UN ASPECTO NATURAL DE LA DEDUCCIÓN NATURAL

Rafael Beneyto
Departamento de Lógica
Universidad de Valencia

1. Introducción

Desde que Gentzen, [1] alrededor de los años 30, presentara su sistema lógico, la Deducción Natural se ha ido imponiendo progresivamente como modo usual de la argumentación simbólica. En gran medida ello se debe al carácter menos sofisticado, frente a los sistemas axiomáticos, de los sistemas de deducción natural. Menos sofisticado en el sentido de que los procesos de demostración se asemejan mucho a los procesos tradicionalmente empleados en las demostraciones matemáticas: en éstas no se parte de principios, sino de supuestos que ulteriormente se incorporan a las tesis matemáticas o se destruyen por dar lugar a contradicciones.

Incluso un aspecto del sistema de Gentzen, que el propio Gentzen considera extraño al razonamiento natural —concretamente, la forma arbórea de las demostraciones—, ha sido eliminado en elaboraciones posteriores de dicho sistema, en las que las argumentaciones proceden, como el pensamiento mismo, linealmente. [2]

Pero hay otro sentido en el que el sistema de Gentzen (y afines) es natural. Tal sentido ha sido, en ocasiones, aireado, pero no enteramente justificado. Suele decirse, y con razón,

[1] G. Gentzen: "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift,* vol. 39 (1934), pp. 176-210. Existe una versión francesa con comentarios de R. Feys y J. Ladrière: *Recherches sur la Déduction Logique* (París: P.U.F., 1955).

[2] Cf., por ejemplo, M. Garrido: *Lógica Simbólica* (Madrid: Tecnos, 1974).

que las reglas de la Deducción Natural se ajustan al significado de los signos lógicos. Pero cuando se habla de dicho significado se dice, también, que éste lo establecen las reglas en cuestión. ¿Se quiere con ello decir que las reglas se ajustan al significado de los signos lógicos porque su significado lo establecen aquéllas? De no ser así ¿en qué forma las reglas de la Deducción Natural responden a lo que significan las constantes de las cuales son reglas?

En la presente comunicación, es mi propósito mostrar en qué medida esto es cierto en lo que respecta a las reglas del cálculo de predicados.

Dos serán los puntos clave sobre los que se apoya mi discusión. En primer lugar, y lo que es más elemental, las definiciones de los cuantores justifican manifiestamente el uso de algunas de las reglas conocidas de dicho cálculo. En segundo lugar, y lo que es más fundamental, la definición del cuantor existencial justifica el uso de una regla especial, nueva en la lógica, con cuyo concurso es posible presentar como derivada la usual regla de introducción del cuantor universal —ausente en el primer grupo de reglas.

Una vez hecho esto, las demás reglas del cálculo de predicados resultan ser reglas derivadas. De esta suerte, si se aceptan como *naturales* las reglas iniciales, si se considera legítima y natural nuestra nueva regla y si se considera que toda regla que se derive con el solo concurso de reglas naturales es, a su vez, natural, esperamos haber alcanzado nuestro objetivo.

No considero necesario hacer una presentación del lenguaje formal [3] de que vamos a hacer uso. Tan sólo lo haré, en el momento de su utilización, para aquellos elementos nuevos que se introducen en la presente discusión.

2. Cuantores y sistema S_1

Veamos si, de algún modo, es posible arrojar luz sobre estos puntos. Inicialmente contamos con un sistema S_1 que,

[3] Cf. M. Garrido, *op. cit.*, pp. 52-58.

junto con las reglas del cálculo de enunciados —de las que no mostraré ahora que son naturales—, contiene una sola regla, la eliminación de cuantor universal

$$\text{EU} \qquad \frac{\bigwedge x \ Px}{Pa} \ ;$$

y dos interdefiniciones: de cuantor existencial

$$\text{DE} \qquad \frac{\neg \bigwedge x \ \neg Px}{\overline{\bigvee x \ Px}}$$

y de cuantor universal

$$\text{DU} \qquad \frac{\neg \bigvee x \ \neg Px}{\overline{\bigwedge x \ Px}} \ .$$

Sucesivamente extenderemos nuestro sistema con tres nuevas reglas —la introducción de cuantor existencial (IE), la introducción de cuantor universal (IU) y la eliminación de aquél (EE)—, con lo que se completará el sistema de deducción natural. Por supuesto, con anterioridad a la incorporación de la regla IU presentaremos la regla especial a que anteriormente aludimos.

