SOBRE LA CONSISTENCIA DE LAS 'NEW FOUNDATIONS FOR MATHEMATICAL LOGIC'

J. Sanmartín Esplugues

INTRODUCCION. Los sistemas axiomáticos de conjuntos de mayor uso hoy son, como se sabe, el de Zermelo-Fraenkel (abreviado ZF) y el de von Neumann-Bernays-Gödel (abreviado NBG). El segundo, frente al primero, posee la ventaja de sustituir el Esquema de Axioma de Separación por una lista finita de axiomas para existencia de clases; con ello, al mismo tiempo, se establece en NBG una delimitación clara entre lo que puede y no puede construirse en él. Pero las laboriosas construcciones exigidas por el Esquema de Axioma de Separación en ZF encuentran su correspondiente en las laboriosas construcciones de las demostraciones del caracter de elemento en NBG.

Las 'New Foundations' (abreviado NF) de W. V. O. Quine poseen frente a ZF y NBG la ventaja evidente de evitar tales construcciones. En NF, manteniéndose en consonancia con la línea de los Principia Mathematica, Quine se maneja, podríamos decir, con un Axioma de Abstracción (en su sistema, como veremos, es una regla) del que se evita la aparición de paradojas mediante la condición de que la propiedad definitoria de la clase en cuestión esté estratificada.

Dar una prueba de la consistencia de NF tendría un cierto valor, como se desprende de lo arriba dicho; valor, sin duda, acrecentado por la demostración de Wang-50 de que, si NF es consistente, también será consistente el sistema de Quine expuesto en Mathematical Logic, que posee frente a NBG la ven taja de eliminar condiciones restrictoras en cuanto a existencia de clases, en particular la condición de que las variables que satisfagan la propiedad definitoria de clase tomen sólo elementos como valores.

El sistema NF de Mr. Quine se ha mostrado muy reacio ante pruebas de su consistencia. En Rosser-Wang-50 se demuestra que no hay ningún modelo standard para NF. Esbozo su prueba del modo que sigue:

Son teoremas en NF:

$$0 \in \mathrm{Fin}, 1 \in \mathrm{Fin}, 2 \in \mathrm{Fin}, \ldots$$

$$0 \neq \Lambda, 1 \neq \Lambda \,.\, 1 \neq 0, \; 2 \neq \Lambda \,.\, 2 \neq 0 \,.\, 2 \neq 1, \ldots$$

(donde Fin denota la clase de los enteros y Λ la clase vacía), de modo que cada uno de estos resultados será verdadero en cualquier modelo, y por tanto Fin será representada por una clase infinita en el modelo que construyamos. En NF se demuestra asimismo

$$(m)(n)(m \in \mathrm{Fin} \,.\, n \in \mathrm{Fin} \supset m < n \vee m = n \vee m > n),$$

de modo que la relación $\leq$ deberá imponer una cierta relación de orden sobre el modelo de Fin, para que éste satisfaga el teorema citado en último lugar. Tal modelo no será standard, si la relación de orden en cuestión no es una relación de buena ordenación. Para que lo fuera, sería preciso que el modelo de Fin (denotémoslo Fin^{*}) poseyera los representativos de 0, 1, ... (denotémoslos $0^{*}, 1^{*}, \ldots$) y solamente ellos. Supóngase por el contrario que a no es ni 0^{*}, ni 1^{*}, ... y es un miembro de Fin^{*}. Puede suceder entonces que:

(1) a no sea el representativo de Λ. Procédase entonces como se indica trás (2);

(2) a sea el representativo de Λ. Entonces, ya que es un teorema de NF que $(x)(x \in \mathrm{Fin} \supset x \neq \Lambda) \vee (\exists x)(x \in \mathrm{Fin} \,.\, V \in x)$, (donde V denota la clase universal), para que Fin^{*} lo satisfaga deberá haber un b en Fin^{*} tal que el representativo de V en Fin^{*}, digamos V^{*}, pertenezca a b. Pero se demuestra en NF que $V \notin 0, V \notin 1, \ldots$; luego, $V^{*} \notin 0^{*}, V^{*} \notin 1^{*}, \ldots$ y, por tanto b no será ni 0^{*}, ni 1^{*}, ..., ni el representativo de Λ, simbolizado Λ^{*}.

