REDES DE AUTÓMATAS FINITOS

D. Rödding
Universidad de Münster

EN LO QUE SIGUE quisiera informar sobre una cuestión de la teoría de autómatas que fue examinada momentáneamente en el marco de una Tesis Doctoral en el Instituto Lógico de Münster. Con este fin trataremos determinados autómatas finitos del tipo de los autómatas Mealy, por lo cual, por motivos en los que entraré más tarde, se supone que las funciones de Tránsito y Output no siempre están definidas. En lo sucesivo representemos esos autómatas mediante las entradas $x_1, \ldots, x_m$, comprendidas en el conjunto de entradas χ, las salidas $y_1, \ldots, y_n$, comprendidas en el conjunto de salidas γ, los estados $a_1, \ldots, a_l$, que estén abarcados por el conjunto de estados α, la función de tránsito δ, explicada por el producto cartesiano $\alpha \times \chi$ de α y χ, con valores en γ, y la función de Salida λ, explicada por $\alpha \times \chi$ con valores en γ, por lo cual se presupone que, eventualmente, los valores δ (a, x) y λ (a, x) no están definidos simultáneamente para ciertos pares a, x de Estados a y de señales de Entrada x.

Quiero describir ahora cómo se podrán definir Redes de autómatas tales; para ello conviene hacer uso de una imagen "fisicalista" de los autómatas, según la cual sea posible establecer una conexión entre una salida y_j de un autómata A y una entrada x_i de un autómata B, eventualmente idéntico a A, conexión que determine el que una señal de entrada de A, que produzca en A la señal de salida y_j, sea

* Comunicación presentada en el Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Valencia, el día 4 de mayo de 1971.

transmitida a la entrada x_i del autómata B y produzca allí otra señal de salida. Si se establece un número finito de autómatas y, entre ellos, un número finito de conexiones del tipo acabado de describir, se tiene el concepto de Red aquí deseado.

Para precisar esta imagen, conviene definir inductivamente *Red*. A ese fin se parte de un número finito de autómatas $A_1, \ldots\ldots, A_n$. La clase de aquellos autómatas, que se denominarán "Redes sobre $A_1, \ldots\ldots, A_n$", se define ahora inductivamente del modo que sigue:

1) Cada uno de los autómatas $A_1, \ldots\ldots, A_n$ es una Red.

2) Si A', A'' son Redes y A' está determinada por el Tuplo $\alpha', \chi', \gamma', \delta', \lambda'$, y A'' lo está por $\alpha'', \chi'', \gamma'', \delta'', \lambda''$, entonces es una red $A' + A''$ ("Suma de A' y A''") que es el autómata A siguiente: χ es la unión (disjunta) de χ' y χ'', γ es la unión (disjunta) de γ' y γ'', α es el producto cartesiano de α' y α'', $\delta(<a', a''>, x)$ es $<\delta'(a', x), a''>$, si $x \in \chi'$, y $<a', \delta''(a'', x)>$, si $x \in \chi''$.

Mediante la suma de dos redes se describe evidentemente (en el sentido de nuestra exposición "fisicalista") el resultado que se obtiene al considerar a dichas redes juntas como una nueva red, sin establecer entre ellas conexión alguna adicional.

3) Si A' es una red, que está determinada por $\alpha', \chi', \gamma', \delta', \lambda'$, con

$$\chi' = \{x_1', \ldots, x'_m\}$$
$$\gamma' = \{y'_1, \ldots, y'_n\}$$

siendo $1 \leqq i \leqq m$ y $1 \leqq j \leqq n$, entonces se definirá para $\overline{A'}$, i y j un nuevo autómata $A_{i,j}$, que (en la representación "fisicalista" aceptada hace un momento) es el resultado de conectar la salida y_j con la entrada x_i. Representémoslo mediante α, χ, γ, δ, λ. Evidentemente $\alpha = \alpha'$

$$\chi = \chi' - \{x_i\}$$

y $\gamma = \gamma' - \{y_j\}$

La función de tránsito δ y la función Output λ coinciden con δ' y λ' respectivamente en su valor para un par $a \epsilon \alpha$, $x \epsilon \chi$, si λ' (a, x) no es y_j. En caso contrario se obtiene una secuencia de estados b_g mediante la definición

$$b_o = \delta' (a, x)$$
$$b_g + {}_1 = \delta' (b_g, x_i)$$

si $\lambda' (b_g, x_i) = y_j$

Esta secuencia se puede interrumpir en b_r, porque δ' ,b_r, x_i) no está definida; en este caso tampoco estará definida δ (a, x), y λ (a, x) puede quedar interrumpida en b_r, porque $\lambda' (b_r, x_i) \neq y_j$, pero para todo ${}_g < r : \lambda' (b_g, x_i) = y_j$. En este caso deberá ser

$$\delta (a, x) = \delta' (b_r, x_i) \quad , \lambda (a, x) = \lambda' (b_g, x_i)$$