Soy consciente de las limitaciones de S_1. Es fácil ver que dicho sistema es un sistema relativamente pobre. Por ejemplo, de las premisas

$$\bigwedge x \ (Px \land Qx) \quad \text{y}$$
$$\bigwedge x \ (Px \rightarrow Rx)$$

se obtienen con facilidad las siguientes consecuencias:

$$Pa \land Qa \ ,$$
$$Pa \rightarrow Ra \ ,$$
$$Pa \ ,$$
$$Ra \ ,$$
$$Qa \quad \text{y}$$
$$Ra \land Qa \ ;$$

pero no alcanzo a ver el modo en que podrían derivarse consecuencias tan simples y elementales como

$$\begin{array}{l} \bigwedge x\ Rx\ , \\ \bigwedge x\ Px\ , \\ \bigwedge x\ Qx \quad \text{y} \\ \bigwedge x\ (Px \wedge Qx \wedge Rx)\ . \end{array}$$

Así, pues, el sistema S_1 no está concebido para cubrir las posibilidades de la lógica de primer orden, sino como base que se ajusta al significado de los cuantores lógicos desde la que poder justificar el salto a un sistema S_2 —el resultante de las extensiones antes mencionadas— que sí cubra dichas posibilidades y que, en esencia, no es otra cosa que el sistema de las *Untersuchungen* de Gentzen. De conseguir tal justificación habríamos mostrado en qué sentido son *naturales* las reglas del cálculo de predicados de la Deducción Natural.

De las reglas de S_2 (las reglas de Gentzen, o las de cualquier sistema que sea una variante del mismo) se puede pensar que se ajustan al significado del signo a que corresponden (una macroconjunción el cuantor universal, y una macrodisyunción el cuantor existencial) —y, por tanto, justifican su uso— siempre que se trate de dominios finitos. En tal caso, podrían considerarse expedientes abreviatorios de demostraciones más extensas.

Pero cuando se trata de dominios infinitos, tales expedientes carecerían de fundamento, pues serían expedientes de cadenas infinitas de demostraciones —cadenas que, por la misma definición de "demostración" (que exige *finitud*), no son, en absoluto, demostraciones; con lo que dichas reglas estarían faltas de justificación.

No me voy a detener en la discusión del significado de los cuantores. Tampoco necesita presentación el concepto de 'dominio' como 'conjunto de individuos'. Tan sólo diré que un dominio no es lógico si para un individuo *a* y una propiedad *P*, es verdad *Pa* y $\neg$ *Pa*.

Referente al cuantor universal,

$$\bigwedge x\ Px\ ,$$

pienso lo siguiente. Que significa que 'cada uno de los miembros del dominio o universo de discurso tienen la propiedad *P*'. Lo cual justifica, de paso, nuestra regla EU, pues todos los nombres que utilizamos, las constantes individuales, son nombres de un objeto de tal universo (y ello tanto en un universo finito como infinito).

En lo que respecta al cuantor existencial,

$$\bigvee x \; Px \; ,$$

significa que existe un subdominio lógico no vacío del dominio, en el que todos los individuos tienen la propiedad *P*:

$$\bigwedge x^* \; Px^* \; .$$

Sobre la base de estas dos definiciones, no resulta difícil ver que *'todos los individuos de un dominio lógico tienen la propiedad P'* —$\bigwedge x \; Px$— significa lo mismo que *'no existen individuos en dicho dominio que no tengan la propiedad P'* —$\neg \bigvee x \; \neg Px$—. Y si *'hay individuos que tienen la propiedad P'* —$\bigvee x \; Px$— es que *'no es cierto que cada uno de los miembros del dominio no tenga* (carezca de) *la propiedad P'* — $\neg \bigwedge x \; \neg Px$. Con lo cual resulta manifiesto que también son naturales nuestras dos definiciones que acompañan a la regla EU.

3. Introducción de cuantor existencial

La obtención del sistema S_2 ofrece aspectos bien distintos. Me parece oportuna una breve reflexión sobre los mismos.

En primer lugar, la regla de introducción del cuantor existencial constituye una extensión trivial de S_1 —trivial, en el sentido de que es una regla derivada en el sistema, razón por la que la misma tiene justificado su uso en lo que respecta a mostrar que corresponde al significado del cuantor.

Pero, por su parte, la regla de eliminación de cuantor existencial constituye, sí, una regla derivada en el sistema, mas sólo cuando se haya extendido S_1 de modo tal que incluya una regla de introducción del cuantor universal. La justificación del carácter natural de aquélla dependerá, pues, en gran medida, de la justificación del carácter natural de ésta. Y ello es algo que, por el momento, está en entredicho.

En una presentación estrictamente rigurosa de la discusión, sería preciso que las derivaciones que justifican las extensiones utilizaran variables pertenecientes al metalenguaje, y no al lenguaje objeto. Como ello no constituye un serio problema —ya que es fácil llevar a cabo una transcripción de las mismas al metalenguaje—, y como es intuitivamente menos difícil seguir tales derivaciones en el lenguaje objeto, recurrimos a éste en las mismas, excepto en el caso de la justificación de la regla IU, en la que utilizaremos algunos elementos metalingüísticos. Pasemos ya a tales extensiones.

