Relime Vol. 6, Núm. 3, julio, 2003 pp.199-219

La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE[1]

Karly Barbosa Alvarenga[2]

RESUMEN

Basándome en la teoría APOE, expongo un conjunto de construcciones mentales, al cual denomino esquema, que pueden desarrollar los universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuaciones. Aunque dicha noción está presente en muchas áreas de las ciencias exactas (matemáticas, ingeniería y economía), su comprensión por parte de muchos estudiantes y algunos profesores ha sido muy limitada; por ello, puede decirse que su tratamiento parece no haber surtido efecto alguno en su aprendizaje. El estudio de las inecuaciones implica varias nociones que deben concatenarse de forma coherente, tales como estructura de orden de los números reales, funciones, correspondencia 1-1 de los números reales con la recta numérica, gráficos y análisis gráfico de funciones, relaciones de implicación, equivalencia y otros. Ahora bien, con sustento en el esquema que desgloso en este artículo, se puede elaborar una metodología que avale la mejoría de su enseñanza-aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Teoría APOE, construcciones mentales, inecuaciones.

O ENSINO DOS DESIGUALDADES DO PONTO DA VISTA DA TEORIA DE APOE

RESUMO

Baseado no referencial teórico APOE, apresento um conjunto de construções mentais -esquema que estudantes universitários podem desenvolver a fim de compreender o conceito de inequações. As inequações estão presentes em muitas áreas de atuação como a matemática, as engenharias e a economia, porém sua compreensão tem sido muito limitada tanto por parte de vários estudantes como também alguns professores. O tratamento que vem sendo dado a esse conceito parece no ter surtido efeito em sua aprendizagem. Seu estudo envolve várias noções que devem ser concatenadas de forma coerente, tais como: estrutura de ordem dos números reais, fatoração, interpretação de raízes, funções, correspondência 1-1 dos reais com a reta numérica, equações, gráficos e análise gráfica de funções, relações de implicação e equivalência e outros. com base no esquema apresentado pode-se elaborar uma metodologia que visa a melhoria de seu ensino-aprendizagem.

PALAVRAS CHAVE: Teoria APOE, construções mentais, inequações.

L'ENSEIGNEMENT D'INÉQUATIONS DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE APOE

RÉSUMÉ

Je vous présente un ensemble de constructions mentales, basé dans la source théorique APOE, - un schéma, que les étudiants universitaires peuvent développer pour bien comprendre le concept d'inéquations. Les inéquations sont présentes dans beaucoup de secteurs d'exécution comme les mathématiques, les génies et l'économie, toutefois leur compréhension est très limitée par plusieurs étudiants aussi bien que par quelques professeurs. Le traitement qui est donné à ce concept semble ne pas avoir d'effet sur l'apprentissage. Son étude enveloppe plusieurs notions qui doivent être enchaînées d'une façon cohérente, comme: la structure de l'ordre des nombres réelles, factorisation, interprétation de racines, les fonctions, la correspondance 1-1 de Réelles avec la ligne

[1] *Fecha de recepción: marzo de 2003*
[2] *Universidad Católica de Brasilia*

numérique, équations, graphiques et l'analyse graphique des fonctions, les relations de l'implication et de l'équivalence et d'autres. Sur la base du schéma présenté on peut élaborer une méthodologie qui vise l'amélioration de leur enseignement-apprentissage.

MOTS CLÉS: Théorie APOE, constructions mentales, inéquations.

THE TEACHING OF INEQUALITIES FROM THE POINT OF VIEW OF APOS THEORY

ABSTRACT

Based on the theoretical framework APOS I show a mental constructions - scheme that undergraduate students may to present when trying to understand the inequality subject. The inequalities are present in a lot of areas like math, engineer and economy, but only part of students and of teachers have been able to fully understand such concept. The treatment given to this matter has not proven effective. Its study involves many notions that must be coordinated coherently like: number real framework, factorization, functions, function roots, 1-1 real correspondence with coordinate line, equations, graphs analysis of function, implication and equivalence relations as well as others. With basis in this scheme presented here it will be possible to elaborate a methodology that will improve the teaching and learning of inequalities.

KEY WORDS: APOS Theory, mental constructions, inequalities.

1- Introducción

Las investigaciones en educación matemática, particularmente los estudios psicológicos de Piaget (1972), Vergnaud (1982), Tall y Vinner (1981) y Dubinsky (1996), entre otros, influyen en las discusiones en torno a un movimiento que tiene como finalidad el mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Para tal propósito, es necesario un cambio en el modelo de enseñanza 'tradicional' en las escuelas de nivel básico, medio y superior, debido a que existen algunas propuestas teóricas sin instrumentación metodológica y viceversa. Entiéndase por enseñanza 'tradicional' a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos: tal es el caso de las inecuaciones.

Con el objetivo de presentar un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar para que comprendan el concepto de inecuaciones, este trabajo busca responder a las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de inecuaciones?
- ¿Cómo construye o entiende un alumno el concepto de inecuación?
- ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la idea de inecuación?
- ¿Cómo puede influir la interpretación de inecuación en la resolución de problemas que implican el concepto?

Basado en la teoría APOE: *acción, proceso, objeto* y *esquema* (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1996; DeVries, 2001), desarrollada a partir de una reformulación/adaptación de las ideas de Piaget sobre la enseñanza de las matemáticas, desgloso en este artículo un conjunto de construcciones mentales denominado *esquema*, que los estudiantes pueden desarrollar a fin de que asimilen el concepto de inecuación y contesten las preguntas antes mencionadas. Los resultados que aquí presento son fruto de una investigación de doctorado (Alvarenga, 1999).

