RUSSELL ANTE EL INICIO DE LA MATEMÁTICA

Javier de Lorenzo
Valladolid

ENTORNOS DE 1895. Bertrand Russell visita Alemania. Oye hablar de Cantor; por vez primera, según contará años después, de Weierstrass. Russell encuentra una disciplina, piedra de toque de todo pensar, en plena ebullición: la Matemática. En los entornos de 1895, precisamente, se está produciendo el cierre de un ciclo; se está en la búsqueda de un nuevo planteamiento, de la independencia de una disciplina. Nueva, aunque el nombre sea el de siempre, Matemática. Es una crisis sólo comparable con la que otra disciplina del mismo nombre soportó en los entornos del siglo IV, adoptando incluso una muy parecida solución. Mente abierta a toda actividad humana, apasionado de la Matemática casi tanto como del hombre, Russell se incorpora a uno de los aspectos de la problemática debatida en el momento: a la de fundamentos.

1. La creación del Cálculo en los siglos XVII y XVIII se liga con la aparición de una serie de problemas que pueden adjetivarse de tecnológicos. Se hacía imprescindible, para describir y actuar sobre la naturaleza, un instrumento matemático como el que proporcionará dicho cálculo. Instrumento que absorbe a al propia Geometría, facilitada esta absorción por la revolucionaria creación cartesiana de la Geometría analítica. Con ello, la Matemática, a la vez que elevada a lenguaje divino, se arraigaba como una ciencia de la naturaleza más. Por un lado, sus temas de estudio, sus objetos no eran otros que los de proporcionar instrumentos, métodos para el avance y desarrollo de ciencias como la Astronomía, Mecánica, Física, Tecnología. Sus objetos se limitan a dar los

métodos para el cálculo de la forma que ha de tener la quilla de un buque; la forma, tamaño de una vela; el centro de gravedad de la superficie engendrada por una curva aplicable a la construcción de cúpulas o puentes; la propagación del calor; la explicación del movimiento de graves, de astros; la representación adecuada en plano para realizar fortificaciones... Por otra parte, los métodos con los cuales obtenía tales resultados, con los cuales manejaba sus objetos, descansaban no en procesos de razonamiento propios o al menos clara y explícitamente tipificados, sino en el proceso de una lógica del sentido común que todo individuo poseía, aunque en la formulación tal lógica quedara enmascarada por el juego del encadenamiento de definiciones, proposiciones, demostraciones, corolarios... Lógica del sentido común y de la intuición tan comunes y repartidos en la famosa ironía cartesiana.

Cabía hablar de *las* Matemáticas como ramas, como verdaderas disciplinas separadas entre sí en cuanto a su enfoque pragmático, en cuanto a su objeto. Aisladas, la Geometría euclídea era un mero recuerdo apto para entretenimiento o enseñanza; modelo no del trabajo matemático sino de otras disciplinas. La Aritmética, con cierto rango, apta para juegos de artificio o manejos de virtuoso, exigiendo excesivo refinamiento para el intento de solucionar cuestiones que, aparentemente triviales, escapaban a la lógica del sentido común y que carecían, además, de claras aplicaciones prácticas; de aquí el posterior calificativo de "reina de las Matemáticas" con que las denominara Gauss, o la dedicación a este campo por matemáticos como Kummer por ser la "única rama pura no mancillada por las aplicaciones".

2. Ni por su objeto ni por sus métodos podía afirmarse que la Matemática existiera como disciplina, con propia unidad orgánica. Corresponde a la generación que en otros lugares he denominado de romántica la pretensión de independizar las Matemáticas de su servidumbre en cuanto al objeto. Abel, Galois, Jacobi, Peacock, Lobatchevski..., tratarán la Matemática por ella misma a partir del primer tercio del siglo XIX. Si hay aplicaciones a otras ciencias las habrá en cuanto a tales aplicaciones o en cuanto motor de nuevos

logros; no como propio fin, como labor del matemático puro, profesionalizado. Tal independencia respecto al objeto se logra tardíamente. En Geometría, todavía Lobatchevski admite el espacio como apto para el experimentum crucis que decida por la "verdadera" geometría, como adecuada a la realidad, como ciencia natural más, en el fondo. Hacia 1891 el convencionalismo de Poincaré y los primeros ensayos de Hilbert consiguen consolidar la concepción de que tal pregunta clave carece de sentido, al ser la Geometría independiente de tal realidad. Ello exige la división de la Geometría en dos ramas: pura y aplicada. Esta última, que ya no es Matemática, será la encargada de relacionarse con tal realidad. La primera quedará entonces como una construcción del matemático en la que lo importante no es ni siquiera el objeto geométrico, sino las relaciones que entre tales objetos puedan existir o puedan ser convencionalmente definidas.