IE $\dfrac{Pa}{\bigvee x \; Px}$ (introducción de cuantor existencial).

La demostración del carácter de derivada de esta regla procederá por reducción al absurdo. La hipótesis de la regla es que en una línea de la derivación figure *Pa*. La única regla que, por el momento, nos permite introducir el cuantor existencial es DE. Por ello supondremos, provisionalmente, que

$$\bigwedge x \; \neg Px \;;$$

con lo que la reducción al absurdo nos conducirá a

$$\neg \bigwedge x \; \neg Px$$

de donde la regla DE nos permitirá concluir

$$\bigvee x \; Px \;,$$

que es lo que queríamos probar. He aquí la derivación:

1 Pa	(hipótesis)
2 $\bigwedge x \neg Px$	(supuesto provisional)
3 $\neg Pa$	(EU en línea 2)
4 $Pa \wedge \neg Pa$	(IC en líneas 1 y 3)
5 $\neg \bigwedge x \neg Px$	(Absurdo cadena 2-4)
6 $\bigvee x\ Px$	(DE en línea 5).

La presente derivación muestra que, puesto que las reglas en ella utilizada se ajustan a lo que significan los signos lógicos —es decir, son *naturales*— también la regla derivada IE se ajusta —y es, en consecuencia, asimismo *natural*.)

4. Introducción de cuantor universal

$$\text{IU} \qquad \frac{Pa}{\bigwedge x\ Px} \qquad \text{(con restricciones);}$$

Concretamente, con la restricción de que *a* no figure en supuesto alguno aún no descargado.

La simple formulación de la regla nos permite abrir, entre otras, la siguiente pregunta: ¿Por qué en las demostraciones de universalidad podemos saltar de una demostración para individuos concretos a su afirmación para todos? Lo cual no hace sino reclamar que se justifique la regla; lo que significa, en nuestro tratamiento, que se muestre su carácter natural, cómo la regla responde al significado del cuantor universal.

Para Beth, [4] ello es posible porque tales individuos desempeñan el papel de *posibles contraejemplos* y los razonamientos tienden a mostrar que no lo pueden ser.

En mi opinión, sigue sin contestarse a la pregunta. Pues si antes nos preguntamos por qué saltamos de la demostración para individuos concretos a la afirmación para todos podemos ahora preguntarnos "¿en qué nos basamos para

[4] J. Piaget & E. W. Beth: *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real* (Madrid: Ed: Ciencia Nueva, 1961), pp. 91-104.

pasar de la destrucción de *un* posible contraejemplo a la afirmación de que ha sido destruido *todo* posible contraejemplo?"

Más aún. La contestación de Beth me parece plausible para todo sistema de prueba por contraejemplo —desde la etchesis hasta los métodos de Beth. Pero deja sin justificación la regla comúnmente utilizada en los sistemas que han dado lugar al planteamiento de la pregunta. La justificación del salto a la generalidad ha de buscarse por otros derroteros.

¿En qué sentido es natural la regla IU? La justificación que ahora pretendo requiere la aclaración de algunos puntos. Representaremos por D el dominio o universo de discurso. Por *dominio restringido* [5] D* entenderemos un conjunto de individuos tales que D* $\subseteq$ D. Especificaremos que el rango de una variable y se limita al dominio restringido adosándole [6] un '*'. Un parámetro individual con asterisco (b^*, por ejemplo) es el nombre de algún individuo de D*.

Las ideas que van a presidir mi argumentación son:

(a) Puesto que $a, b^* \in$ D, no sólo $\dfrac{\bigwedge x \ Px}{Pa}$, sino que también $\dfrac{\bigwedge x \ Px}{Pb^*}$.

(b) $\bigvee x \ Px$ determina un dominio restringido D* lógico no vacío tal que D* $\subseteq$ D, para el que es lícito decir que $\bigwedge y^* \ Py^*$. (Lo cual no es sino la definición del cuantor existencial.) En esta definición se basa la siguiente regla

$$\text{D//D*} \qquad \frac{\bigvee x \ Px}{\overline{\bigwedge y^* Py^*}},$$

que expresa operativamente dicha definición.

[5] Podemos recurrir al uso de subíndices en los '*' para diferenciar distintos dominios restringidos, si fuera preciso.

[6] En el caso de utilizar dominios restringidos cuyos '*' llevan subíndice también deben llevar el mismo subíndice los '*' de las variables y parámetros individuales ligados a dichos dominios.

(c) En el caso de que *a* no figure en ningún supuesto, si

$$\Gamma \vdash Pa$$

entonces todas las ocurrencias de *a* se remontan, directa o indirectamente, a ocurrencias de una variable —que ocupa el lugar de *a*— en una fórmula cuyo signo principal es un cuantor universal que tiene suscrita esa variable. O bien

(d) Las ocurrencias de *a* se remontan a fórmulas del cálculo proposicional que son verdaderas.