Así se infiere la existencia en Fin^{*} de un miembro, digamos c, que no es ni 0^{*}, ni 1^{*}, ... Es más podemos probar en NF que:

$$(m)(n)(m \in Fin \, . \, m \neq \Lambda \, . \, m \neq 0 \supset (\exists n)(m = n + 1 \, . \, n \neq \Lambda));$$

luego, en el modelo Fin^{x}, ya que $\underline{c} \in Fin^{x}$, $\underline{c} \neq \Lambda^{*}$ y $\underline{c} \neq 0^{x}$, deberá existir un predecesor de $\underline{c}$, digamos $\underline{d}$, tal que $\underline{d} \neq 0^{x}$, $\underline{d} \neq 1^{x}$, ..., $\underline{c} \neq \Lambda^{*}$. Podemos aplicar el argumento a un predecesor de este predecesor y así sucesivamente. En consecuencia Fin^{x} no estará bien ordenado. Luego, Fin^{x} deberá constar sólo de los representativos de o, 1, ... Es más, como $0 \neq \Lambda$, $1 \neq \Lambda$, ... son teoremas en NF, el modelo que construyamos deberá ser un modelo para NF más el Axioma de Infinito: $V \notin Fin$. Mediante la adición del Axioma de Infinito a NF puede desarrollarse una teoría de ordinales. Siendo O^{x} en el modelo el representativo de la clase de los ordinales O en NF más el Axioma de Infinito, O^{x} no podrá estar bien ordenada, ya que ello supondría validar un teorema (véase Rosser-42) del que es derivable en NF más el Axioma de Infinito la paradoja de Burali-Forti. Luego, el modelo que construyamos para NF no será un modelo standard.

Con todo, creo haber demostrado que puede haber un modelo booleano (Boolean valued model) para NF. La ocurrencia en tal modelo de una función de buena ordenación viene impedida por el filtro que manejo en su construcción. Entonces, un corolario obvio - del que me ocuparé en otro lugar - es la refutación del Axioma de Elección. Tal vez ello implique un sacrificio demasiado grande.

Paso a exponer mi prueba, aunque previamente será interesante resumir de modo breve el sistema NF y algunas nociones sobre espacios topológicos y álgebras booleanas, que son la base de aquella.

1. EL SISTEMA DE 'NEW FOUNDATIONS' consta de un principio:

P.1. $((x \subset y) \supset ((y \subset x) \supset (x = y)))$, tres reglas que especifican conjuntos de fórmulas a considerar como teoremas iniciales:

R. 1. $((\varphi|(\psi|\chi))|((\omega\supset\omega)|((\omega|\psi)\supset(\varphi|\omega))))$ es un teorema;

R. 2. Si ψ es igual que φ excepto en que β aparece en ψ como variable libre en todos los lugares en que α aparece en φ como variable libre, entonces $((\alpha)\varphi\supset\psi)$ es un teorema;

R. 3'. Si φ es estratificada y no contiene x, $(\exists x)(y)((y\in x)\equiv\varphi)$ es un teorema;

y dos reglas que especifican conexiones de inferencia

R. 4. Si φ y $(\varphi|(\psi|\chi))$ son teoremas, χ es teorema;

R. 5. Si $(\varphi\supset\psi)$ es un teorema, y si α no es una variable libre de φ entonces $(\varphi\supset(\alpha)\psi)$ es un teorema.

De todas estas reglas interesa destacar R. 3'. La estratificación establecida por la teoría de los tipos de Russell se limita expresamente a fórmulas dependientes de R. 3', conservándose en los otros casos fórmulas sin estratificar. Con ello se eliminan las consecuencias "innaturales" e "incómodas" de la teoría de los tipos russelliana, ante todo la de que las clases universal y vacía den lugar a una serie infinita de clases universales y vacías, el álgebra booleana no se aplique a clases en general, ... ya que tal teoría obliga a que cada clase tenga sólo miembros de un tipo.

2. ESPACIOS TOPOLOGICOS

NOTACION

(signo)	(operación)
$'$	complementación
$\wedge$	intersección
$\vee$	unión
$\rightarrow$	implicación
$\Leftrightarrow$	coimplicación
$\prod$	multiplicación
$\sum$	suma

Definición 1. X es un espacio topológico discreto, si, y sólo si, X es un conjunto no-vacío de puntos(abstractos) y es definida una topología t sobre X por una familia O de subconjuntos de X, tal que $O = \wp(X)$,
(donde $\wp(X)$ denota conjunto potencia de X).

Definición 2. Una topología t es definida sobre un conjunto no-vacío de puntos abstractos X por una familia de subconjuntos O de X, si se satisfacen los axiomas siguientes:
A.1.1. $\emptyset \in O$ A.1.2. $X \in O$
A.2. Si $B_1 \in O$ y $B_2 \in O$, entonces $B_1 \wedge B_2 \in O$
A.3. Si B_i, para todo $i \in I$, pertenece a O,

$$\left\{ \sum_{i \in I} B_i \right\} \in O$$

Definición 3. B es un conjunto base de un espacio topológico X si, y sólo si, $B \subseteq X$.

