COMENTARIOS

SILOGÍSTICA, LÓGICA POLIVALENTE Y TEORÍA DE MODELOS

Introducción

LO QUE ME MUEVE A ESCRIBIR esta nota es tan sólo exponer de modo breve una polémica, no suficientemente aireada en nuestro país, en torno a *¿Es el silogismo una inferencia o es una tesis lógica?*

Es necesario hacer dos consideraciones previas: la primera, que el interés de la cuestión es meramente histórico; [1] la segunda, que usamos "silogismo" sólo en el sentido de "silogismo analítico" y reducimos el enfoque al "asertórico", marginando el "modal".

Sabido es que la tradición considera el silogismo como una sustitución de una *regla lógica.* Tal posición vendría a mantener que, cualquier silogismo es una instancia de una regla del tipo p, q $\vdash$ r, donde p, q y r han de ser sustituidas por proposiciones atómicas del tipo "B conviene a A".[2]

[1] Si no fuera así, estaríamos ignorando el Teorema de Deducción, que nos permite el paso de 'inferencia' a 'tesis lógica' y el Teorema de Completud que nos permite lo inverso.

[2] La traducción de τὸ A ὑπάρχειν τῷ B que damos no debe considerarse como fruto de 'profunda' reflexión. De todas formas quiere señalar ya el carácter al que posiblemente nos inclinaremos en nuestras consideraciones sobre la silogística. La presente nota constituye en cierto modo un rudimento de un amplio trabajo en el que examinamos algunas alternativas sobre la silogística ("intensión o extensión", "cuantificación o necesidad inferencial", "bivalencia o multivalencia", "sintaxis o semántica"), inspiradas sobre todo por las críticas de Granger-Oeffenberger (vid. infra) a la interpretación de Lukasiewicz-Bochenski-Patzig del silogismo asertórico; de ahí que hayamos pensado preciso divulgar aquéllas. Por otra parte, la edición de los *Analíticos* que manejamos es: *Aristotle's Prior and Posterior Analytics,* a revised text with introduction and commentary by W. D. Ross, Oxford: Clarendon, 1957.

Las proposiciones atómicas introducidas por p y q son llamadas "premisas" del silogismo (διαστήματα o προτάσεις); la introducida por r, "conclusión" del silogismo (συμπέρασμα).

Un primer y muy fuerte ataque en sus momentos a tal concepción se encuentra en un pequeño artículo de J. Lukasiewicz. [3] Dice allí: "cada silogismo aristotélico genuino es una *implicación,* y, por consiguiente, una proposición hipotética" (ZGAL, 199). Su posición podría resumirse así: todo silogismo no es una sustitución de una regla lógica, sino de una *ley lógica* del tipo $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, o, por exportación de '$\rightarrow$', $p \wedge q \rightarrow r$.

La interpretación del silogismo de Lukasiewicz favorecía la creación de un cálculo axiomático en el que a partir de los modos BARBARA Y DATISI, más dos leyes de identidad y las reglas usuales en un cálculo de tal carácter (sustitución y modus ponens), podía inferirse el resto de los silogismos aristotélicos por medios puramente formales. Quizás tales logros ocultaran a Lukasiewicz las posibles fallas de su interpretación. Su labor ha sido continuada en una escuela de no muchos, pero sí muy relevantes, miembros, entre los que cabe destacar a I. M. Bochenski. [4]

Mas, recientemente, la interpretación del silogismo como una tesis lógica ha sufrido, a nuestro parecer, un serio quebranto, del que son principales autores G. G. Granger [5] y N. Oeffenberger, [6] en apoyo de la consideración tradicional del silogismo como una inferencia.

La obra del Stagirita parece que, *en principio,* permite ambas interpretaciones, lo que puede explicar asimismo el

[3] Este artículo apareció originalmente bajo el título "Z historii logiki zdań" en *Przegląd Filozoficzny,* 37 (1934), pp. 417-437. Una traducción alemana hecha por el autor apareció en *Erkenntnis 5* (1935), pp. 111-131, bajo el título "Zur Geschichte der Aussagenlogik". Aquí manejamos la traducción inglesa de S. McCall, publicada en *Jan Lukasiewicz. Selected Works* (ed. L. Borkowski), Amsterdam: North-Holland, 1970, pp. 197-217.

[4] Al respecto que aquí nos ocupa debe destacarse su obra *Ancient formal Logic,* Amsterdam: Nort-Holland, 1968.

[5] G. G. Granger: "Le syllogisme catégorique d'Aristote", *L'age de la science,* vol. III, n.º 4, Octobre-Décembre, 1970, pp. 281-310.