La independencia respecto al objeto se logra con la aparición de nuevos entes u objetos como los cuaterniones, vectores, matrices, ideales... Objetos sólo manejables atendiendo a las operaciones básicas, a las relaciones que entre ellos pudieran establecerse; relaciones que obligan a la imposición de condiciones a veces muy restrictivas y claramente delimitadas: las de permanencia de las leyes formales, pero ya entre los conjuntos de tales nuevos objetos entre los que se define la operación formal.

La independencia respecto al objeto se logra en los terrenos del Análisis mediante el proceso que a lo largo del siglo XIX desemboca en la Aritmetización del Análisis y que tiene en Weierstrass su representante máximo. Es a él a quien corresponde apoyar toda esta rama en el concepto de límite, definido con absoluto rigor. Rigor que, por otro lado, elimina la aplicabilidad física o la separa íntegra, y ya de modo definitivo, de la labor del matemático, al hacer que la aproximación que el físico necesita no baste al matemático, mientras que éste cubre su tarea con una capa demostrativa de precisiones, de condiciones necesarias y suficientes, inútil al que ha de aplicar meramente resultados. En esta línea surgirá la obra de Cantor, con la creación de nuevos entes y de una base en la que apoyar las distintas ramas de la Matemática hasta entonces desgajadas, y que tienden a la unificación, pero aún muy oscuramente. A partir de las series de Fourier, Cantor estudia los campos de definición. En ello no es original. Es labor que realizan igualmente, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Dedekind, Méray..., pero Cantor no se limita a imponer condiciones necesarias y suficientes que satisfagan los conjuntos de definición y de valores de las funciones. Estudia tales conjuntos en sí. Con su teoría de la equipotencia entre conjuntos obtiene el concepto de cardinalidad, lo mismo que Frege; construye su teoría ordinal. Pero, por encima de todo, dos hechos: Cantor sistematiza una teoría, la de conjuntos, que en los entornos de 1900 se va a convertir en la apoyatura de la teoría matemática provocando el final del llamado Cálculo infinitesimal clásico y la aparición del Análisis moderno, circunstancia ya reconocida en 1897, durante el Primer Congreso Internacional de Matemáticos de Zurich. Cantor crea nuevos objetos como la medida de conjuntos, los primeros conceptos de topología tanto en la recta real como en espacio de dimensión cualquiera... y, sobre todo, obliga al manejo del infinito. Y tal infinito se muestra como el logro más poderoso de la Matemática, aunque todavía Dedekind cree poder obtener el axioma del infinito como algo demostrable y el propio Cantor llegue a confesar que el manejo del mismo lo realiza a partir de la intuición. Intuición del infinito actual tan utópicamente discutida, aunque Cantor afirmara haber poseído.

3. Entornos de 1895. La Matemática se ha desgajado en cuanto a su objeto, de cualquier otra disciplina. Afirmación es ésta que no implica la ausencia de contactos, interrelaciones con ellas. Contactos tan profundos como los mantenidos en épocas anteriores. Sin embargo aún parece faltar algo al matemático. Implícitamente al principio, después de un modo totalmente claro, el matemático percibe la necesidad de afinar su método, la lógica del sentido común, para tratar el nuevo objeto. Ha de buscar su propia coherencia como disciplina. Y ha de buscarla intrínsecamente. No puede realizar, ya, contraste, externo. Requiere precisar conceptos, demos-

traciones. Requiere unificar los diversos objetos en materia común. Unificación sostenida precisamente por el proceso de aritmetización del análisis, por la explicación de todas las geometrías mediante el concepto de grupo de transformaciones —Klein, Sophus Lie, Poincaré—. Abel, Galois habían denunciado la ausencia de todo tipo de marcha unificadora, la falta de coherencia unitaria, de visión integral de la Matemática. Ahora se pretende una fundamentación rigurosa de la Matemática. Florecen, entornos de 1895, títulos con tal término, con tal enfoque de la problemática que esta nueva materia ha originado. El propio Bertrand Russell no escapará a ella. Escribirá, 1897, *An essay on the foundations of geometry*. Florecen polémicas respecto al papel de la lógica y de la intuición.

Que la lógica del sentido común no bastaba, lógica equiparada a silogística únicamente, al igual que el instrumento con el cual se manejaba, la intuición, venía apoyado por las tres líneas de independencia respecto al objeto. A pesar de lo cual todavía algunos matemáticos sostenían que era perfecta. Cuando Dedekind observa que proposiciones como "$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$", tan intuitivamente evidentes, carecen de rigurosa demostración, Lipschitz aún invoca a Euclides. Pero, en general, éste es caso aislado.