Definición 4. P es un conjunto abierto si, y sólo si, $P \in O$

Teorema 1. Si B es un conjunto base, B es un conjunto abierto.
PRUEBA. Por Definición 3, si B es un conjunto base, entonces $B \subseteq X$, y como O es $\wp(X)$, entonces $B \in O$.

Teorema 2. $\emptyset$ es un conjunto abierto
PRUEBA. Obvia por A.1.1.

Teorema 3. X es un cpnjunto abierto
PRUEBA. Obvia por A.1.2.

Definición 5. P' es el complemento de P.

Definición 6. P es cerrado, si, y sólo si, P=Q' y Q es abierto.

Definición 7. P^- es el cierre de P, si y sólo si, P^- es el conjunto de todos los puntos x tal que cada conjunto base que contiene x contiene también un punto de P.

Teorema 4. Si $P \subseteq X$, entonces $P \subseteq P^-$.
PRUEBA. Obvia.

Teorema 5. P es cerrado, si, y sólo si, $P = P^-$
PRUEBA. Tenemos probado por Teorema 4 que $P \subseteq P^-$. Falta probar que $P^- \subseteq P$ o, por Definición 5, $P' \subseteq P^{-\prime}$. Por Definición 6 y por supuesto(P es cerrado) tenemos que P' es abierto. Luego para todo $x \in P'$, $x \notin P^-$; de modo que $x \in P^{-\prime}$.

Definición 8. (1) Denotamos $P^{-\prime}$ por $P^{\perp}$
(2) Denotamos $P^{-\prime-\prime}$ por $P^{\perp\perp}$

Definición 9. P es regular, si, y sólo si, $P = P^{\perp\perp}$

Ahora sea $X = \{0, 1\}^I$, $I = \omega \times \omega$, i. e. todo punto x de X es una función definida sobre I que toma valores en $\{0, 1\}$. Formalmente $x(i, j) = 0$ ó 1, para $i, j \in \omega$.

Definición 10. $B^n_{i,j}$ es un conjunto subbase de X si, y sólo si

$$B^n_{i,j} = \{x \in X : x(i, j) = n\}$$

para n=0 ó 1.

Y redefinimos conjunto base de X como

Definición 11. B es un conjunto base de X, si, y sólo si, $B \subseteq X$ y

$$B = \bigcap_{1 \leq i, j \leq N} B^n_{i,j}$$

siendo N un entero positivo.

Si consideramos que $n = g(i, j)$, entonces

Definición 12. El conjunto

$$\{ i, j : \langle i, j \rangle \in S \}$$

será denominado el soporte de un conjunto

$$\prod_{1 \leq i, j \leq N} \{ B_{i,j}^{g(i,j)} : \langle i, j \rangle \in S \} .$$

De modo que podemos dar una nueva y definitiva definición para conjunto base:

Definición 13. B es un conjunto base, si y sólo si,

$$B = \prod_{\langle i, j \rangle \in S} B_{i,j}^{g(i,j)}$$

para S finito.

Definición 14. R es una cota superior de un conjunto de elementos, si $P \leq R$ para cada P de dicho conjunto.

Definición 15. T es el supremo de un conjunto de elementos, si, y sólo si, T es una cota superior de dicho conjunto y es menor o igual que cualquier cota superior del mismo.

De donde seddesprende facilmente

Definición 16. T es el supremo de un conjunto de elementos P_i, $i \in I$, si, y sólo si

$$T = \sum_{i \in I} P_i .$$

A su vez el ínfimo de un conjunto de elementos P_i, $i \in I$, se definirá como sigue:

Definición 17. M es el ínfimo de un conjunto de elementos P_i para $i \in I$, si y sólo si

$$M = \prod_{i \in I} P_i = (\sum_{i \in I} P_i')'$$

Definición 18. A es un álgebra S-booleana, si, y sólo si, es un conjunto de conjuntos regulares, abiertos y con ínfimo, de un espacio topológico no-vacío $X=\{0,1\}^I$, $I=\omega\times\omega$, con

(1) $0=\emptyset$
(2) $1=X$
(3) $P\wedge Q=P\cap Q$
(4) $P\vee Q=(P\cup Q)^{\perp\perp}$
(5) $P'=P^{\perp}$

y se satisfacen:

Teorema 6.

(6)(a) $0'=1$	(b) $1'=0$
(7)(a) $P\wedge 0=0$	(b) $P\vee 1=1$
(8)(a) $P\wedge 1=P$	(b) $P\vee 0=P$
(9)(a) $P\wedge P'=0$	(b) $P\vee P'=1$
(10) $P''=P$	
(11)(a) $P\wedge P=P$	(b) $P\vee P=P$
(12)(a) $(P\wedge Q)'=P'\vee Q'$	(b) $(P\vee Q)'=P'\wedge Q'$
(13)(a) $P\wedge Q=Q\wedge P$	(b) $P\vee Q=Q\vee P$
(14)(a) $P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R$	(b) $P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R$
(15)(a) $P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	
(b) $P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	

Las pruebas son obvias.