[6] N. Oeffenberger: "Pour une fondation plurivalente de la théorie aristotélicienne du syllogisme", *L'age de la science,* ibíd., pp. 311-322.

cambio experimentado por G. Patzig entre la primera y la segunda edición de su libro *Die Aristotelische Sillogistik.* [7]

§1. *El lazo silogístico en Lukasiewicz*

El silogismo es considerado metalógicamente por Aristóteles como un "discurso" en el que a partir de ciertas cosas supuestas se sigue con necesidad alguna otra cosa (An. Pr. A 1, 24 b, 18-20). [8] Pero su característica más relevante es el constar de dos términos encadenados por un tercero (p. ej., An. Pr. A 4, 25 b, 32-37). Tales términos ocurren en tres proposiciones: dos de ellas constituyen los supuestos iniciales o premisas; la otra, la conclusion. El *lazo* entre unas y otra es el objeto a discutir aquí.

Dice Aristóteles en An. Pr. A 3, 25 b, 37-39: "Pues si se predica A de todo B y B de todo C, A debe predicarse necesariamente (ἀνάγκῃ) de todo C". [9] Este texto puede, a primera vista, apoyar de modo decisivo la interpretación de Lukasiewicz del silogismo como una tesis lógica, cuyo atnecedente estuviese compuesto de la conjunción de las premisas y cuyo consecuente fuese la conclusión del silogismo. El factor perturbador respecto a ello es la ocurrencia de la palabra ἀνάγκη . La necesidad aquí establecida parece algo ajeno por completo a la consideración del silogismo como una implicación material. La solución a este problema dada por Lukasiewicz parece, asimismo, convincente. Manejándose con un ejemplo dado por Aristóteles (An. Pr. A 2, 25 a, 24-26) concluye que el signo aristotélico de la necesidad silogística representa un cuantificador universal y, en cuanto tal, siguiendo la práctica ordinaria, puede ser omitido al encontrarse en el prefijo de una fórmula verdadera. En efecto, dice Aristóteles (ibid. 20-26): "Pues si A conviene a algún B, también B convendrá necesariamente a algún A;

[7] G. Patzig: *Die aristotelische Syllogistik*, Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 1963², 1969³.

[8] συλλογισμός δέ ἐστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερον τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι.

[9] εἰ γὰρ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.

pues si no conviene a ninguno, tampoco A convendrá a ningún B. Pero si A no conviene a algún B, no necesariamente B no habrá de convenir a algún A; por ejemplo, si B es 'animal' y A es 'hombre', pues 'hombre' no conviene a todo 'animal', pero 'animal' conviene a todo 'hombre'", lo que permite (?) concluir a Lukasiewicz que el uso de Aristóteles de la palabra ἀνάγκη en el consecuente de una implicación verdadera (y todo modo silogístico concluyente lo es) sólo sirve para enfatizar que tal implicación *es verdadera para todos los valores de las variables que en ella ocurran.* [31] Pasemos ahora a otro punto.

Dice Aristóteles en An. Pr. B 2, 53 b, 4-6: "Es posible que las premisas que forman el silogismo sean ambas verdaderas o ambas falsas, o una verdadera y la otra falsa". [12] De nuevo un texto, y esta vez quizás de modo más firme, parece apoyar la tesis de Lukasiewicz: es posible que un silogismo conste de premisas falsas y que sin embargo sea concluyente. Ello estaría plenamente de acuerdo con la consideración del silogismo como una proposición hipotética, puesto que una implicación material es verdadera siempre que el antecedente (aquí la conjunción de las premisas) sea falso; y 'verdad' es a implicación, lo que 'concluyente' es a silogismo.

§2. *Una fundamentación trivalente de la silogística*

Hasta aquí hemos expuesto unas pocas razones en apoyo de la interpretación de Lukasiewicz del silogismo como una

[10] εἰ γὰρ τὸ A τινὶ τῷ B, καὶ τὸ B τινὶ τῷ A ἀνάγκη ὑπάρχειν· εἰ γὰρ μηδενί, οὐδὲ τὸ A οὐδενὶ τῷ B. εἰ δέ γε τὸ A τινὶ τῷ B μὴ ὑπάρχει, οὐκ ἀνάγκη καὶ τὸ B τινὶ τῷ A μὴ ὑπάρχειν, οἷον εἰ τὸ μὲν B ἐστὶ ζῷον, τὸ δὲ A ἄνθρωπος· ἄνθρωπος μὲν γὰρ οὐ παντὶ ζῴῳ, ζῷον δὲ παντὶ ἀνθρώπῳ ὑπάρχει.