Si bien el estudio de inecuaciones comienza antes del bachillerato y se prolonga hasta la universidad, a través de una investigación hecha en universitarios (Alvarenga, 1999), observé muchos errores en su interpretación y sobre todo en su resolución. Por su amplia aplicación en varias áreas como economía, cálculo numérico y diferencial, computación, análisis matemático, entre otras, y porque su comprensión es necesaria en el estudio de otros conceptos, que deben concatenarse de forma coherente, resulta pertinente analizar y crear una mejor manera de enseñanza para que los estudiantes realmente aprendan las inecuaciones. Paulo Boero (1998) apunta la limitación de las técnicas tradicionales para la resolución de inecuaciones y evidencia el hecho de que los maestros no dan la importancia necesaria a las inecuaciones ni buscan maneras de mejorar su didáctica. La forma de enseñar dicho tema facilita el encuadramiento mental de los alumnos, la evaluación y el aprendizaje, como consecuencia de la reducción de la complejidad del problema y de la resolución de inecuaciones a través de su modelación lógica-algebraica. Por ello, Boero argumenta que tal método de enseñanza es inerte (Boero, 1998).

Para que el esquema de inecuación sea comprendido presentaré a continuación lo que en este artículo se entenderá por interpretar y resolver algebraica y gráficamente una inecuación.

Interpretar una inecuación implica, por un lado, asimilar el significado de variable real y del conjunto solución, por otro, si se presenta como una relación entre expresiones algebraicas, puede ser interpretada como una relación entre funciones y su conjunto solución puede eventualmente ser determinado mediante *gráficos*. La interpretación de una inecuación queda perjudicada si el universo numérico del aprendiz y el dominio de las propiedades de los números reales como cuerpo ordenado son muy limitados. Por ejemplo, al analizar la inecuación $x^2 < x^4$, el estudiante suele pensar que es verdadera para cualquier número real, y al tratar de resolver la inecuación $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\ x$ es importante que entienda que ningún número real negativo puede ser la solución. La comprensión del conjunto solución implica saber lo que no puede serlo.

Resolver una inecuación consiste en hallar su conjunto solución o su descripción más simple posible. Por ejemplo, $\{x \in R \mid x^2 > 1\}$ describe el conjunto solución de la inecuación $x^2 < x^4$, sin embargo, no es la más simple posible. Por ello, solucionar una inecuación algebraicamente implica, en general, hacer transformaciones por medio del empleo de propiedades de los números reales, de ahí la importancia de que el estudiante sepa cuáles de ellas puede utilizar y, además, que tenga en cuenta las equivalencias entre las inecuaciones que van siendo obtenidas. Por ejemplo, para resolver la inecuación $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\ x$ es natural que se inicie la búsqueda de su solución elevando al cuadrado ambos miembros, pero al mismo tiempo que esta manipulación algebraica permite iniciar el proceso de resolución, la nueva inecuación ($x+1 \leq 2x^2$) no es equivalente a la original: la solución de $x+1 \leq 2x^2$ es $\left\{x \in \Re \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ e } x \geq 1\right\}$. Sin embargo, la inecuación $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\ x$ no admite solución negativa; se puede verificar que es $\{x \in \Re \mid \mathrm{x} \geq 1\}$.

La resolución gráfica de una inecuación, entendida como una relación entre funciones, implica la construcción de los gráficos de tales funciones y la determinación del conjunto solución por medio del análisis de esas figuras, pero a veces es necesaria también la manipulación algebraica.

Otra situación de resolución gráfica de inecuación aparece, por ejemplo, cuando son dados los gráficos de f y de g y se solicita determinar el conjunto solución de $f(x) \times g(x) \geq 0$. En este caso, la ausencia de las expresiones algebraicas remite a una abstracción ante la que los estudiantes tienen mucha dificultad.

2- La teoría APOE

Para Asiala, “el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo **acciones**, **procesos** y **objetos** matemáticos y organizándolos en esquemas a fin de lidiar con las situaciones” (Asiala et al , 1996: 7).

A continuación, defino de manera sucinta las construcciones mentales: acción, proceso, objeto y esquema. Resalto que en este estudio de inecuaciones surge la necesidad de acrecentar más una construcción mental, denominada pre-acción, que será caracterizada más adelante.

Una **acción** consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugestiones que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción, cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones. Breindenbach define una acción como “cualquier manipulación repetible, física o mental, que transforma objetos (por ejemplo, números, figuras geométricas, conjuntos, etcétera) para obtener objetos” (Breindenbach et al., 1992). Como ejemplos, puedo citar los siguientes:

- Resolver una ecuación imitando los pasos de la resolución de una ecuación similar
- Procurar soluciones de una inecuación sustituyendo valores específicos y verificando si satisfacen o no la inecuación

Si la comprensión de un concepto por parte del individuo se limita a realizar acciones, entonces decimos que posee una *concepción acción* de tal idea. Aunque una *concepción acción* sea muy limitada, la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la comprensión de un concepto (Asiala et. al, 1996).

Cuando una acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella, puede *interiorizar* tal acción en **proceso**. Dicha construcción interna permite realizar la misma acción, mas no necesariamente puede ser dirigida por estímulos externos. Un individuo posee una *concepción proceso* de una transformación dada si su comprensión está restringida a concebirla como un proceso. Por ejemplo:

- Un aprendiz ejecuta un proceso cuando resuelve una ecuación sin imitar necesariamente el método para solucionar otra similar. Aquí, puede iniciar la resolución de una ecuación procurando colocarla en una forma que le permita aplicar un cierto algoritmo de solución.. Además, puede describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin realmente ejecutarla. Empero, un aprendiz que no posee un nivel de concepción proceso de resolución de ecuación no consigue ejecutar una acción en el conjunto solución sin antes determinarlo (DeVries, 2001).
- Un individuo ejecuta un proceso cuando es capaz de pensar en una inecuación de forma generalizada y dinámica. Puede recibir una o más entradas, ejecutar operaciones con ellas y obtener un valor booleano, esto es, verdadero (V) si la entrada es una solución de la inecuación y falso (F) si no lo es. El individuo que posee una concepción proceso de inecuación, además, utiliza el conjunto solución para responder si un determinado valor hace que la inecuación sea V o F, sin necesidad de sustituir tal valor en la inecuación para verificarlo.

Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico adquiere una conciencia de su totalidad, percibe qué transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar en él y es capaz realmente de construirlas. Si se da tal caso, se dice que reconstruyó –o encapsuló– aquel proceso como un **objeto** cognitivo. Así, un individuo está en el nivel de *concepción objeto* de una noción matemática cuando su comprensión de la idea es tan profunda que la trata como un objeto; además, tiene la habilidad de ejecutar acciones en el objeto y también de *desencapsular* el objeto de vuelta al proceso que le dio origen cuando sea necesario. Un ejemplo de este tipo de concepción es:

- Un individuo capaz de pensar en una función como la suma de dos funciones, sin hacer referencia a ejemplos específicos, piensa en ella como un objeto.
- Un individuo competente para analizar equivalencias entre inecuaciones utilizando propiedades de los números reales presenta una concepción objeto de inecuaciones. Aquí, demuestra estar consciente del proceso como una totalidad, puede ejecutar acciones aplicando propiedades de los números reales y de analizar las equivalencias.

Un esquema, para un cierto concepto matemático, abarca una colección individual de acciones, procesos y objetos a la que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Las diversas construcciones se encuentran conectadas, de manera consciente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo, que puede ser considerada en un problema que implique al concepto en cuestión y su *coherencia* permite al individuo reconocer lo que se halla en el ámbito del esquema. Cualquier tipo de conexión que un individuo puede realizar con otros esquemas, concernientes a diversos conceptos matemáticos, depende de los tipos de construcciones mentales que posean (acción, proceso, objeto). No obstante, este es un estudio muy reciente y hay poca referencia al respecto (Clark, et. al., 1997), (Baker et.al., 2000). En este trabajo no profundizaré en la coherencia, ya que su estudio aún se está desarrollando.

3- La metodología

Esta investigación fue realizada de acuerdo con el paradigma para la investigación y desarrollo pedagógico propuesto por el grupo de investigadores de la RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), dirigido por Ed Dubinsky, que se muestra en la figura 1. Sin embargo, como no tengo la intención de detallar tal paradigma, remito al lector al artículo que consigno en la bibliografía (Asiala et. al., 1996).

Figura 1

A medida que la investigación sobre los esquemas de inecuación elaborados fue avanzando en la etapa de análisis teórico, sufrieron algunos cambios: lo que presento aquí es su tercera y última versión.

Para su elaboración, durante la etapa de planeación e instrumentación recopilé información entre 136 estudiantes universitarios en tres momentos distintos, a partir de 1999. En primer término me centré en estudiantes que aprendieron el concepto de inecuación con una enseñanza 'tradicional' y en tres profesores universitarios, entrevistados informalmente sobre la enseñanza-aprendizaje de la inecuación. En segundo y tercer términos me circunscribí a estudiantes que participaron en dos cursos basados en una metodología de enseñanza, diseñada de acuerdo con el esquema de inecuación. Los estudiantes provenían de diferentes carreras, como Computación y Tecnología y Licenciatura en Matemáticas. Al momento del estudio llevaban algunas de las siguientes materias: Cálculo I y III, Análisis de la Recta y Matemática Financiera. Alrededor de seis impartían clases en el bachillerato.

La primera y la segunda elaboraciones e instrumentaciones de la metodología de enseñanza para inecuaciones difirieron básicamente en el enfoque dado a los problemas diseñados, que fueron poco alterados durante el desarrollo de tales etapas. Percibí, en el transcurso de la investigación, que una misma inecuación propiciaba varias maneras de interpretar y de resolver, según la descripción anterior de interpretar y resolver. Dichas alternativas fueron enfocadas en la metodología de enseñanza.

Por su parte, la metodología propuesta implica también el uso de un lenguaje de programación para aprender matemáticas, el ISETL, **I**nteractive **S**et **L**anguage (Dubinsky, 1995), además del empleo de la técnica de grupos cooperativos.

A continuación, presento dos ejemplos de actividades en cuya resolución fue empleado el lenguaje ISETL.

Actividad 1. Elabore un programa en ISETL que posibilite el análisis de una posible equivalencia entre las siguientes inecuaciones: $4x^2 < 16$ y $2x < 4$. Concluya si son o no equivalentes. Justifique su respuesta. Si lo considera necesario, mire el programa hecho en el aula, lo cual posibilita el análisis de la equivalencia entre $\sqrt{x+3} < x$ y $x+3 < x^2$. Después, intente resolver la inecuación $4x^2 < 16$. ¿Qué propiedades de los números reales es posible emplear?

```
>       I:=func(x);
>>      return 4*(x**2)<16;
        >>      end;
>       J:=func(x);
>>      return 2*x<4;
        >>      end;
>       ADD:=func(I1,I2);
>>      return func(x);
>>      return I1(x)and I2(x);
        >>      end;end;
>       ADD;
>       K:=ADD(I,J);
>       K(-2);
false;
>       K(-1);
true;
>       K(-1/2);
true;
```

Actividad 2. Analice, por medio de gráficos, la solución de cada inecuación:

a $f(x) \leq g(x)$ para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 4$. Enseguida, haga lo mismo para $f(x) > g(x)$.

```
>       f:=|x->x**2|;
>       g:=|x->3*x+4|;
➢       plot([f,g],-15,20,-15,20);
```

b $h(x) \leq 0$ y $h(x) > 0$, donde $h(x) = x \operatorname{sen} x$.

4- El esquema de inecuación

El concepto de inecuación puede ser comprendido bajo dos aspectos que provienen de tipos diferentes de construcciones mentales:

a) *Interpretación de inecuación*, vista como un ente matemático que es necesario interpretar y que es posible manipular empleando determinadas propiedades del conjunto de los números reales: operar, analizar equivalencias, verificar cuáles de los subconjuntos de $\Re$ satisfacen la inecuación

b) Según el punto de vista de *resolución*, es decir, qué tipos de transformaciones son permitidas, qué alteraciones sufrió el conjunto solución después de ellas, cuál es el mejor método para resolver una inecuación específica y cómo minimizar cálculos. Además, entender la resolución de una inecuación desde el punto de vista gráfico: qué funciones pueden ser utilizadas para que el esbozo gráfico represente la inecuación que se quiere resolver; o cuándo se deben comparar dos o más gráficos dados, analizando los signos de las imágenes. La resolución en el contexto gráfico, en muchos casos, sirve para intuir o también para encontrar el conjunto solución, siendo aún necesaria, dentro de algunas situaciones, la resolución algebraica.