Y la idea central que preside mi justificación de la regla

$$\text{IU} \qquad \frac{Pa}{\bigwedge x \; Px} \qquad \text{(con restricciones)}$$

es la de realizar un cambio provisional de dominio. Mejor dicho, un abandono del dominio D por un dominio restringido D*, que es subdominio de D. Más concretamente, se supondrá la existencia de un dominio restringido D*, cuyos individuos han de satisfacer determinadas propiedades y se mostrará la imposibilidad de que exista un tal subdominio de D.

El espíritu en que se va a desarrollar la justificación es el siguiente. Se supondrá, inicialmente, una derivación en la que el parámetro individual *a* sobre el que se pretende aplicar la regla IU no ocurre en ningún supuesto —sea inicial o subsidiario— que no haya sido descargado. (Tal derivación, por supuesto, contendrá en una de sus líneas el enunciado *Pa* cuya cuantificación universal pretendemos justificar —tal y como establece la premisa de la regla.) A continuación introduciremos, como supuesto subsidiario, el enunciado

$$\bigvee x \; \neg Px$$

(La prueba, pues, procederá por reducción al absurdo.)

Es en este momento cuando se produce el salto al dominio restringido $D^* \subseteq D$ determinado por $\bigvee x \; \neg Px$. Obtendremos entonces una contradicción en este dominio, con lo que mostramos su carácter no lógico —y, por ello, la falsedad de

$\bigvee x \neg Px$. Razón por la que cerramos el correspondiente supuesto subsidiario negándolo:

$$\neg \bigvee x \neg Px \, .$$

Obtenido por la regla DU

$$\bigwedge x \; Px \, .$$

Por $\ulcorner a$ entenderemos una derivación en la que a no ocurre en ningún supuesto no descargado. $\ulcorner a \vdash \delta$ significará que el enunciado que se encuentra a su izquierda se obtiene de las premisas de $\ulcorner a$ mediante una serie δ de aplicaciones de reglas (ya aceptadas, por supuesto). $\ulcorner b^* \vdash \delta$ significará que el enunciado que se encuentra a su izquierda se obtiene de las premisas de $\ulcorner a$ por la misma serie δ de aplicaciones de reglas que en el caso de $\ulcorner a$, con la salvedad de que donde decía a debe decir b^*. (Conviene recordar que una constante con '*' corresponde a un individuo de D*, y que el rango de una variable con '*' se limita al dominio restringido D*.)

Finalmente, por D//D* se significa que se salta al dominio restringido determinado por el cuantor existencial que es el signo principal de la fórmula que ocupa la línea que oportunamente se indica.

Primero presentaremos la justificación de la regla IU, y ulteriormente razonaremos y comentaremos cada uno de sus pasos.

Hipótesis	$\ulcorner a$ Pa	$\ulcorner \vdash \delta$	Dominio D
(1)	$\bigvee x \; \neg Px$		
*(2)	$\bigwedge y^* \; \neg Py^*$	(1) D//D*	Dominio D*
*(3)	$\neg Pb^*$	(2) EU	
*(4)	Pb^*	$\ulcorner b^* \vdash \delta$	
*(5)	$Pb^* \wedge \neg Pb^*$	(4) (3) IC	
(6)	$\neg \bigvee x \neg Px$	(1) — *(5) Absurdo	Dominio D
(7)	$\bigwedge x \; Px$	(6) DU	

Los pasos del proceso son lo bastante elocuentes para estar faltos de excesiva aclaración. Los que constituyen la hipótesis únicamente representan las condiciones exigidas para la aplicación de la regla que se pretende justificar: "Si *Pa* figura en una línea de una derivación y *a* no figura en ningún supuesto que no haya sido descargado, entonces..."

La línea de argumentación procederá por reducción al absurdo. Recuérdese, a este respecto, que la única regla que hasta ahora nos permite introducir el cuantor universal es

$$\text{DU} \qquad \frac{\neg \bigvee x \ \neg Px}{\bigwedge x \ Px} \,.$$

Por ello, en la línea (1) introducimos, como supuesto subsidiario,

$$\bigvee x \ \neg Px \,.$$

Ahora bien, sabemos que toda fórmula cuantificada existencialmente, si es verdadera, determina un subdominio D* cuyos individuos y^* satisfacen todos la condición especificada por la matriz cuyo prefijo cuantificacional es dicho cuantor existencial. Lo cual justifica la introducción de la línea

$$*(2) \ \bigwedge y^* \ \neg Py^* \,.$$

Las líneas *(3) y *(5) no precisan comentario. Un comentario especial, por el contrario, se requiere para la línea *(4); lo haremos más adelante.