En un principio, se vuelven las miradas a la Geometría. El proceso demostrativo requiere la axiomatización, como único proceso que, en principio, es seguro. Pero todavía Pasch por ejemplo —1882— mantiene un principio realista: los conceptos geométricos se abstraen de los objetos naturales; los axiomas expresan relaciones intuitivas, evidentes, observables por todo individuo; después de este primer momento de captación, el rigor lógico. Lógica no ya del sentido común, sino del encadenamiento de proposiciones a partir de los axiomas, sin intervención de término alguno no mostrado al principio del sistema.

Con esta vuelta, el modelo euclídeo se depura y perfecciona. Salen a luz los axiomas implícitos que contenía, los fallos de rigor lógico. Se axiomatiza, igualmente, la Aritmética, aunque apoyada también en la abstracción del objeto natural. Apoyatura sólo para la captación de las primeras proposiciones matemáticas, no para los principios lógicos, aunque tanto éstos como aquéllos deban ser expuestos de manera simultánea.

Sin embargo, por propia ley de inercia, parece no bastarle al matemática la vía de la axiomatización en la que de lleno penetra toda la Matemática a partir de 1905, tanto en la explicación de la teoría de conjuntos, para salvar las antinomias —Zermelo—, como en la explicación de cada una de las distintas parcelas o temas que se desarrollen en toda la Matemática. El matemático sostiene la necesidad de independencia respecto, incluso, a la Lógica. Incluso el proceso demostrativo, aunque axiomático, ha de guiarse no por principios lógicos, sino por principios estrictamente matemáticos. En contraposición al término lógica no parece encontrarse otro término que el de intuición. Y si el proceso se quiere propio, no se duda de que las proposiciones matemáticas sean algo absoluto, radicalmente diferentes e insubordinables a cualquier otra materia. Ha costado casi todo un siglo lograr la independencia respecto al objeto. Y el matemático se aferra a ese logro. Con total pasión, y quiere conquistar la independencia en el otro terreno, el demostrativo, que es el que roza, precisamente, con la Lógica. Sin embargo, las querencias o vivencias no son racionales. Requiere demostraciones, búsqueda de tal proceso demostrativo como propio de la Matemática, así como demostración o explicación de tal insubordinación de las proposiciones matemáticas.

En esta función los matemáticos estuvieron, en principio, solos o aparentemente solos. Henri Poincaré destacará como uno de los primeros en el intento de dar explicaciones. Apoyado en su convencionalismo de las proposiciones geométricas, admite el método axiomático para esta disciplina. Método al que exige la condición de consistencia interna. Por otro lado sostiene con radical firmeza la irreducibilidad de las proposiciones matemáticas a cualqquier otra disciplina, concretamente a la Lógica. Esta se le muestra incapaz para dar cuenta del proceso demostrativo matemático. La Matemática trata del infinito y para el manejo de éste la silogística es impotente. Se requieren otros procesos. Poincaré sostendrá que *uno de ellos* es el de inducción completa, manifestado en la Aritmética del número natural. Es el más simple. Pero el que suscitará, precisamente, la mayor polémica. En la posición de Poincaré creo que lo destacable es el convencimiento de la independencia de la Matemática tanto en su objeto como en su proceso demostrativo, más que los débiles argumentos con que apoya tal convencimiento. Ello es clave para comprender las polémicas que surgirán en los primeros años del siglo XX. La postura del matemático francés refleja la trayectoria seguida por la Matemática desde los tiempos de Galois. Es la que sostiene que las "verdaderas matemáticas" continuarán construyéndose indiferentes a las críticas y a las pretendidas subordinaciones que se la quieran hacer desde otros campos. Es, ciertamente, posición teñida de psicologismo. Consecuencia, la sostenida afirmación de que la Matemática es obra del hombre, quien la construye mediante procesos finitos, y nunca es ciencia acabada, perfecta, que pueda ir descubriéndose paso a paso o de modo global. El finitismo constructivista, que encierra el infinito a partir de la inducción completa o cualquier otro proceso recurrente, la formulación axiomática parcial con la condición de consistencia de los sistemas que se vayan elaborando, constituye la garantía y la seguridad de los nuevos logros.