Es necesario que el estudiante no emplee sólo las transformaciones adecuadas a la inecuación para alcanzar el conjunto solución, sino que también entienda en qué condiciones, así como las razones por las que tales transformaciones fueron empleadas y por qué funcionan. Lo ideal es que el estudiante tenga conciencia de la legitimidad de las transformaciones efectuadas y que establezca relaciones entre diversas inecuaciones transformadas, sean equivalentes o no. La capacidad de usar flexiblemente el concepto de inecuación depende, en gran parte, de la posibilidad de diferenciar e integrar las distintas formas en que el concepto y su resolución se manifiesten, es decir, reconocerlas, combinarlas de manera efectiva y tener seguridad para pasar de una forma a otra sin dificultades.

Los dos tipos de comprensión, *interpretación* y *resolución,* pueden surgir en conjunto; el estudiante puede relacionarlas fácilmente. No obstante, es posible, por un lado, encontrar estudiantes que interpreten una inecuación de manera muy superficial y no logren tener éxito en las resoluciones, sea en el contexto algebraico o en el gráfico (como se constata en el fragmento de la entrevista a Carlos), por otro, es posible encontrar aquellos que, aun sin interpretar una inecuación, tienen ciertas construcciones mentales que les permiten resolver varios tipos de inecuaciones principalmente en el contexto algebraico, pero de forma mecánica, ya que imitan procedimientos memorizados. Se espera que el estudiante sea capaz de trabajar simultáneamente con la interpretación y la resolución de la inecuación. Además, es posible encontrar estudiantes que consiguen resolver una inecuación en un contexto gráfico, independientemente de la comprensión algebraica.

En el siguiente fragmento, el joven Carlos piensa en dar valores a *x*. Intentó resolver la inecuación sólo dando valores uno por uno y no logró interpretarla ni solucionarla, ya que discernió únicamente de manera puntual. El fragmento corresponde a la resolución de $\sqrt{x+2} \leq x$.

Carlos: Estoy pensando lo siguiente: escogí un valor para x de manera que, sustituyendo en la raíz tendré una raíz exacta. Por ejemplo, consideré 7 en la raíz 7 + 2 = 9; entonces, sacando la raíz, dará 3 que es menor que 7. Así se satisface realmente la inecuación, con todos los valores positivos.

Después de muchas tentativas, eleva los dos miembros al cuadrado y nuevamente intenta la resolución dando valores.

Carlos: Entonces, tengo que dar valores a x en el primer miembro, de modo que sean siempre menores o iguales a x al cuadrado: ya definí que el segundo miembro será siempre positivo debido al cuadrado. Entonces, ¿qué valores son los que voy a tomar para x? Tengo la seguridad que son menores que cero.

Un estudiante puede mostrar un débil esquema en alguna de esas comprensiones, o en todas y, asimismo, tiene éxito en determinadas situaciones matemáticas que implican inecuaciones; sin embargo, tal logro será limitado y llegará el momento en que no podrá responder a ciertas situaciones matemáticas que impliquen inecuaciones. Esto obedece a que el esquema de inecuación implica el de interpretación de inecuación, el de resolución algebraica y el de resolución grafica.

Desgloso los esquemas por separado, resaltando las posibles relaciones entre ellos y cómo ocurren. Entiéndase que un esquema constituye una red de construcciones mentales conectadas por medio de posibles y a veces necesarias acciones para una verdadera comprensión del concepto. En la presentación de los esquemas se destacan las acciones.

A continuación, expongo los prerrequisitos básicos para el entendimiento del concepto de inecuación.

Interpretar y resolver en el contexto algebraico una inecuación, de manera general, requiere como prerrequisitos:

- Hacer una correspondencia 1-1 entre $\Re$ y el eje real
- Comprender la variable como incógnita, como número real y en una relación funcional (Trigueros,1997)
- Comprender nociones básicas de subconjuntos en $\Re$: unión e intersección de intervalos y los conectivos *y, o*
- Reconocer y emplear adecuadamente las propiedades del cuerpo ordenado $\Re$
- Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas y sus recíprocas, así como proposiciones *si y sólo si*
- Comprender los cuantificadores *para todo, existe*.

- Resolver una *inecuación en el contexto gráfico* necesita como prerrequisitos:
- Esbozar algunos tipos básicos de funciones, como cuadrática, cúbica simples (ejemplos: $f(x)=x^3$, $f(x)=x^3+1$), linear, raíz cuadrada, $f(x)=1/x$
- Leer e interpretar gráficos sin necesidad de sus respectivas expresiones algebraicas

Para los tres esquemas resulta muy importante la concepción de función que el estudiante posee, lo cual es posible constatar principalmente en los esquemas de interpretación y de resolución gráfica. Breidenbach define una *concepción acción de función* como “la habilidad de calcular y atribuir valores uno a uno en la expresión algebraica. Es una concepción estática, el individuo piensa un paso a la vez”. Una *concepción proceso de función* “(...) implica una transformación dinámica mediante la realización repetida de la misma operación. El individuo es capaz de pensar en la transformación como una actividad que se inicia con objetos de un tipo, se efectúan algunas acciones sobre él y se obtienen nuevos objetos como resultado de lo que se efectuó. En este caso, el individuo es capaz de combinar dos procesos o revertirlos” (Breidenbach, 1992).

El entendimiento de una función incluye la comprensión de dominio, imagen, operación de funciones —suma, resta, multiplicación, división—, composición de funciones y análisis gráfico.

Presento, de entrada, el esquema de interpretación, ya que sobre éste se construyen y desarrollan los otros. Ahora bien los estudiantes que consiguieron interpretar correcta y flexiblemente una inecuación tuvieron éxito tanto en las resoluciones algebraicas como en las resoluciones de *gráficos*. Quienes presentaron un débil esquema de interpretación fueron los que no pudieron resolver correctamente una inecuación.