La línea *(5) muestra que no es lógico el dominio D* determinado por

$$\bigvee x \ \neg Px \,.$$

Esto es, tal dominio habría de contar, por lo menos, con un individuo b^* que tuviese la propiedad P y, al mismo tiempo, no la tuviese (en realidad, esto habría de suceder a todos sus individuos, por lo cual el dominio sería vacío, contra lo que significa el cuantor existencial; pero basta a nuestros propósitos que tenga un individuo tal). Si D* es imposible,

$$\vee x \neg Px$$

es falso; siendo, por ello, verdadero —línea (6)

$$\neg \vee x \neg Px \ .$$

Y si aplicamos ahora la regla DU tendremos —línea (7)

$$\wedge x \ Px$$

que es lo que prentendíamos demostrar.

Dos puntos quedan aún por aclarar: el uno es la condición impuesta a la constante a en Γa; el otro, la justificación de la línea *(4): $\Gamma b^* \vdash \delta$. Comencemos por esto último.

¿Es seguro que, dando los mismos pasos que para obtener Pa obtendremos Pb^*? Para analizarlo, consideremos lo que puede suceder si nos remontamos desde Pa a la fórmula (o las fórmulas) de cuya transformación se sigue la introducción de la constante a. Pueden suceder cuatro cosas.

(1) Que en alguna de dichas líneas nos remontemos a una fórmula en la que ocurre a y que no procede de otra fórmula, sino que ella es un supuesto no descargado.

(2) Que todas ellas nos conduzcan a fórmulas en las que no ocurre a y cuyo signo principal es un cuantor universal.

(3) Que en todas ellas nos remontemos a una fórmula en la que ocurre a y que no procede de otra fórmula, sino que es un supuesto descargado.

(4) Que unas nos remitan a supuestos descargados (como en 3) y otras a cuantores universales (como en 2).

El caso primero está, obviamente, fuera de lugar; pues lo excluye la restricción que pesa sobre la hipótesis: la constante a no debe figurar en ningún supuesto no descargado. (Lo que falta por justificar es esta restricción. Lo veremos más adelante.)

Si ocurre el segundo de los casos, basta, para obtener Pb^*, llevar en Γa las siguientes transformaciones:

a) Retener de Γa aquellas líneas en que a no ocurra.

b) Cuando una línea de $\vdash a$ que contenga a proceda de una aplicación de la regla EU que introduce a, aplíquese EU a la misma línea que antes, pero introdúzcase b^* (lo cual es legítimo, pues b^* también pertenece a D). Y

c) Aplíquese para las restantes líneas las mismas reglas y en las mismas condiciones que en $\vdash a$.

Por ejemplo, la derivación $\vdash a$

——	(1)	$\bigwedge x\ (Px \rightarrow Qx)$	
——	(2)	$\bigwedge x\ (Qx \rightarrow Rx \wedge Sx)$	
	(3)	$Pa \rightarrow Qa$	(1) EU
	(4)	$Qa \rightarrow Ra \wedge Sa$	(2) EU
	(5)	$Pa \rightarrow Ra \wedge Sa$	(3) (4) T

se transforma en la siguiente derivación $\vdash b^*$:

——	(1)	$\bigwedge x\ (Px \rightarrow Qx)$	
——	(2)	$\bigwedge x\ (Qx \rightarrow Rx \wedge Sx)$	
	(3)	$Pb^* \rightarrow Qb^*$	(1) EU
	(4)	$Qb^* \rightarrow Rb^* \wedge Sb^*$	(2) EU
	(5)	$Pb^* \rightarrow Rb^* \wedge Sb^*$	(3) (4) T

Cuando ocurre el tercer caso —siempre remiten a supuestos descargados— se trata de casos triviales del cálculo de predicados. Triviales en el sentido de que, al descargar los supuestos, obtenemos fórmulas que son tautologías, verdades lógicas del cálculo de enunciados. Se puede, por tanto, obtener $\vdash b^*$ sustituyendo los supuestos en que a ocurra por supuestos que sólo se diferencian de ellos en tener ocurrencias de b^* donde aquéllos tienen ocurrencias de a. La transformación de aquellas líneas que lo requieran se produce aplicando las mismas reglas y en las mismas condiciones que en $\vdash a$. Por ejemplo, si $\vdash a$ es

—	(1)	$\bigwedge x\ (Sx \rightarrow Mx)$	
—	(2)	$Pa \wedge Ra$	
	(3)	Ra	(2) T
—	(4)	$Ra \vee Sa$	(3) T
	(5)	$Pa \wedge Ra \rightarrow Ra \vee Sa$	(2)-(4) T