[11] Patzig a este respecto distingue entre necesidad (1) absoluta (la de los principios) y (2) relativa (la de la conclusión silogística). Pero tanto en un caso como en otro, la "necesidad" se retrotraería a la "cuantificación": cuantificación de individuos en el primer caso y de predicados en el segundo.

[12] Ἔστι μεν οὖν οὕτως ἔχειν ὥστ'ἀληθεῖς εἶναι τὰς προτάσεις δι' ὧν ὁ συλλογισμός, ἔστι δ'ὥστε ψευδεῖς, ἔστι δ'ὥστε τὴν μὲν ἀληθῆ τὴν δε ψευδῆ.

tesis lógica. Nils Oeffenberger, [13] en un minucioso estudio de los capítulos 2 a 5 de An. Pr. B, parece minar de modo total aquélla.

De la silogística aristotélica se ha dado tradicionalmente como una de sus características esenciales el ser bivalente, i. e. el poseer dos valores veritativos, el valor veritativo "verdadero" y el valor veritativo "falso". Lukasiewicz sustenta de modo explícito esta opinión, [14] a la vez que fundamenta la lógica modal de Aristóteles mediante un sistema lógico tetravalente (asociando un valor a cada funtor modal). Sin embargo parece muy probable que esta opinión generalizada sea falsa.

En efecto, Aristóteles —sobre todo en los capítulos citados— pone gran énfasis en el papel desempeñado para el silogismo por premisas no simplemente falsas, sino TOTAL o PARCIALMENTE falsas. Lo "total" o "parcialmente falso" se dice de proposiciones universales, y una proposición universal es "totalmente falsa", si es la *contraria* de una proposición "verdadera"; mientras que una proposición universal es "parcialmente falsa", si es la *contradictoria* de una proposición "verdadera". [15]

Aristóteles lleva, entonces, a cabo un detallado análisis de las figuras silogísticas. Aquí nos reducimos a la primera y dentro de ella sólo al modo BARBARA. Siguiendo a Lukasiewicz simbolizaremos la proposición universal afirmativa por Aab y esquematizaremos en la tabla lo que dice el Stagirita, empleando los signos:

2 para "verdadero"
0 para "totalmente falso"
1 para "parcialmente falso"
C para "concluyente"
NC para "no concluyente".

[13] Op. cit.

[14] J. Lukasiewicz: "On three-valued logic", en *Polish Logic 1920-1939*, ed. Storrs McCall, Oxford, 1967.

[15] λέγω δ᾽ὅλην ψευδῆ τὴν ἐναντίαν, οἷον εἰ μηδενὶ ὑπάρχον παντὶ εἴληπται ἢ εἰ παντὶ μηδενὶ ᾧ ὑπάρχειν.

PREMISA MAYOR	PREMISA MENOR	CONCLUSIÓN	SILOGISMO
(Abc)	(Aab)	(Aac)	
2	2	2	C
2	0	2	C
2	1	2	C
0	0	2	C
0	2	0	NC
1	1	2	C
1	2	2	C

La línea quinta es la que aquí nos interesa examinar. Si la premisa mayor es totalmente "falsa" y la menor es "verdadera", la conclusión debe ser siempre "falsa" y el silogismo no concluyente. Dice Aristóteles a este respecto en An. Pr. B 2, 54 a, 2-4: "Pero si sólo una de las premisas es falsa, cuando la primera, por ejemplo AB, es totalmente falsa, la conclusión no será verdadera". [16]

Pensemos por un momento que Lukasiewicz interpreta correctamente el silogismo como una tesis lógica, y ya que no puede ser así en una lógica bivalente —como creemos que se desprende claramente del texto aristotélico que comentamos—, intentemos corroborar su idea en una lógica trivalente, como la que hemos esbozado. Si Abc simboliza la premisa mayor, Aab la menor y Aac la conclusión BARBARA adoptará la forma: Abc $\wedge$ Aab $\rightarrow$ Aac. Construyamos primero las tablas correspondientes a '$\wedge$' y '$\rightarrow$', manejando simplemente las variables proposicionales p y q. Ya que hay tres valores y dos variables, habrá nueve líneas en cada tabla:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
2	2	2	2
2	0	0	0
2	1	1	1
0	2	0	2
0	0	0	2

16 Ἐαν δ᾽ἡ ἑτέρα τεθῇ ψευδής, τῆς μὲν πρώτης ὅλης ψευδοῦς οὔσης, οἷον τῆς AB, οὐχ ἔσται τὸ συμπέρασμα ἀληθές...