Finalmente es posible que la secuencia no quede interrumpida en ningún caso; por lo tanto δ (a, x) y λ (a, x) no podrán definirse. Mediante esta construcción de δ, el efecto de una "conexión nueva" entre y_j y x_i en la red A′, que produzca la red A, puede describirse de manera adecuada así: una señal x, que en A′ hubiera producido la señal de salida y_j, es trasmitida a x_i en A "mediante retroacoplamiento" y comunicada de nuevo a A′, eventualmente, varias veces por la conexión de y_j a x_i, para, finalmente, abandonar A por una salida o pasar infinitas veces a A′; aquí se halla el motivo de por qué debe aceptarse que, en general, δ y λ no están definidos para ciertos pares de argumentos.

La clase de las redes, determinada inductivamente aquí, motiva una serie de cuestiones evidentes. Se dice de autómatas A y B que A es simulado mediante B, si A puede ser aplicado isomórficamente en B. Entonces podemos plantear acerca de un sistema de autómatas simples $A_1, \ldots\ldots, A_n$ la cuestión de si cualquier autómata finito puede ser simulado mediante una red sobre $A_1 \ldots\ldots, A_n$. Para discutir brevemente esta cuestión quisiera introducir unos autómatas especiales A_o, B_o, C_o y D_o: A_o tiene un conjunto de estados con un elemento, dos entradas y una salida; cualquier señal de entrada produce esta señal de salida. B_0 posee, además de un conjunto de estados con dos elementos, una entrada y dos salidas. Si se designan los estados con a_1, a_2 y las salidas con y_1, y_2, entonces una señal de entrada produce en el estado a_1 o a_2 el estado siguiente a_2 o a_1 y la señal de salida y_1 o y_2 respectivamente. C_0 tiene los dos estados a_1, a_2, entradas x_1, x_2 y salidas y_1, y_2. Los rangos de valores de la función de Tránsito o de Output se hallan representadas en las dos siguientes tablas:

δ	x_1	x_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	a_1

λ	x_1	x_2
a_1	y_1	y_2
a_2	y_2	y_2

La señal de entrada x_2 produce, por lo tanto, un cambio de estado y la señal de salida y_2, mientras que x_1 no altera el estado y la señal de salida resultante describe ese estado.

D_0 es, asimismo, un autómata con 2 estados, pero con 3 entradas y 4 salidas. Para él, δ y λ se explican mediante las dos funciones siguientes:

δ	x_1	x_2	x_3
a_1	a_1	a_1	a_2
a_2	a_1	a_2	a_2

λ	x_1	x_2	x_3
a_1	y_1	y_2	y_4
a_2	y_1	y_3	y_4

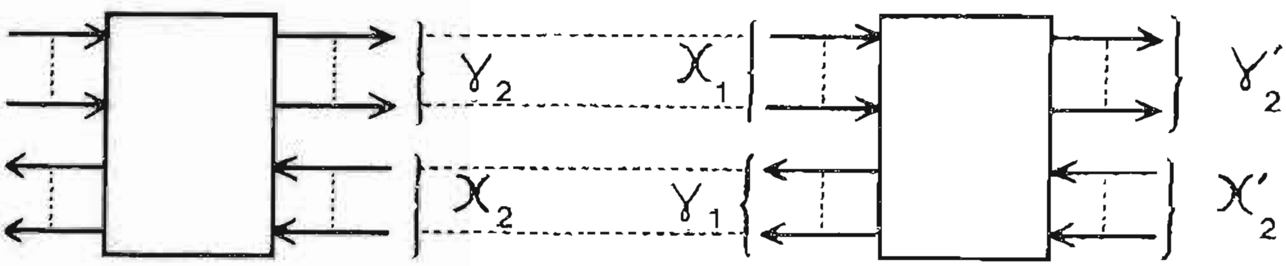
El autómata D_0 representa un cambio de tipo para la señal de entrada x_2, esto es, éstas abandonan D_0 por la salida y_2 o y_3 (sin alterar el estado), según ocurra el estado a_1 o a_2 respectivamente. Las entradas x_1 y x_3 sirven para producir los estados internos a_1 y a_2 respectivamente, por lo cual se usan siempre las salidas y_1 o y_4 respectivamente.

Nos planteamos ahora la cuestión de si se puede renunciar al autómata C_0, que es el más complicado en cuanto a los tres elementos. A este respecto se puede demostrar:

1) No todo autómata finito puede ser simulado mediante una red sobre A_0, B_0.