(6)	Za	
(7)	$\neg Za$	
(8)	$Za \wedge \neg Za$	(6) (7) T
(9)	Ma	(8) T
(10)	$\neg Za \rightarrow Ma$	(7)-(9) T
(11)	$Za \rightarrow (\neg Za \rightarrow Ma)$	(6)-(10) T
(12)	$(Pa \rightarrow Ra \vee Sa) \wedge (Za \rightarrow (\neg Za \rightarrow Ma))$	(5)-(11)

se transforma en $\ulcorner b^*$ así:

(1)	$\wedge x\ (Sx \rightarrow Mx)$	
(2)	$Pb^* \wedge Rb^*$	
(3)	Rb^*	(2) T
(4)	$Rb^* \vee Sb^*$	(3) T
(5)	$Pb^* \wedge Rb^* \rightarrow Rb^* \vee Sb^*$	(2)-(4) T
(6)	Zb^*	
(7)	$\neg Zb^*$	
(8)	$Zb^* \wedge \neg Zb^*$	(6)(7) T
(9)	Mb^*	(8) T
(10)	$\neg Zb^* \rightarrow Mb^*$	(7)-(9) T
(11)	$Zb^* \rightarrow (\neg Zb^* \rightarrow Mb^*)$	(6)-(10) T
(12)	$(Pb^* \rightarrow Rb^* \vee Sb^*) \wedge (Zb^* \rightarrow (\neg Zb^* \rightarrow Mb^*))$	(5) (11) T

En realidad, es aún más simple. La línea (5) de $\ulcorner a$ no es sino un caso del teorema del cálculo de enunciados

$$p \wedge q \rightarrow q \vee s \ ,$$

del que es otro caso la línea (5) de $\ulcorner b^*$. (Sustitúyase p por Pa, q por Ra y s por Sa; hágase lo mismo pero poniendo b^* en lugar de a y obsérvense los resultados). Otro tanto sucede con las líneas (11) y (12). Siempre se podría, pues, obtener las líneas (5), (11) y (12) de $\ulcorner b^*$ por sustitución en teoremas del cálculo de enunciados. Con lo que nos es posible eliminar las cadenas (2)-(4) y (6)-(10).

El modo de transformar el caso cuarto resulta de combinar así los casos segundo y tercero:

a) Aquellas líneas que terminen en un supuesto descargado en el que ocurre a, sustitúyanse por el mismo supuesto con b^* en el lugar de a.

b) Aquellas líneas que resultan de introducir *a* por aplicación de EU sustitúyanse por el resultado de aplicar EU con introducción de *b** en las mismas condiciones. Y

c) Aplíquense las mismas reglas y en las mismas condiciones que en $\ulcorner a$ en el resto de las líneas.

Con ello cerramos el comentario al paso *(4) de nuestra justificación de la regla IU.

Sólo unas pocas líneas sobre la restricción impuesta a la constante *a* de la regla. ¿A qué se debe esta restricción de que la constante no figure en supuesto alguno no descargado? Está claro que con ella, si se está de acuerdo con lo dicho, la regla IU está justificada. Pero ¿valdría también sin la restricción? La contestación es ya sabida. Puedo demostrar que el número 4 es múltiplo del 2; lo cual no me permite afirmar que todos los números son múltiplos de 2. Pero ¿no podemos equivocarnos en lo que acabamos de decir? ¿No podría valer nuestra justificación de la regla IU también cuando se hiciera caso omiso de la condición impuesta a la constante *a*?

De ser así, tendríamos que concluir que "todos los números son múltiplos del 2", que la definición del cuantor universal no concuerda con el uso informal del "todo" o que nuestra justificación es infundada. (Y no creo que nadie se decidiera a optar por ninguna de las dos primeras posibilidades.)

Pero, supongamos provisionalmente, que la regla se enuncia sin restricción. Tratemos ahora de justificar el caso primero del análisis de la línea *(4):

> Que en alguna de dichas líneas nos remontemos a una fórmula en la que ocurre *a* y que no procede de otra fórmula, sino que ella es un supuesto no descargado.

No podemos, entonces —al menos no hay garantía de que podamos— obtener dicha línea en la que *b** ocupe el lugar de *a* ni por aplicaciones de la regla EU, ni por teoremas del cálculo de enunciados. La única garantía que tenemos de obtenerla es introducirla de la misma forma que en $\ulcorner a$: como supuesto. Y en tal caso otorgo a D* privilegios que no le corresponden: el de suponer que sus individuos —o al menos uno de ellos— tengan una propiedad que no está ni implícita ni explícitamente contenida en la matriz de cuyo prefijo existencial es dominio D*. Cuando resulta ser que la definición del cuantor existencial garantiza un dominio restringido D* $\subseteq$ D cuyos individuos tienen todos la propiedad especificada por la matriz, pero nada más.

En consecuencia, el caso primero queda sin justificación, y si se aceptara sin restricción la regla IU estaría falta de legitimación, la habríamos incorporado al sistema acríticamente.