Creo que este es, realmente, el ambiente problemático que Russell encuentra en la Matemática en los entornos de 1895, y que se mantiene subyacente, implícito, hasta bien entrado el siglo XX. Problemática que se mantiene a lo largo del período en el cual realiza su obra lógica Bertrand Russell. Perspectiva de constitución de una nueva disciplina. Perspectiva de independencia que resume la exclamación de Hilbert, de contenido mucho más amplio de lo que él mismo debió pensar: Del paraíso creado por Cantor nadie puede expulsarnos.

4. Ante este avance de la Matemática y el claro reconocimiento de la insuficiencia de la silogística para expresar los razonamientos matemáticos, se provoca una reacción en los medios lógicos. Frege, Peirce, Schroder. . . dedican sus esfuer-

zos, como profesionales de la Lógica, al perfeccionamiento de ésta. Y, a la vez, como piedra de toque, a la explicación de la Matemática, de la naturaleza de sus objetos, de su razonamiento.

Perfeccionador de esta tendencia, Russell pretende demostrar la no independencia de la Matemática, ni en cuanto a sus proposiciones, ni en cuanto a sus métodos. Intenta reducir, subordinar la Matemática a la Lógica. Y ello en el sentido de que todos los términos de la Matemática pueden ser definidos en términos de pura lógica; todas las proposiciones matemáticas pueden obtenerse de unos principios estrictamente lógicos, mediante reglas de inferencia explícitamente formuladas y de carácter también lógico.

Un primer problema surgiría en tal pretensión. Sería el de entender qué era Lógica para Russell. Esta problemática tiene que marginarse aquí, aunque deba decirse que respecto a la pretensión, hoy puede considerarse desfasada, y respecto a qué sea la Lógica se liga el problema de qué entender auténticamente por función proposicional, ya que una de las posibles interpretaciones liga tal concepto con el de predicado, con lo cual, mediante los axiomas de comprehensión y extensionalidad, la función proposicional no caracterizaría más que el concepto de conjunto. La Lógica, entonces, no sería más que una rama de la Teoría de conjuntos. Y ello no era, ciertamente, el propósito original de Russell cuando, junto a las reglas de deducción —es decir, la teoría de cuantificación—, agregaba la lógica de las funciones proposicionales.

Igualmente problemática se presenta la reducción en cuanto a los principios lógicos tomados como axiomas de la teoría matemática. El axioma de reductibilidad no iba a ser más que un equivalente, para ciertas zonas, del principio de inducción completa y no se ve bien qué carácter especial de logicidad posee. Análogamente el axioma del infinito presenta parecidos problemas en cuanto al carácter de lógico.

Marginando la cuestión pragmática en cuanto al no éxito final del programa de Russell, importa destacar el hecho de la pretensión de subordinar la Matemática a la Lógica frente a los propios matemáticos. Nada más natural que durante los primeros años del siglo XX se viera la aparición de las fuertes polémica entre Poincaré y Russell; la intervención en las mismas de otros matemáticos que, utilizando ampliamente la teoría de conjuntos y la propia axiomática en su labor pragmática, en su labor de profesionales de la Matemática, se alineen fundamentalmente en la posición denominada semiintuicionismo, sin por ello crear doctrina coherente propia, peor pertrechados en cuanto a la argumentación, pero asistidos de esa rara intuición que caracteriza al matemático para percibir la línea exacta. Polémicas en las que el malentendido inicial se encuentra en no captar nítidamente, quizá, el problema que se debate. Si por una parte, los matemáticos pretenden sostener la independencia de su disciplina, por otra la posición de Russell hace fuerza en el rigor demostrativo, en la axiomática y, en el fondo, en la unificación de la misma disciplina que se debate.

5. En 1917 surgirá, ya de modo definitivo, el programa de Hilbert. Apoyado en su concepción formalista, sintetiza las posiciones extremadas. Lógica y Matemática como disciplinas paralelas. La independencia de la Matemática, asegurada. Pero, a la vez, la Matemática como construcción formal, de sistemas formales, con un instrumento a su servicio: la intuición que pudiera denominarse formalizada, la que da la aprehensión tanto de la marcha real del pensamiento matemático como de las "ideas", en decir bourbakista, de las que tal pensamiento se nutre.

La escuela bourbakista podrá dar la noticia, en 1948, de modo ya enteramente oficial, de la existencia de *La* Matemática como disciplina independiente por su objeto, por su método. La lógica o bien es una rama de la Matemática —como cuando estudia los sistemas formales, y es teoría combinatoria de números, o cuando estudia la teoría de modelos, y es teoría conjuntista—, o bien es intrumento, como antes lo fue la lógica del sentido común, en el sentido de la intuición formalizada o el rigor informal —como también se la ha denominado— que antes fue señalado.