0	1	0	2
1	2	1	2
1	0	0	1
1	1	1	2

Ahora construimos la tabla para BARBARA:

Abc	Aab	Aac	Abc $\wedge$ Aab	Abc $\wedge$ Aab $\rightarrow$ Aac
2	2	2	2	2
2	2	0	2	0
2	2	1	2	1
2	0	2	0	2
2	0	0	0	2
2	0	1	0	2
2	1	2	1	2
2	1	0	1	1
2	1	1	1	2
0	2	2	0	2
0	2	0	0	2
0	2	1	0	2
0	0	2	0	2
0	0	0	0	2
0	0	1	0	2
0	1	2	0	2
0	1	0	0	2
0	1	1	0	2
1	2	2	1	2
1	2	0	1	1
1	2	1	1	2
1	0	2	0	2
1	0	0	0	2
1	0	1	0	2
1	1	2	1	2
1	1	0	1	1
1	1	1	1	2

En esta tabla hay que destacar: (1) que se introduce, y ello por necesidad en la construcción correcta de la misma, una línea como la décima en que siendo "totalmente falsa" la premisa mayor y "verdadera" la menor, la conclusión es "verdadera", y (2) que tanto la línea décima como la undécima contravienen directamente lo sustentado por Aristóteles, que da el silogismo en estos casos como no concluyente, mientras que las tesis lógicas correspondientes son aquí "verdaderas".

Cabe, pues, obtener las dos conclusiones siguientes:

1) El peso puesto por Aristóteles en los diferentes papeles jugados por las proposiciones "total" o "parcialmente falsas" parece dar la base para sostener con firmeza el carácter trivalente de la silogística; [17]

2) Aún en una lógica trivalente, el silogismo aristotélico no puede ser considerado como una proposición hipotética.

§ 3. *Silogística y Teoría de modelos*

Un nuevo argumento, y de profundo interés para nosotros, es presentado por Granger [18] contra la interpretación de Lukasiewicz.

Dice Aristóteles en An. Pr. B 4, 57 b, 4-6: "Y entiendo, por ejemplo, que es imposible que B sea necesariamente grande cuando, a la vez, A es blanco y no es blanco", [19] y sigue con un ejemplo (ibíd. 11-14): "Cuando B no es grande, A no puede ser blanco. Pero si, cuando A no es blanco, B es por necesidad grande, se sigue necesariamente que, cuando B no es grande, el mismo B es grande. Pero esto es imposible". [20] Si interpretamos εἰ entre A y B como signo de implicación material y empleamos, como venimos haciendo, p y q como variables proposicionades, el ejemplo formalizado

[17] Oeffenberger en este punto (Op. cit., p. 322) llega mucho más lejos al hablar ya no de *interpretación* de la silogística (a la manera como Lukasiewicz interpreta la lógica modal de Aristóteles en un cálculo multivalente), sino de seguir al pie de la letra lo que el Stagirita establece en los capítulos que comentamos.

[18] Op. cit., pp. 285-286.

[19] λέγω δ᾽οἷον τοῦ A ὄντος λευκοῦ τὸ B εἶναι μέγα ἐξ ἀνάγκης, καὶ μὴ ὄντος λευκοῦ τοῦ A τὸ B εἶναι μέγα ἐξ ἀνάγκης.

[20] τοῦ δὴ B μὴ ὄντος μεγάλου τὸ A οὐχ οἷόν τε λευκὸν εἶναι, τοῦ δὲ A μὴ ὄντος λευκοῦ εἰ ἀνάγκη τὸ B μέγα εἶναι, συμβαίνει ἐξ ἀνάγκης τοῦ B μεγάλου μη ὄντος αὐτὸ τὸ B εἶναι μέγα. ταῦτο δ᾽ἀδύνατον.

sería: Si $p \to q$, entonces por contraposición $\neg q \to \neg p$, y si $\neg p \to q$, entonces por transitividad de '$\to$', $\neg q \to q$. Y esto, dice Aristóteles, *es imposible*. Sin embargo, $\neg q \to q$ es una proposición *contingente,* i. e. una proposición cuyo valor de verdad no es "falso" para todas las interpretaciones de sus variables, sino "verdadero" para algunas (cuando $\neg q$ es "falso" y q es "verdadero") y "falso" para otras (cuando $\neg q$ es "verdadero" y q es "falso"). De modo que la interpretación de εἰ como signo de implicación material significaría ir contra el τοῦτο δ'ἀδύνατον establecido por Aristóteles.

Si interpretamos el lazo silogístico en cambio como una "consecuencia semántica", quizás, como vamos a ver, estaremos más de acuerdo con el espíritu aristotélico en este punto.