Lema 1. $P\vee(P\wedge Q)=P$
PRUEBA. $P\vee(P\wedge Q)=(P\wedge 1)\vee(P\wedge Q)$, por Teorema 6 (8)(a). $(P\wedge 1)\vee(P\wedge Q)=(P\vee P)\wedge(1\vee Q)$, por Teorema 6(15)(b), e $=P\wedge 1$, por Teorema 6(11)(b) y (7)(b), e $=P$, por Teorema 6 (8)(a).

Lema 2. $P\wedge(P\vee Q)=P$
PRUEBA. Obvia.

Lema 3. $(P \wedge Q') \vee Q = P \vee Q$
PRUEBA. $(P \wedge Q') \vee Q = (P \vee Q) \wedge (Q' \vee Q)$, por Teorema 6(15)(b). $(P \vee Q) \wedge (Q' \vee Q) = (P \vee Q) \wedge 1$, por Teorema 6(9)(b). $(P \vee Q) \wedge 1 = P \vee Q$, por Teorema 6(8)(a).

Lema 4. $(P \vee Q') \wedge Q = P \wedge Q$
PRUEBA. Obvia.

Lema 5. $(P \wedge Q) = P$, si, y sólo si, $(P \vee Q) = Q$
PRUEBA. Si $(P \wedge Q) = P$, entonces $(P \wedge Q) \vee Q = (P \vee Q)$; de modo que por Lema 1, $Q = (P \vee Q)$. A la inversa, si $(P \vee Q) = Q$, entonces $P \wedge (P \vee Q) = (P \wedge Q)$; de modo que, por Lema 2, $P = (P \wedge Q)$.

Definición 19. (1) $P \rightarrow Q$, si, y sólo si, $P' \vee Q$
(2) $P \Leftrightarrow Q$, si, y sólo si, $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
(3) $P \leq Q$, si, y sólo si, $(P \wedge Q) = P$

Lema 6. (1) $P \leq P$
(2) $P \leq Q \wedge Q \leq P \rightarrow P = Q$
(3) $P \leq Q \wedge Q \leq R \rightarrow P \leq R$
(4)(a) $0 \leq P$ (b) $P \leq 1$
(5) $P \leq Q \rightarrow P \wedge R \leq Q \wedge R$
(6) $P \leq Q \rightarrow P \vee R \leq Q \vee R$
(7)(a) $P \wedge Q \leq P$ (b) $P \leq P \vee Q$
(8) $P \leq Q$, si, y sólo si, $Q' \leq P'$
(9) $P \leq Q$, si, y sólo si, $(P \rightarrow Q) = 1$
(10) $P = Q$, si, y sólo si, $(P \Leftrightarrow Q) = 1$
PRUEBA. Obvia.

Definición 20. J es un automorfismo de un álgebra S-booleana A si, y sólo si, J es una aplicación biyectiva de A sobre sí misma y para cualesquiera conjuntos P, Q de A se satisface:
(1) $J(P \wedge Q) = J(P) \wedge J(Q)$
(2) $J(P \vee Q) = J(P) \vee J(Q)$
(3) $J(P') = (J(P))'$

Teorema 7. Si J es un automorfismo

(1) $J(0)=0$

(2) $J(1)=1$

PRUEBA. $J(0)=J(P \wedge P')$, por Teorema 6(9)(a). $J(P \wedge P')=J(P) \wedge J(P')$, por Definición 20(1). $J(P) \wedge J(P')=J(P) \wedge (J(P))'$, por Definición 20(3). Por tanto, $J(0)=0$, por Teorema 6(9)(a). La prueba de (2) discurre paralela.

Teorema 8. Si J es un automorfismo y si $P, Q \in A$, entonces

(1) $J(P \rightarrow Q)=J(P) \rightarrow J(Q)$

(2) $J(P \Leftrightarrow Q)=J(P) \Leftrightarrow J(Q)$

(3) $P \leq Q$, si, y sólo si, $J(P) \leq J(Q)$

PRUEBA. Obvia a partir de Definición 19.

Teorema 9. Si J es un automorfismo y si $P_i \in A$, entonces

(1) $J(\sum_{i \in I} P_i)= \sum_{i \in I} J(P_i)$

(2) $J(\prod_{i \in I} P_i)= \prod_{i \in I} J(P_i)$

Prueba Obvia a partir de Teorema 8(3), ya que en él se establece que la propiedad se ser supremo o ínfimo se preserv bajo J.

Teorema 10.