4.1 El esquema de interpretación de inecuación

Acción

El estudiante posee una *concepción acción* si es capaz de atribuir valores particulares a la variable y verifica si satisfacen o no la inecuación. Al ser un procedimiento estático, sólo piensa en forma local y no consigue extender los valores de la variable. En caso de que el conjunto solución esté dado y si le se cuestiona sobre lo que sucedería si se sustituyera un determinado valor en la inecuación, no puede dar la respuesta en forma inmediata. Necesita hacer la sustitución y se comprueba que no está apto para interpretar y hacer uso del conjunto solución. Muestra, en suma, que posee un débil esquema de interpretación.

Todos los estudiantes a los que tomé como muestra presentaron también un débil entendimiento de la función en el nivel de concepción acción de interpretación. Por tanto, si el estudiante presenta el nivel de concepción acción de función es probable que posea el de concepción acción de interpretación de inecuación, lo cual evidencia el nexo el esquema de función con el de interpretación.

Proceso

El estudiante posee una *concepción proceso* si es capaz de discernir que una inecuación recibe una o más entradas o valores de variables independientes, ejecuta una o más operaciones en la entrada y obtiene valores booleanos: ejercita una dinámica. Asimismo, debe imaginar el proceso de asociar un número real a la variable en la inecuación, resultando un valor booleano, esto es, tal número satisface o no la inecuación. Si se le pregunta sobre lo que sucede al sustituir un determinado valor en la inecuación, utiliza el resultado del conjunto solución para responder correctamente y de manera rápida; además, puede leer la inecuación de derecha a izquierda e interpretarla en tal dirección.

Así, cuando reconoce que $x^2+1>0$ para cualquier x real, que $-x>0$ para todo $x<0$ y que $\sqrt{x+1}>0$ para $x+1>0$, tiene una *concepción proceso* de interpretación.

En este caso, la lectura del conjunto solución forma parte del esquema de interpretación del estudiante, quien conoce el significado de conjunto solución. Si presenta el nivel de concepción proceso de función, entonces muestra una tendencia a presentar el de concepción proceso de interpretación.

Objeto

La primera característica de una *concepción objeto* es sumamente importante para la ejecución de acciones e incluso puede ser considerada esencial para entender el concepto de inecuación. Un estudiante posee una concepción objeto si:

a) Aplica las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales a las inecuaciones, particularmente si diferencia las propiedades que pueden ser aplicadas a una ecuación de las correspondientes a una inecuación. También consigue emplear tales propiedades siempre que la situación matemática las solicite, tanto en la resolución como en la interpretación de inecuaciones
b) Responder cuestiones sobre la solución de la inecuación sin resolverla realmente
c) Opera dos o más inecuaciones y explica su método
d) Analiza implicaciones y equivalencias entre inecuaciones.
e) Visualiza las inecuaciones desde el enfoque de las funciones

En muchas circunstancias observé que varios universitarios eran capaces de analizar equivalencias e implicaciones sólo dando valores. Otros iban más allá, ya que analizaban la inecuación de manera global, hacían uso de la interpretación de la variable como incógnita y empleaban propiedades de los números reales (primera característica presentada en la concepción objeto de inecuación). Sin embargo, el solo hecho de dar valores para responder si había equivalencia entre las inecuaciones no los posibilita a entender y hacer uso de este entendimiento, por ejemplo, en la resolución algebraica de inecuaciones.

El estudiante que logra analizar equivalencias entre las inecuaciones que van siendo obtenidas y halla el conjunto solución muestra coherencia para la interpretación y resolución de inecuaciones. Las inecuaciones analizadas van siendo obtenidas a partir de la inecuación inicial y del empleo de las propiedades de $\Re$

El estudiante Zezé explica de manera global la no equivalencia. Hace uso de las propiedades de orden de los números reales y hace notorio su entendimiento de la variable como incógnita y una fuerte coherencia al emplear propiedades de los números reales, ya que analiza las transformaciones y equivalencias. Fue uno de los pocos estudiantes que presentó la concepción objeto de interpretación, concepción objeto de resolución algebraica y gráfica, y buen entendimiento del concepto de función.

Problema: Para todo número real x, $x \neq 2$, $\frac{x^2+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2+1 > 3(x-2)$.

El estudiante necesitaba analizar la equivalencia y contestar si era verdadera o falsa.

Zezé: Esta expresión implica que x^2 más uno es mayor que tres, que multiplica a x menos 2, y esta expresión implica a la otra. Pero vimos que no es así, porque x menos dos es una variable que no sabemos si es positiva. La verdad, puede asumir valores positivos y negativos: podría alterar el signo de esta inecuación.

En otro momento de la entrevista observé que Zezé era capaz de usar su esquema de interpretación de inecuación en los de de resolución algebraica y gráfica. Veamos su empleo del esquema de resolución algebraica. Él interpreta de manera global la no equivalencia.

Zezé: Es... Y aquí implicaría lo mismo (...) viniendo de derecha a izquierda implicaría lo mismo... cómo puedo decir... ¿Del mismo modo, no? Porque yo no podría pasar dividiendo o multiplicando los dos, en ambos miembros, por uno sobre x menos dos que tampoco sabemos si es positivo o negativo, porque es una variable y puede asumir ambos valores positivo o negativo.
E: Entonces, ¿qué es lo que puede concluir en este problema?
Zezé: Que es falso.
E: ¿Que es falso?
Zezé: Que no, no implica, (...) podría (...) que uno no implica el otro y viceversa, ¿no es verdad? Por causa de esa (...) tendría que ser hecho de otra manera.
E: Pero el contraejemplo aquí (*apuntando la evaluación escrita*) (...)...
Zezé: Es el (...) 3 es mayor que menos 3...Lo que pasa es que dimos un valor que satisface una inecuación, lo sustituimos en la otra, y no satisfizo la otra inecuación, eso quiere decir que una no implica la otra.

A fin de detallar las construcciones mentales, presento algunos ejemplos de preguntas para las características b) y c) y las acciones que el estudiante debe ejecutar en las inecuaciones involucradas en problemas de esa índole . Tales ejemplos proporcionan un medio para detectar características de una concepción objeto de interpretación y sólo los estudiantes que la tengan son capaces de resolverlos. Resalto que los ejemplos no son únicos.