2) Todo autómata finito, que a lo sumo tenga dos salidas, puede ser simulado mediante una red sobre A_0, B_0, D_0, en la que sólo se usen tres ejemplares del autómata D_0.

Otra cuestión es la concerniente a la posibilidad de regular las "conexiones" entre los elementos particulares en redes del tipo aquí descrito; puede precisarse posiblemente esta conjetura del modo siguiente: Considérese un autómata A, representado mediante α, χ, δ, λ, cuyos conjuntos de entradas y de salidas se encuentran divididos en dos conjuntos en cada caso disjuntos: $\chi = \chi_1 \cup \chi_2$ $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$; $\chi_1 \cap \chi_2 = \emptyset$; $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. De modo correspondiente, defínanse χ', γ', χ'_1, χ'_2 γ'_1 γ'_2 para un autómata A'. Además, establézcase una relación biunívoca de los elementos de γ_2 y χ'_1 y, asimismo, de los elementos de χ_2 y γ'_1. Esta relación sugiere una red, formada a partir de A y A' mediante la conexión de las salidas de γ_2 con las entradas de χ'_1 y de las salidas de γ'_1 con las entradas de χ_2. Ilustrado gráficamente:



Denominamos a la red resultante el "Encadenamiento de A y A'", obteniendo así una operación asociativa con dos elementos en el dominio de las redes, mediante la cual se pueden construir autómatas más complicados a partir de autómatas sencillos. Puede replantearse ahora la cuestión acerca de una base de autómatas simples $A_1, \ldots\ldots, A_n$, a partir de los cuales se puedan construir redes mediante encadenamiento, redes que pueden simular a cualquier autómata finito (de un número de entradas y de salidas apropiado). Para precisar esta cuestión es conveniente suponer que los subconjuntos de los conjuntos de entradas y de salidas, puestos en conexión por el encadenamiento, tienen todos igual potencia, por ejemplo r. Un autómata de tal índole tiene, por lo tanto, 2r entradas y 2r salidas. Para $r \geqslant 2$ hay una base finita de tal índole, y para $r = 3$ hay una base finita, en la que cualquier autómata tiene, a lo sumo, 4 estados.

En este contexto quisiera mencionar un problema que en su día fue el punto de partida para estas investigaciones: ¿Cómo debe estar construido un autómata (inicial) A, para que cualquier función recursiva pueda ser computada en una cadena de ejemplares de dicho autómata? Para ello se supone que la longitud de la cadena de autómatas está ajustada al cálculo que se gasta en la computación del valor de la función para un argumento concreto, y que la cadena de autómatas está programada para la computación mediante secuencias de Input apropiadas. Naturalmente, esta cuestión está íntimamente ligada al problema de la construcción de máquinas de Turing universales, lo más simples posibles. En cualquier caso nuestra conjetura de teoría de autómatas no ha conducido hasta ahora a resultados que sean lo suficientemente atractivos como para ser expuestos en detalle.

Quisiera hablar todavía de otra cuestión que surge al considerar estas redes desde un punto de vista más teórico. Esta cuestión, formulada sin rigor, dice así: ¿Cuál es el grado de complicación de una teoría de redes de autómatas finitos? Para precisarla se puede considerar, p. ej., un lenguaje lógico en el que haya variables para autómatas, un símbolo operacional diádico para el encadenamiento de dos autómatas y un símbolo relacional diádico con cuya ayuda deba ser descrita cualquier relación que exista entre dos autómatas A y B, si A es simulado mediante B. Pueden admitirse luego constantes para un número finito de autómatas (por ejemplo los autómatas de una base finita en el sentido arriba adoptado) y como medio de expresión los conectores de la Lógica de Enunciados y los quantificadores de la Lógica de Predicados de primer grado. Se obtiene así una clase bien determinada de enunciados de teoría de autómatas, y la cuestión de la complejidad, establecida hace un momento, puede precisarse ahora del modo que sigue: ¿La teoría dada mediante este lenguaje es decidible? Con una modificación insignificante de los conceptos fundamentales lingüísticos, en la que no quiero entrar aquí, se obtiene: La teoría resultante es indecidible.

Este resultado puede precisarse del modo siguiente: Si se codifican de un modo sencillo de explicar los autómatas finitos iniciales mediante números naturales, entonces aquellas expresiones del lenguaje formal dado que contengan variables libres representarán al mismo tiempo predicados de teoría de números en virtud de la codificación. De donde se sigue que los llamados predicados aritméticos de teoría de números son representados con exactitud.

Versión castellana de J. SANMARTÍN