He aquí algunas nociones necesarias. Sea £ un lenguaje formal para la silogística que conste de constantes de individuo, variables de individuo ($x_1, \ldots, x_n$), símbolos de predicado ($P_1, \ldots, P_n$), conectores ($\neg$, $\to$) y cuantificador ($\bigwedge$).[21] Las variables y constantes de individuo de £ son *términos* ($t_1, \ldots, t_n$). Los símbolos de predicado aplicados a términos proporcionan las *fórmulas atómicas.* Definimos inductivamente *fórmula bien formada* (o simplemente *fórmula*) del modo que sigue:

(1) toda fórmula atómica es una fórmula;
(2) si φ es una fórmula, $\neg \varphi$ es una fórmula;
(3) si φ_1 y φ_2 son fórmulas, $\varphi_1 \to \varphi_2$ es una fórmula;
(4) si φ es una fórmula y x_i es una variable de individuo, $\bigwedge x_i(\varphi)$ es una fórmula.
(5) nada más es fórmula.

En la definición acabada de dar —y en lo sucesivo— φ, φ_1, φ_2 son variables metalingüísticas para fórmulas.

Una *interpretación* I de £ constará de:

(1) un conjunto no-vacío D de individuos, llamado el *dominio de la interpretación;* y

[21] Los demás conectores pueden ser definidos a partir de los dados, así como el cuantificador existencial puede serlo a partir del generalizador y el conector $\neg$.

(2) los siguientes asignamientos:

a) a cada constante de individuo de £ se asignará un individuo determinado de D; y

b) a cada símbolo de predicado de £ se asignará una propiedad definida para individuos en D.

En una interpretación I como la dada, las variables de individuo de £ tendrán D como rango, mientras que los conectores y el cuantificador conservarán sus significados usuales veritativo-funcionales.

Sea Γ el conjunto de series denumerables de individuos de D. Sea s una de tales series. Sea, finalmente, s′ una función tal que:

a) si t es una constante de £, s′t es el miembro de D asignado por la interpretación I a t; y

b) si t es la i-ésima variable de individuo en la enumeración que se dé de las variables de individuo de £, s′t es el i-ésimo miembro de la serie s.

Podemos proceder así a la definición inductiva de *satisfacción:*

(1) si φ es una fórmula atómica, i. e. una fórmula $P_n(t_1, \ldots, t_n)$, s satisface φ si y sólo si la n-pla $(s't_1, \ldots, s't_n)$ está en la relación asignada por la interpretación I a dicho símbolo de predicado;

(2) s satisface $\neg\, \varphi$ si y sólo si s no satisface φ;

(3) s satisface $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, si y sólo si s no satisface φ_1 o s satisface φ_2;

(4) s satisface $\bigwedge x_i(\varphi)$ si y sólo si toda serie de Γ que difiera de s a lo sumo en el i-ésimo miembro satisface φ.

Ahora, decimos que una fórmula φ de £ es *satisfacible* si y sólo si hay alguna interpretación I de £ por la que sea satisfecha. Y finalmente, decimos que φ_1 es una *consecuencia semántica* de φ_2, en símbolos $\varphi_2 \models \varphi_1$, si y sólo si para toda interpretación de $\mathcal{L}$, cualquier serie de Γ que satisfaga φ_2, asimismo satisface φ_1.

Volvamos ahora al punto de la imposibilidad afirmada por Aristóteles respecto de que de $\neg$ q se *siga* q. Hemos visto que, desde la perspectiva de que el lazo entre $\neg$ q y q sea una implicación material, nos vemos forzados a considerar que Aristóteles se *equivoca* en este punto-solución a la que debería verse abocado Lukasiewicz. Apliquemos ahora las nociones de teoría de modelos expuestas. Si el lazo entre $\neg$ q y q es el de consecuencia semántica, i. e. $\neg q \models q$, tendríamos que cualquier serie denumerable de individuos del dominio de interpretación escogido debería satisfacer q de satisfacer $\neg$ q. Pero sabemos que una serie tal satisfaría $\neg$ q si y sólo si no satisficiera q. En este sentido, q *no puede seguirse de* $\neg$ q. Y a esta imposibilidad creemos que es a la que se refiere Aristóteles.

El carácter semántico de la silogística aristotélica así sustentado estaría plenamente de acuerdo, por otra parte, con métodos semánticos manejados por el Stagirita en otros puntos. Nos referimos al método de los "contra-ejemplos" (ἐκθέσις) y al de "por lo indefinido" (τοῦ ἀδιορίστου) para la refutación de los modos silogísticos no válidos.

J. SANMARTÍN ESPLUGUES
Universidad de Valencia