(1) J^{-1} es un automorfismo

(2) $J_1 J_2$ es un automorfismo

(donde J^{-1} es el 'inverso' del automorfismo J; y $J_1 J_2$ es el 'producto' de los automorfismos J_1 y J_2).

PRUEBA. Obvia.

Definición 21. F es un filtro de los subgrupos K_i, de un grupo G de automorfismos J_i, si, y sólo si,

(1) $G \in F$

(2) $K_1 \in F$ y $K_2 \in F$, entonces $K_1 \wedge K_2 \in F$

(3) $K_1 \in F$ y $K_1 \subseteq K_2$, entonces $K_2 \in F$.

3. UN MODELO BOOLEANO PARA NF

Sólo R. 3'. puede causar problemas en el modelo booleano que construyo.

Unas cuantas palabras previas sobre la noción vulgar de modelo booleano.

Se entiende por modelo booleano, p. ej. $\mathfrak{M}$, una estructura $\langle V, \in, =, f \rangle$ tal que

(1) $V \neq \emptyset$

(2) $\in$ e $=$ son los predicados especiales

(3) $f(A) \in B^{V^n}$, donde A es un predicado n-ádico. y B^{V^n} es el conjunto de las imágenes de V en un álgebra S-booleana B.

Siendo V el universo de objetos $\underline{a}, \underline{b}, \ldots$, por (3) obtenemos una evaluación de los predicados del modelo en el álgebra S-booleana. Dicho groseramente, a cada par de elementos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ de V se les especifica (cosa que, desde luego, se hará de modo correcto una vez se haya completado la definición de V) elementos P y Q del álgebra S-booleana; y se hace lo mismo con $\underline{a} \in \underline{b}$ y $\underline{a} = \underline{b}$: son estos elementos los denominados "valores booleanos" de $\underline{a} \in \underline{b}$ y $\underline{a} = \underline{b}$, respectivamente.

Denotaremos mediante $/\ldots/$ el valor booleano de...

Usando para el modelo:

(1) la misma notación lógica de NF: $\sim, ., \vee, \supset, \equiv, (\exists \alpha), (\alpha)$;

(2) la notación conjuntista de Bernays-Fraenkel-58;

(3) las letras metalingüísticas x, y, ... para objetos del modelo;

podemos introducir las evaluaciones siguientes:

$$/\sim X/ = /X/'$$

$$/X \,.\, Y/ = /X/ \wedge /Y/$$

$$/X \vee Y/ = /X/ \vee /Y/$$

$$/X \supset Y/ = /X/ \rightarrow /Y/$$
$$/X \equiv Y/ = /X/ \Leftrightarrow /Y/$$
$$/(x)\varphi/ = \prod_{a \in V} /\varphi/$$
$$/(\exists x)\varphi/ = \sum_{a \in V} /\varphi/$$

donde X e Y son letras metalingüísticas para fórmulas.

Diremos que una fórmula de NF será válida cuando su relativizada al modelo tenga el valor bbooleano 1, y será falsa cuando su relativizada al modelo tenga el valor booleano 0.

Comenzamos ahora los desarrollos formales.

DEFINICION 22. Una función rank sobre un objeto del modelo, digamos $\underline{a}$, es una función, denotada r, cuyo dominio es $\underline{a}$ y cuyos valores son números ordinales, tal que

$$r(\underline{a}) = \text{supremo}\{r(\underline{b}) : \underline{b} \in \underline{a}\}.$$

En cuanto a $/\underline{a} \in \underline{b}/$ damos dos definiciones:

DEFINICION 23. $/\underline{a} \in \underline{b}/ = \underline{b}(\underline{a})$, si $r(\underline{a}) < r(\underline{b})$, siendo $\underline{b}(\underline{a}) = 1$, si $\underline{a} \in \underline{b}$, o $\underline{b}(\underline{a}) = 0$, si $\underline{a} \notin \underline{b}$.

DEFINICION 24. $/\underline{a} \in \underline{b}/ = \sum_{x \in D(\underline{b})} /x \in \underline{b} \,.\, \underline{a} = x/$, si $r(\underline{a}) \geq r(\underline{b})$ y no ocurre que $r(\underline{a}) = r(\underline{b}) = 0$,

(donde D denota dominio.)

DEFINICION 25. $/\underline{a} = \underline{b}/ = \left\{\prod_{x \in D(\underline{a})} /x \in \underline{a} \supset x \in \underline{b}/\right\} \wedge \left\{\prod_{x \in D(\underline{b})} /x \in \underline{b} \supset x \in \underline{a}/\right\}$.

Pasamos a demostrar que R. 3'. vale en el modelo booleano cuyas bases han sido puestas.