En resumidas cuentas, se muestra —como cuando se trata de dominios finitos— que, si se cumple la restricción, la demostración se puede repetir, calcándola, para *Pb**. Pero la justificación del salto de la demostración para uno a la demostración para todos es distinta. Entendido el cuantor universal como un macroconjuntor, podríamos construir una cadena de longitud finita de líneas ocupadas por fórmulas de longitud finita, cadena que contendría la demostración para cada individuo del dominio. Su última línea estaría ocupada por la conjunción de todos los resultados de dichas demostraciones. Y podríamos entonces añadir una línea con una fórmula cuantificada universalmente, que no sería sino la "abreviatura" de dicha conjunción (gigantesca).

Pero cuando se trata de dominios infinitos ¿estaríamos dispuestos a aceptar tal justificación? Habríamos de construir, en tal caso, una cadena de longitud infinita de líneas en la que figurasen tales demostraciones para los individuos del dominio. En la primera línea que siguiese a esta cadena infinita introduciríamos una expresión que es también de longitud infinita: la macroconjunción de los infinitos resultados de tales demostraciones. ¿Constituiría tal cadena una demostración? Más bien, no; pues tanto las demostraciones como las fórmulas que figuran en sus líneas han de ser secuencias finitas.

Nuestra justificación, por ello, se apoya en secuencias finitas de líneas, y las expresiones que éstas contienen son todas fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje. Lo único discutible de ella es la suplantación del dominio D por el dominio restringido D*. De aceptarla, tendremos razones suficientes para ampliar nuestro sistema con la introducción de la regla IU. Y, como veremos, una vez aceptada esta regla, se puede derivar la regla de eliminación de cuantor existencial, con lo cual habremos dado cuenta de uno de los aspectos *naturales* de las reglas de transformación de la Deducción Natural.

Por supuesto, todo lo que a continuación se diga de la regla EE, es independiente de que se acepten o no las argumentaciones que hemos hecho en pro de IU. Dicho en otros términos: vale para todo sistema que acepte, por las razones que sean, nuestra regla de introducción del cuantor universal.

5. Eliminación del cuantor existencial

La regla de más difícil factura de la lógica elemental suele ser la que nos permite extraer consecuencias de enunciados particulares. Y, cosa paradójica, se plantean más reparos a admitir su carácter natural que a admitir el de la ya estudiada regla de introducción del cuantor universal: se acepta mecánicamente, pero no se entiende por muchos de sus usuarios.

Es mi propósito mostrar lo infundado de tales reparos; mostrar que los únicos reparos que pueden hacérsele derivan de la regla IU. Sin duda, las dificultades que nuestra regla ofrece se deben a que se presenta como su *regla natural* (sic) una regla harto elaborada, que recuerda los sistemas axiomáticos, y se presenta su más natural definición natural como regla ulteriormente derivada.

Mostraré, en primer lugar, que las reglas EU, IU, DU y DE permiten establecer como regla derivada la siguiente regla de eliminación de cuantor existencial

$$\text{EE1} \quad \frac{\begin{array}{l}\bigvee x\ Px \\ \bigwedge x\ (Px \rightarrow Q)\end{array}}{Q} \qquad \text{(donde } x \text{ no figura en } Q\text{)}$$

Posteriormente legitimaré la regla

$$\text{EE2} \qquad \dfrac{\begin{array}{l} \bigvee x\; Px \\ \left[\begin{array}{l} Pa \\ \text{—} \\ \text{—} \\ Q \end{array}\right. \end{array}}{Q}$$

(donde *a* no figura en '*Px*' ni en *Q* ni en supuesto alguno no descargado),

regla que es la comúnmente presentada y que es la propia regla EE1 ligeramente modificada. Asimismo mostraré que las nuevas restricciones impuestas a la constante *a* son fruto de dichas modificaciones.

(a) *Regla* EE1. Comencemos por explicar la restricción sobre la variable *x*: no debe figurar en *Q*. Antes adelantemos que esta restricción se transforma en una de las restricciones sobre *a* (lo cual permitirá arrojar luz sobre el análisis de EE2).

Las razones de la restricción son bien simples; pues si figurara en *Q*, una de dos: o *x* figura libre o *x* figura cuantificada (por un cuantificador distinto al de nuestro análisis, que es el signo principal en $\bigwedge x(Px \rightarrow Q)$). En el primero de los casos, *Q* no sería un enunciado y, por lo tanto, no puede figurar en ninguna derivación más que como parte de una subfórmula propia de otra fórmula. Y en el caso de que *x* esté cuantificada resultaría que en $\bigwedge x(Px \rightarrow Q)$ se produciría una colisión de variables, por lo que dicha fórmula no sería bien formada y no podría figurar en ninguna demostración. Son, pues, las definiciones de "derivación" y de "fórmula bien formada" las que imponen la restricción a la variable *x* en EE1.