Para la característica **b)**:

1-Si [-2, 3.2] es solución de $f(x) \geq 0$, ¿cuál sería el conjunto solución de $f(x+3) \geq 0$?
2. Dado $x^2+1 \leq ax+b$, encuentre “a” y “b” de tal manera que esta inecuación posea:
i un número infinito de valores para x
ii un único valor para x

Para resolver cualquiera de estos problemas, el estudiante necesita presentar una concepción proceso de interpretación y una de proceso de función. Para el problema **1**, necesita ejecutar:
- Acción mental: Que *comprenda* el conjunto solución como subconjunto del dominio de una función relacionada con la inecuación. Debe poseer una concepción proceso de función y que la relacione con una concepción proceso de inecuación, siendo entonces capaz de hacer las siguientes identificaciones:

$$\textit{Inecuación} \longleftarrow f(x) \longrightarrow \textit{función}$$

y

Conjunto solución de la inecuación ⟵ x ⟶ *dominio de la función*
Conjunto solución de la inecuación ⟵ $x+3$ ⟶ *dominio de la función*

- Acción: *Que realice operaciones en el conjunto solución* (suma, resta, multiplicación, división).

En este nivel de construcción mental, el estudiante es capaz de proceder a la resolución mediante un análisis gráfico. Interpreta el grafico, luego el nuevo dominio y la solución como una traslación de 3 unidades hacia la izquierda del gráfico en cuanto la imagen no cambia. Se observa una relación con el esquema de función, pues trabaja con composición de funciones, operaciones con funciones, entendimiento de imagen y dominio.

Con respecto al problema **2***:*

- Acción mental*: visualizar el proceso de resolución encapsulado de tal forma que sea posible* pensar en la resolución de varias inecuaciones, pero sin resolverlas. *Comprender el significado de los parámetros* significa comprender que hay una familia de recta según los valores de los parámetros
- Acción: *trazar* gráficos. *Detectar intersección de los gráficos* x^2+1 y $ax+b$ y a partir de ahí *encontrar un valor para los parámetros a y b* que satisfaga la cantidad de soluciones. El estudiante percibe la necesidad de que exista una parte del gráfico de la parábola para que la inecuación tenga infinitas soluciones, situada abajo del gráfico de la recta. A fin de que haya una sola solución, percibe que el gráfico de la recta sólo debe tocar en un punto a la parábola.

Esta es una de las maneras en que se puede resolver el problema. Por tanto, el estudiante que lo solucione de esta manera alcanza una concepción objeto, debido a que es capaz de contestar muchas preguntas que impliquen interpretación del conjunto solución y muestra que puede tanto interpretar bien una inecuación paramétrica como hacer uso correcto de los recursos gráficos. Así, vemos nuevamente la necesidad de conectar el esquema de interpretación con el de función.
Ejemplo para la característica **c)**:

Pruebe que:

$$\text{si } 1{,}3 \le x \le 1{,}5 \quad \text{y} \quad 2{,}6 \le y \le 2{,}8 \ , \quad \text{entonces} \quad 1{,}1 \le y - x \le 1{,}5$$

Los problemas que entroncan en tal categoría están relacionados con la interpretación de inecuaciones y el empleo de propiedades de orden de los números reales: no se relacionan con la resolución de inecuación en sí. Aquí la concepción objeto se alcanza cuando se ejecutan acciones en el proceso de interpretación (inecuación interpretada en el nivel concepción proceso) como, por ejemplo, multiplicar un proceso de interpretación de inecuación por (-1) o actuar sobre uno o más procesos de interpretación, transformándolo en otro[3], como por ejemplo, sumarlos o multiplicarlos.

[3] Aquí hago una observación: hay una diferencia entre ejecutar una acción sobre el proceso y otra haciendo uso de él: multiplicar un proceso de interpretación por -1 es diferente a sumar dos procesos de interpretaciones. En la resolución de inecuación es posible hacer la siguiente diferencia: considerar un proceso de interpretación y emplear las propiedades de los números reales en él, así como considerar las posibles equivalencias entre estos procesos y coordinarlos. La diferencia básica sería actuar, ejecutar acción ***en** el* proceso y actuar, ejecutar acción ***con*** el proceso ***(o haciendo uso de varios)***.

El estudiante necesita ya poseer una concepción proceso de interpretación y ponerla en juego:

- Acción: *emplear propiedades* de los números reales como, por ejemplo, ‘ $a < b$, $c < 0$; entonces $ac > bc$ ’ y ‘ $a < b$, entonces $1/a > 1/b$ si $a > 0$ y $b > 0$ ’, entre otras
- Acción mental: *analizar el resultado*, si tiene significado o no

En este nivel, el joven es capaz de interpretar las inecuaciones en el contexto gráfico relacionando el esquema de interpretación con el de función.

A continuación, presento las construcciones mentales necesarias para que un estudiante, consciente de sus pasos y acciones, resuelva una inecuación.

4.2. El esquema de resolución de inecuaciones

4.2.1 Resolución algebraica de inecuaciones

Para resolver una inecuación, el estudiante debe poseer concepciones objeto de interpretación y de resolución de inecuación. Si utiliza su esquema de interpretación logrará pisar, con seguridad, caminos que lo llevarán a una resolución correcta. Esto, significa, básicamente, que emplee de manera coherente su concepción proceso de interpretación, las propiedades de los números reales y, cuando sea necesario, coordine varios procesos.

Es posible hallar diversos niveles de comprensión para una resolución. Hay estudiantes que no logran resolver nada, a pesar de intentar usar varias estrategias; otros resuelven pero de forma muy mecánica, ya que imitan métodos memorizados, y no comprenden ni justifican la técnica utilizada. Unos más, a pesar de poseer noción sobre los pasos seguidos, todavía no tienen total conciencia de ellos, mientras que otros tienen total dominio de los pasos seguidos y de las transformaciones efectuadas, obteniendo éxito en la resolución. Presento a continuación las construcciones mentales.