Definamos por inducción sobre ordinales $\alpha, \beta, \ldots$ subuniversos $V_\alpha, V_\beta, \ldots$ de V; de modo que

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_1 = \{\emptyset\}$$

$V_\alpha = \cup \{V_\beta : \beta < \alpha\}$, siendo α un límite ordinal;

$V_\alpha \leq V_\beta$, si $\alpha \leq \beta$

$V = \cup \{V_\gamma : Od(\gamma)\}$, donde $Od(\gamma)$ denota γ es un ordinal.

En general $V_{\alpha+1}$ resultará de adicionar a su antecesor inmediato V_α funciones a (A partir de Definición 23-24 se observa que 'clase' en NF es modificada en el modelo como una función, que tiene como valores elementos del álgebra S-booleana), que tengan al propio V_α de dominio y a un subconjunto de los elementos del álgebra S-booleana de rango.

Ahora bien, no toda función a don $D(a) = V_\alpha$ puede ser adicionada a V_α para producir $V_{\alpha+1}$. En efecto, cada función a a adicionar a V_α para obtener $V_{\alpha+1}$ ha de ser tal que

(1) satisfaga la condición de extensionalidad: si $x, y \in D(a)$, entonces $a(x) \wedge /x=y/ \leq a(y)$; lo que permite validar facilmente para $V_{\alpha+1}$ la ley de identidad

$$a=b \,.\, b \in c \,.\supset .\, a \in c$$

o su variante

$$b \in c \,.\, a=b \,.\supset .\, a \in c,$$

de empleo frecuente en nuestra prueba;

(2) si $J_1, \ldots, J_n$ son automorfismos, G es un grupo de los mismos y F es un filtro de subgrupos de G, entonces a debe satisfacer la condición

(C) $\{J : J \in G \,.\, /J(a)=a/=1\} \in F$.

Tal condición se establece para eliminar una función a de buena ordenación en nuestro modelo, a menos que F sea un filtro de todos los subgrupos de G. El motivo de establecer una condición tal queda aclarado por lo dicho en la introducción.

En particular, F debe constar de todo subgrupo, digamos K, de G tal que K incluya algún subgrupo G_S que conste de todos los automorfismos que dejen fijo todo conjunto base de un espacio topológico

$$X=\{0,1\}^I \quad ,\text{para } I=\{\langle i,j\rangle : i,j\in\omega\},$$

si y sólo si $j\in S$ y $S\subseteq\omega$, siendo S el soporte de los conjuntos bases de la forma

$$\prod_{\langle i,j\rangle\in I} B^n_{i,j} \quad ,\text{para } n=0 \text{ ó } 1.$$

Aclaremos lo dicho y demostremos que no puede haber funciones a tales de buena ordenación para nuestro modelo.

El espacio topológico del álgebra S-booleana es, según vimos:

$$X=\{0,1\}^I$$

e $I=\omega\times\omega$ y entonces como puntos x de X tomábamos las funciones $x(i,j)=0$ ó 1, para $i,j\in\omega$ y definíamos los conjuntos subbases por

$$B^n_{i,j}=\{x:\ x(i,j)=n\}$$

para $\langle i,j\rangle\in I$ y $n=0$ ó 1, y los conjuntos bases por

$$B=\prod_{1\leq i,j\leq N} B^n_{i,j}$$

siendo N un entero positivo . Si $g(i,j)=n$ y S es el soporte de tales conjuntos bases, i. e.

$$\prod_{\langle i,j\rangle\in S} B^{g(i,j)}_{i,j}$$

entonces definíamos los conjuntos bases como productos novacíos de la forma anterior, siendo S finito.

Sea ahora G el conjunto de productos finitos tal que cada uno de sus factores es un automorfismo inducido en el álgebra S-booleana por intercambiar

$$B^n_{i,j} \text{ con } B^n_{i,k},$$

para específicos j y k, y para todo i y n. Entonces, para $S\subseteq\omega$, sea G_S un subgrupo de G que conste de todos los automorfismos que dejan $B^n_{i,j}$ fijo , si y sólo si $j\in S$. F constará , entonces, de todo subgrupo , por ejemplo K, de G que incluya algún G_S para S finito. Luego, K será un miembro de F sólo si hay un número finito de subíndices j para los que $B^n_{i,j}$ esté fijo bajo todo automorfismo de K.

Por la condición (C), todo $\underline{a}$ a ser adicionado a V_α para producir $V_{\alpha+1}$ ha de ser tal que $G_S \subseteq G_a$, luego debe haber un número finito de subíndices j para los que $B^n_{i,j}$ esté fijo bajo todo automorfismo que lleve $\underline{a}$ sobre sí misma.

Sea Fin^x en el modelo el representativo de Fin en NF. Denominemos ω a Fin en NF, y definamos un conjunto de subconjuntos bases b_j de Fin^x para $j \in \omega$, tal que b_j y b_k estén intercambiados por el automorfismo inducido por intercambiar $B^n_{i,j}$ con $B^n_{i,k}$ para todo i y n.

