente á la Geometría Euclídea. Pero especialmente es de notar su última obra que la casa editorial Loescher ha publicado en Turín. Me refiero á sus *Principi di Logica esposti secondo le dotrrine moderne,* de que ya se ha ocupado en este periódico mi ilustrado y querido amigo el Sr. Galdeano. Sólo diré que el autor procurará hacerse perdonar de los filósofos de su país el haber introducido en su libro la Lógica matemática, dando en cambio cierta extensión á la historia de la Lógica entre los griegos y latinos, y haciendo alarde de sus envidiables conocimientos y aptitudes.

Deseamos, para terminar, que al lado de los Sres. Nagy y Peano se coloque resueltamente la opinión ilustrada de su país, y que la obra de los sabios ingleses y alemanes, la Lógica Batimoreana, arraigue en la patria de los césares y de los mártires.

VENTURA REYES Y PRÓSPER

NUEVO MODO DE CONSIDERAR LA ARITMÉTICA *

Las matemáticas llamadas por los antgiuos puras, tienden hoy día a dividirse en dos grupos, uno de los cuales se agrega a las Ciencias de observación. Si consideramos por ejemplo la Geometría, vemos que está basada en multitud de hipótesis que la observación únicamente puede comprobar, no siendo capaz de ello el raciocinio El número de estas hipótesis se reconoce hoy que es mucho mayor de lo que primeramente se creía. Afirmando o negando determinados axiomas se obtienen sistemas diferentes de geometría. Muchas de tales hipótesis se hallan expuestas en los escritos del célebre físico Helmholtz (*Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu grunde liegen,* Göttinger Nachr, 1868, y *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome,* Braunschweig, 1870), así como en los de Bernard Riemann *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen,* Göttinger Abh. 1867). Ahora bien, del mismo modo que Gauss, Bolyai y Lobachefsky han construido sistemas geométricos negando el postulado Euclides de las paralelas; así, más recientemente se crean disciplinas en que se niegan otros. Es muy curioso por los datos que a este respecto contiene un artículo del eminente matemático francés Mr. Poincaré, referente a la geometría No-Euclidea. La ciencia del espacio, pues, del mismo modo que la del movimiento, depende muy esencialmente de la observación y del experimento, ya que el raciocinio no puede decidir en cuanto a la verdad o falsedad de sus hipótesis fundamentales. Suponiendo que las consideradas hoy como ciertas fuesen todas falsas, podríamos, sin embargo, formar un cuerpo de doctrina libre de contradicción.

Más, según muy bien dice el señor Poincaré, si deseamos un sistema de verdades aritméticas, en oposición del que hoy existe y exento de contradicciones, vemos que es imposible.

* *Progr. Matem.*, III, 1893, n.º 25, pp. 23-26.

La Aritmética es tan invariable como las leyes del juicio, es en una palabra, una rama de la Lógica pura. Siguiendo varios sabios modernamente este criterio, se ha conseguido que a muchas demostraciones empíricas expuestas antes en los autores, [1] han sucedido otras llenas de rigor. El concepto fundamental de número entero ha sido perfectamente esclarecido. La marcha indicada, que felizmente inició H. Grassmann (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlín 1861), fue seguida luego por el insigne Santiago Peirce, que además consideró la Aritmética como una rama de la lógica de los relativos. Dedekind y Cantor, dos egregios matemáticos alemanes, han dado definición exacta y rigurosa de lo que debe entenderse por número finito o infinito de elementos de un sistema, indicando curiosísimas propiedades de la enumeración, antes ignorada o demostradas insuficientemente.

Mientras que así se establecen con solidez las bases fundamentales de la Aritmética de los enteros, también adelanta el estudio racional de los números fraccionarios y de los inconmensurables. Tannery y Meray en Francia (Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, 1886. Meray, *Théorie élémentaire des fractions degagée de touté consideration impliquant*, etc. París, 1889). Stolz en Austria (*Vorlesunger über Aritmetik*, 1885, Leipzig) y Peano en Italia (*Sul concetto di numero II*), definen perfectamente a los quebrados, con independencia de toda interpretación concreta.

Lo propio han hecho respecto a los números incomensurables Tannery en su obra ya citada, Dedekind en su folleto célebre: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, y el ilustre profesor berlinés Weierstrass en sus lecciones.

El Análisis necesita sólo para sus magníficas y abstractas creaciones del concepto de número entero positivo, y con esta noción hay bastante para reconstituirlo todo entero. Así lo muestra también entre otros Leopoldo Kronecker, recientemente fallecido, en un hermoso artículo publicado en el *Journal für Mathematik*, fundado por Crelle, artículo bellísimo en forma y fondo.

[1] Por ejemplo, la referente a que el orden de factores no altera el producto.

El Álgebra ordinaria tiende hoy, pues, a aritmetizarse. Los analistas son cada vez más partidarios del dicho de Gauss: *Las matemáticas son las reinas de las ciencias y la Aritmética es la reina de las matemáticas.*

Y como en suma, la Aritmética es según ya he indicado una rama de la Lógica de los relativos, se comprende bien cuán exacta es la antigua sentencia: *Logica est Ars artium et Scientia scientiarum.* Conforme Peano expone en sus aureos folletos, las leyes que regulan los números son derivación directa de las que rigen el pensamiento humano.

Y si alguno pregunta qué utilidad inmediata pueden tener para la vida práctica actual tales innovaciones, contestaré con Schiller, el inmortal poeta alemán, en su apólogo Arquímedes y el joven:

Wer um die Göttin freit
suche in ihr nicht das Weib.

El adorador de la diosa no debe buscar en ella a la mujer.

VENTURA REYES Y PRÓSPER