Pre-acción

Un individuo posee una concepción pre-acción cuando:
- Intenta resolver una inecuación como si fuese una ecuación
- Posee algún algoritmo de resolución, de ahí que no consiga llegar a una solución completa y a veces ni parcial

El estudiante que intenta resolver una inecuación como una ecuación aparenta poseer una débil coherencia.

Acción

El estudiante posee una concepción acción cuando se limita a poseer algún algoritmo de resolución para determinados tipos de inecuaciones y logra encontrar el conjunto solución, pero no consigue justificar la validez del algoritmo utilizado. Aquellos que se delimitan a una concepción acción pasan a considerar como esencia real del álgebra la ejecución de secuencias de manipulación simbólica y no su validez como consecuencia del empleo de las propiedades de los reales. Aquí, está ceñido a entender la resolución algebraica de inecuación como un conjunto de pasos memorizados.

Proceso

El estudiante que presenta una concepción proceso:
- Narra correctamente los procedimientos de resolución de diferentes tipos de inecuaciones, sin ejecutarlos necesariamente (capacidad notada sólo durante la entrevista)

- Encuentra el conjunto solución de diversos tipos de inecuaciones y consigue interiorizar la acción, esto es, reflexiona sobre sus acciones. Los pasos que sigue ya no son completamente automáticos; hay una desconfianza sobre la equivalencia entre las inecuaciones transformadas. Es capaz de verificar si la equivalencia fue mantenida o no, mas no consigue generalizar su análisis utilizando las propiedades de los números reales y coordinando otros procesos. También puede resolverlas si deja siempre la variable en la derecha.

Al poseer esta concepción, el estudiante comienza a darse cuenta de que hay transformaciones efectuadas en determinadas inecuaciones que alteran el conjunto solución, pero aún no consigue coordinar otros procesos de inecuación ni relacionar ciertas transformaciones obtenidas con las propiedades utilizadas.

Objeto

El individuo posee una concepción objeto si es capaz de efectuar pasos de resolución de forma consciente. Analiza las equivalencias, hace uso de la interpretación de la variable y actúa sobre los procesos (emplea propiedades de los números reales, coordina otros procesos e intercepta o une varios conjuntos-solución de procesos coordinados).

El individuo que posee tal concepción puede seleccionar otro método de resolución, cuando es posible, además del que haya escogido. Hace uso de procedimientos para agilizar la solución, así como emplea correcta y adecuadamente las propiedades de los números reales.

Para la resolución es necesario que efectúe una conexión con el esquema de interpretación de inecuación, que interprete la inecuación inicial, al menos, en el nivel de proceso (véase concepción proceso de interpretación). Por ejemplo:

- Reconoce que $x^2+1>0$ para cualquier x real
- Percibe que hay un subconjunto de los números reales que satisface la inecuación $(x+1)(x-3)>4$ y que ésta no puede contener el valor 3 ni -1. Asimismo, poseer una concepción proceso de interpretación significa dar una interpretación correcta del conjunto solución, como lo expuse anteriormente.

Enseguida, el estudiante debe ser capaz de ejecutar una acción o coordinar procesos –lo cual se da fundamentalmente a través del nexo con el esquema de función–, operar dos o más funciones, así como de interpretación, esto es, el empleo de las propiedades de orden de los números reales.

Como ejemplos de las conexiones, tenemos:

1. Dado $x^3+4x^2-x<0$, el estudiante coloca en evidencia x, obteniendo $x(x^2+4x-1)<0$. Coordina los procesos x y (x^2+4x-1), analiza y combina las posibilidades de signos para ellos.

2 - Dado $\dfrac{x+1}{x-3}>4$, el estudiante ejecuta acciones empleando propiedades de los números reales como sumar (-4) en ambos miembros, obteniendo la inecuación: $\dfrac{-3x+13}{x-3}>0$

Después de haber realizado la primera transformación, o algunas (coordinando procesos o aplicando acciones), el estudiante debe cuestionar lo que sucede en el conjunto solución. ¿Fue alterado o no, y por qué? ¿Ya es conjunto solución final o no? Si fue alterado, todavía necesitará coordinar otros procesos. Nuevamente vemos la relación con el esquema de interpretación, ya que hay la necesidad del entendimiento de conjunto solución y de análisis de las equivalencias y las implicaciones.

Damos el siguiente ejemplo:

Al trabajar en la resolución de $\sqrt{x+2} \leq -x$, el estudiante, después de elevar al cuadrado, obtiene $x+2 \leq x^2$. Cuando reconoce que el conjunto solución fue alterado, entonces debe coordinar la solución de esa nueva inecuación con los procesos $-x \geq 0$ y $x+2 \geq 0$.

A partir de ahí, considero que las construcciones mentales son: emplear propiedades de los números reales; coordinar procesos, interceptar, y unir, si es necesario, el conjunto solución de la inecuación transformada con conjuntos solución de procesos coordinados; cuestionar sobre las alteraciones del conjunto solución ante las transformaciones obtenidas, con la pregunta ¿es el conjunto solución final? Si la respuesta es negativa, hay que seguir aplicando acciones, coordinar procesos o ambos. En suma, emplear acciones en procesos de interpretación de inecuación, coordinar procesos o ambas cosas.

El estudiante, al cuestionar la alteración del conjunto solución, obtenido a través de esas transformaciones, necesita *desencapsular* el objeto en proceso. Para retornar al proceso del que se originó el objeto, el estudiante nuevamente deberá hacer uso de las propiedades de orden de los números reales. A tal método se le llama *desencapsular* porque el análisis de la alteración del conjunto solución es efectuado tras haber aplicado acciones en procesos o coordinado.

Un aprendiz que posee tales construcciones mentales tiene un fuerte esquema de resolución algebraica de inecuaciones. Al cuestionar la relación entre las transformaciones efectuadas y sus conjuntos solución, recurre a su esquema de interpretación, al menos a la concepción proceso y al empleo de las propiedades de los reales. Las interconexiones entre la resolución y la interpretación de una inecuación son, básicamente, la interpretación de la inecuación inicial, al menos en el nivel proceso, la ejecución o coordinación de acciones en esos procesos (o ambas cosas) y el análisis de las inecuaciones transformadas a fin de obtener el conjunto-solución.