Supongamos que hay una función $\underline{a}$ de buena ordenación para nuestro modelo. Sabemos que

(1) $G_S \subseteq G_a$

(2) hay un número finito de subíndices j tales que $j \in \omega$ y $j \in S$; luego,

(3) hay un número infinito de subíndices j ta-- que $j \in \omega$ y $j \notin S$,

entonces $\underline{a}$ bien-ordena los b_j para $j \in \omega$ y $j \notin S$: debe escoger un primer y segundo b_j, digamos b_{j1} y b_{j2}. Ya que $j1 \notin S$ y $j2 \notin S$, entonces hay un automorfismo en G_S que intercambia b_{j1} con b_{j2}. Ahora, ya que (1), el automorfismo en cuestión deja $\underline{a}$ incambiado por la condición (C), y, como han sido intercambiados b_{j1} con b_{j2} $\underline{a}$ debe escoger primero b_{j2} y luego b_{j1}, lo que contradice nuestra selección inicial.

Denotemos mediante F^x un filtro de tales características.

Sea ahora φ una propiedad dada, tal que $\varphi(\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ para $\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in V$, sea una fórmula de NF constituida a partir de $\in$, =, $\sim$, . y cuantores, y determine un elemento del álgebra S-booleana, a saber $/\varphi(\underline{a}, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$.

Estén $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ en V y definamos

$$\underline{a}(x)=/\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)/$$

con $D(a)=V_\alpha$.

Entonces R. 3'. adopta la forma

$$(\exists \underline{a})(x)(x\in\underline{a}\equiv\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)).$$

Debemos probar ahora que

(1) $\underline{a}$ pertenece a $V_{\alpha+1}$, al ser su dominio V_α, con lo que damos cuenta de la estratificación;

(2) $(x)(x\in\underline{a}\equiv\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n))$.

PRUEBA DE (1). Para probar que $\underline{a}\in V_{\alpha+1}$ hemos de demostrar, según argumentaciones anteriores, que

(1.1.) $\underline{a}$ es extensional; y

(1.2.) se satisface la condición

$$\{J : J\in G\ .\ /J(a)=a/=1\}\in F^x .$$

Prueba de (1.1.). Aceptemos como teorema, fácil de validar, en nuestro modelo $(x)(y)(x=y.\supset.\varphi(x)\equiv\varphi(y))$. Denotemos mediante $\Phi(x)$ el elemento del álgebra S-booleana determinado por la satisfacción por parte de x de propiedades más generales que la propia φ. Sea $\underline{a}(x)=\Phi(x)$ y $\Phi(x)=/\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)/$. Entonces, empleando el teorema mentado arriba, Φ es extensional y, por tanto, $\underline{a}$ es extensional.

Prueba de (1.2.). Dado el caracter de F^x, sea $\underline{a}_i\in V$, $1\le i\le n$. Si $G_{\underline{a}_i}=\{J : J\in G\ .\ /J(\underline{a}_i)=\underline{a}_i/=1\}$, entonces $G_{\underline{a}_i}\in F^x$, $1\le i\le n$, $J\in G_{\underline{a}_i}$, $/J(\underline{a}_i)=\underline{a}_i/=1$, y, por Definición 21 (2), $G_{\underline{a}_i}\cap\dots\cap G_{\underline{a}_n}\in F^x$.

Ahora debemos probar que $G_{\underline{a}_i}\cap\dots\cap G_{\underline{a}_n}\subseteq G_a$, de modo que por Definición 21 (3), ya que $G_{\underline{a}_i}\cap\dots\cap G_{\underline{a}_n}\in F^x$, $G_{\underline{a}}\in F^x$.

Sea $x\in V$; entonces ya que $/J(\underline{a}_i)=\underline{a}_i/$, dada una φ, $/\varphi(x,\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n)/\Leftrightarrow/\varphi(\underline{a},J(\underline{a}_1),\dots,J(\underline{a}_n))/$, y por Lema 6(10), $/\varphi(x,\underline{a}_1,$

$\ldots, \underline{a}_n)/ = /\varphi(x, J(\underline{a}_1), \ldots, J(\underline{a}_n))/$. Sea $\underline{a}(x) = /\varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$; entonces $\underline{a}(x) = /\varphi(x, J(\underline{a}_1), \ldots, J(\underline{a}_n))/$ y, en cuanto que el inverso de un automorfismo es un automorfismo (por Teorema 10(1)) tenemos que $\underline{a}(x) = /\varphi(J(J^{-1}(x)), J(\underline{a}_1), \ldots, J(\underline{a}_n))/$ y, obviamente, $\underline{a}(x) = J/\varphi(J^{-1}(x), \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$. Ahora bien, $/\varphi(J^{-1}(x), \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/ = \underline{a}(J^{-1}(x))$; luego, $\underline{a}(x) = J(\underline{a}(J^{-1}(x))) = J(\underline{a})J(J^{-1}(x)) = J(\underline{a})(x)$, de modo que $\underline{a}$ y $J(\underline{a})$ son funciones idénticas.