Pasemos ahora a establecer EE1 como regla derivada del sistema

1	$\bigvee x\ Px$	Premisa de la regla
2	$\bigwedge x\ (Px \rightarrow Q)$	Premisa de la regla
3	$\neg Q$	Supuesto subsidiario
4	$Pa \rightarrow Q$	EU en línea 2
5	$\neg Pa$	Modus Tollens, líneas 3 y 4
6	$\bigwedge x\ \neg Px$	IU en línea 5
7	$\neg \bigwedge x\ \neg Px$	DE en línea 1
8	Q	Absurdo, líneas 6, 7 y cadena 3-7

Dicho intuitivamente, hemos justificado que "si hay algún individuo que sea P y si es cierto que cualquier P acarrea como consecuencia Q, entonces es verdad que Q".

Por supuesto, es necesario que el parámetro a no figure en Q, ni en ningún otro supuesto, pues si no la línea 6 se habría obtenido de manera ilegítima. Contra lo que pudiera parecer, no son éstas las condiciones que determinan las restricciones que operan en la regla EE2, sino que sólo son necesarias para la propia fundamentación de la regla. Ciertamente, el parámetro *a puede figurar* en todos esos sitios. Bastaría en tal caso elegir para la eliminación de cuantor universal por la que se obtiene la línea 4 un parámetro que no figure en ningún supuesto.

(b) *Regla* EE2. Más arriba indiqué que las restricciones que en esta regla se imponen a la constante a son motivadas por la regla IU. Efectivamente, lo que pretendemos mostrar es que la regla EE2 resume dos momentos muy distintos. Por una parte, la demostración de $\bigwedge x(Px \rightarrow Q)$, a la cual responde la cadena

$$\begin{array}{|l} Pa \\ \hline \text{—} \\ \text{—} \\ Q. \end{array}$$

Y, por otra, la aplicación de la regla EE1, anteriormente derivada. En otros términos, la regla EE2 resume la siguiente derivación:

$\bigvee x\ Px$
Pa
———
———
Q
$Pa \rightarrow Q$ Introducción de la implicación
$\bigwedge x\ (Px \rightarrow Q)$ IU
Q EE1 ,

derivación que pone de manifiesto que EE2 es una regla *natural*.

Resulta ahora fácil descubrir las razones de las restricciones impuestas a a.

(1) Que a no figure en Q. Supongamos que a figure en Q —lo cual lo representaremos por $Q(a)$. Entonces la cuantificación universal de $Pa \rightarrow Q(a)$ en nuestra última derivación sería $\bigwedge x(Px \rightarrow Q(x))$. Por lo que ulteriormente no podríamos aplicar EE1, pues ya vimos en la discusión de esta regla que x no podía figurar ni libre ni ligada en Q.

(2) Que a no figure en Px. Supongamos que sí figura —lo cual lo representaremos por $Px(a)$.. Entonces $\bigvee x\ Px$ sería $\bigvee x\ Px(a)$. Por lo que la cuantificación universal de $Pa(a) \rightarrow Q$ en nuestra última derivación sería $\bigwedge x(Px(x) \rightarrow Q)$. De este modo,

$$\frac{\begin{array}{c}\bigvee x\ Px(a)\\ \bigwedge x\ (Px(x) \rightarrow Q)\end{array}}{Q}$$

no sería un caso de la regla EE1 y su legitimidad estaría por justificar.

(3) Que a no figure en supuesto alguno no descargado —a excepción de Pa. Supuesto que sí ocurriera, no podría aplicarse IU legítimamente para la obtención de $\bigwedge x(Px \rightarrow Q)$ en nuestra última derivación; y, en consecuencia, no se podría aplicar EE1.

Lo cual pone fin a nuestra discusión de la regla.

6. Conclusión

Así, pues, las definiciones que hemos presentado para los cuantores tienen la fuerza suficiente para poder mostrar cómo las más simples reglas de S_1 se ajustan a lo que los cuantores significan y poner de manifiesto su carácter natural.

Justifican, a su vez, el uso de una regla especial D//D* —una regla que nos permite limitar momentaneamente nuestro universo de discurso— que permite, por su parte, derivar la regla IU de introducción de cuantor universal, cuya adición a las reglas iniciales fundamenta una regla de eliminación de cuantor existencial que legitima y descubre el espíritu de la tradicional regla de Gentzen —nuestra EE2— al propio tiempo que ilumina las razones formales que exigen las restricciones que se imponen al uso de dicha regla.

La justificación de la regla IU sigue, en parte, el espíritu de la justificación que presenta Beth. Sólo que, en nuestro caso, el *contraejemplo frustrado* —el *b** de nuestra derivación— no se utiliza para concluir la frustración de *todo* contraejemplo posible, sino su pertenencia a un dominio que no es lógico.