Entonces, ya que es facilmente verificable en $V_{\alpha+1}$ la validez de $/\underline{a}=\underline{a}/$, $/J(\underline{a})=\underline{a}/=1$ y $G_{\underline{a}} = \{J : J \in G \,.\, /J(\underline{a})=\underline{a}/=1\}$; luego, $J \in G_{\underline{a}}$ y, ya que $J \in G_{\underline{a}_i} \cap \ldots \cap G_{\underline{a}_n}$, entonces $G_{\underline{a}_i} \cap \ldots \cap G_{\underline{a}_n} \subseteq G_{\underline{a}}$, con lo que tenemos demostrado que $G_{\underline{a}} \in F^x$ y, por tanto, $\underline{a} \in V_{\alpha+1}$.

PRUEBA DE (2.).

<u>Prueba de (2. 1.)</u>. $(x)(x \in \underline{a} . \supset . \varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n))$.

Hemos definido arriba $\underline{a}(x) = /\varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$, siendo $D(\underline{a}) = V_\alpha$. Sea $x \in D(\underline{a})$, $\underline{a}(x) = \varphi(x)$ y φ extensional, i. e. $\varphi(x) \wedge /x=\underline{b}/ \leq \varphi(\underline{b})$. Ahora, sumando sobre x, tenemos $\sum_{x \in D(\underline{a})} /x \in \underline{a} \,.\, x=\underline{b}/ \leq \varphi(\underline{b})$; luego $/\underline{b} \in \underline{a}/ \leq \varphi(\underline{b})$.

Por lo dicho arriba, $\underline{a}(x) = \varphi(x)$; luego, $/x \in \underline{a}/ \leq \varphi(x)$, por lo acabado de demostrar, y $/x \in \underline{a}/ \leq \underline{a}(x)$. Pero $\underline{a}(x) = /\varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$; luego, $/x \in \underline{a}/ \leq /\varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/$ y, por Lema 6 (9), $/x \in \underline{a} \supset (x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/=1$, y multiplicando sobre x,

$$\prod_{x \in D(\underline{a})} /x \in \underline{a} \supset (x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)/,$$

que es lo que había de demostrarse.

<u>Prueba de (2. 2.)</u>. $(x)(\varphi(x, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) . \supset . x \in \underline{a})$

Sea ahora $\underline{a}(y)=/\varphi(y,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)/$, siendo como antes $D(\underline{a})=V_\alpha$. Sea $y\in D(\underline{a})$ y $\underline{a}$ extensional, i. e. $\underline{a}(y)\wedge/y=x/\leq\underline{a}(x)$. Entonces, $/\varphi(y,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n).\ y=x/\leq\underline{a}(x)$. Ya que φ, como arriba establecíamos, es extensional, entonces $/\varphi(y,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n).\ x=y/\leq/\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)/$; luego, $/\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)/\leq\underline{a}(x)$; luego, $/\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)/\leq/x\in\underline{a}/$, y, por Lema 6 (9), $/\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)\supset x\in\underline{a}/=1$, y, multiplicando sobre x,

$$\prod_{x\in D(\underline{a})}/\varphi(x,\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)\supset x\in\underline{a}/,$$

queu es lo que había de demostrarse.

De la conjunción de los resultados obtenidos, resulta probado R. 3'.

BIBLIOGRAFIA

Bernays, P., y Fraenkel, A. A. Axiomatic Set Theory. Amsterdam: North-Holland, 1958

Hailperin 'A set of axioms of logic', JSL, vol. 9(1944), págs. 1-19.

Quine, W. V. 'Nueva fundamentación de la lógica matemática' ('New Foundations for mathematical logic'), en Desde un punto de vista lógico. Barcelona: Ariel, 1962.

Rosser, J. B. 'On the consistency of Quine's New Foundations for mathematical logic', JSL, vol. 4(1939), págs. 15-24.

----------- 'The Burali-Forti paradox', JSL, vol. 7(1942), págs 1-17.

----------- 'The axiom of infinity in Quine's New Foundations JSL, vol. 17(1952), págs. 238-242.

----------- Simplified independence proofs. New York-Lon-

don:Academic Press,1969.
Rosser, J. B., y Wang, H. 'Non-standard models for formal logics', JSL, vol. 15(1950), págs. 115-129.
Wang, H. 'A formal system of logic', JSL, vol. 15(1950), págs. 25-32.

Universidad de Valencia