El estudiante Carlos, de cuya entrevista ya presenté un fragmento, es un ejemplo de quien posee una concepción acción de interpretación y pre-acción de resolución de inecuación, mientras que Zezé es una muestra de quien posee concepción objeto de interpretación y de resolución algebraica.

4.2.2 El esquema de resolución gráfica de inecuaciones

Presento dos problemas que fueron utilizados para analizar las construcciones mentales que los estudiantes poseen al resolver –o intentar resolver– una inecuación en el contexto gráfico. Resalto que no agotan los tipos de problemas que pueden ser elaborados con el objetivo de desarrollar determinadas construcciones mentales en tal contexto. Como los dos problemas involucran diferentes estructuras mentales de resolución, surge la necesidad de analizarlos por separado.

1. Resolución de una inecuación cuyas funciones incluidas son expresadas sólo gráficamente, en el mismo sistema de coordenadas. Por ejemplo, encontrar el conjunto solución de la inecuación $f(x) \times g(x) \geq 0$

Con formato: Numeración y viñetas

Figura 2

2. Comparar imágenes de funciones a través de gráficos, sin sus expresiones algebraicas. Por ejemplo, encontrar el conjunto solución de la inecuación $f(x) < g(x)$, donde están dados los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$

Con formato: Numeración y viñetas

Figura 3

El esquema de función influye mucho en el desempeño del estudiante cuando emprende actividades que involucran la resolución algebraica. Durante la descripción de las estructuras mentales, destaco dónde y cómo necesita recurrir al uso de tal esquema.

Muestro a continuación las construcciones mentales para la actividad **1**.
Pre-acción

Considero que un individuo posee una concepción *pre-acción* cuando
- Se limita a analizar los signos que las funciones deben satisfacer. En este nivel no es capaz de coordinar dos o más procesos de función, $f(x)$ y $g(x)$, y evidencia un débil esquema. No consigue obtener éxito en la resolución de la inecuación solicitada y, en muchas situaciones, necesita de la expresión algebraica del gráfico e intenta encontrarla.

Por ejemplo, en la actividad **1**, el estudiante se limita a entender que las posibilidades para $f(x)$ y $g(x)$ son positivas o ambas negativas; además, por lo menos, una de ellas nula. No es capaz de establecer una relación de las posibilidades de signos con sus respectivas imágenes en el gráfico.

Acción
Un aprendiz presenta una concepción *acción* cuando:
- Atribuye, en el gráfico, puntos aislados para analizar las variaciones de las imágenes de las funciones y examina, en la inecuación, posibilidades de signos (positivo o negativo) para las imágenes de las funciones incluidas.

El estudiante comprende el concepto de función[4] bajo una concepción acción y enlaza dos concepciones acción de funciones. Relaciona el dominio con la imagen sólo para puntos aislados, no piensa en términos de intervalos ni relaciona el análisis de los valores obtenidos en el gráfico con el de los signos de las funciones involucradas en la expresión de la inecuación. En la actividad **1**, por ejemplo, atribuye en el gráfico valores para el dominio de f y de g, reconoce las posibilidades de signos para las imágenes de las funciones f y g en la expresión $f(x)\times g(x)<0$, pero aún no logra coordinar los dos tipos de representaciones de una inecuación: gráfica y algebraica.

Aquí, el esquema de interpretación del estudiante implica sólo la concepción acción. Su comprensión es motivada exclusivamente por la óptica puntual y parece que no enlaza coherentemente, en el contexto gráfico, su esquema de función con el de resolución gráfica.

Proceso
Un estudiante que tiene una concepción mental proceso:
- Visualiza e identifica, en el gráfico, que existen subconjuntos del dominio que vuelven las imágenes positivas o negativas
- Percibe, en la inecuación, que hay subconjuntos del dominio que tornan positivas o negativas las imágenes de las funciones involucradas en la inecuación

Además, es capaz de coordinar dos procesos de función; no obstante, todavía no relaciona las dos construcciones mentales indicadas arriba para que lleve a cabo la intersección y/o la unión de los intervalos (subconjuntos de $\Re$) encontrados: visualiza las raíces y las intersecciones, pero no sabe qué hacer con ellas. En tal circunstancia, el estudiante aún no presenta una coherencia adecuada para incluir la resolución gráfica en su esquema de inecuación; sin embargo, parece encaminarse para lograrla.

[4] Véanse los prerrequisitos.

Objeto

Un estudiante posee una concepción objeto si:

- Visualiza e identifica, en el esbozo gráfico, subconjuntos del dominio que hacen las imágenes positivas o negativas

- Visualiza, en la inecuación, subconjuntos del dominio que hacen las funciones positivas o negativas

- Coordina dos procesos de función, logra relacionar las dos construcciones mentales de arriba y hace las intersecciones y/o las uniones de los intervalos encontrados. Las *acciones mentales* necesarias son:

- *Localizar las raíces de* $f(x)$ y $g(x)$

- *Relacionar*

Signo de f(x) en la expresión f(x)g(x) ≥ 0 ⟷ *posicionamiento gráfico del signo de f(x)* ⟷ *intervalo asociado*

y

Signo de g(x) en la expresión f(x)g(x) ≥ 0 ⟷ *posicionamiento gráfico del signo de g(x)* ⟷ *intervalo asociado*

- *Interceptar y unir* intervalos resultantes de esas relaciones

Otro resultado que atañe a la enseñanza-aprendizaje de resolución de inecuaciones en el contexto gráfico es que el desempeño y las construcciones mentales del estudiante no se alteran, estén o no los gráficos trazados en el mismo sistema de coordenadas.

El estudiante Valdo dio muestras de poseer una concepción objeto de interpretación, de resolución gráfica y algebraica. En el fragmento de la entrevista transcrita más adelante, visualiza e identifica, en el esbozo gráfico y en la inecuación, subconjuntos del dominio que hacen las imágenes positivas y negativas, al igual que puede conectar las dos visualizaciones, halla las raíces y el conjunto solución. Fue uno de los pocos estudiantes que logró resolver este problema.

.- Dados los gráficos de las siguientes funciones f y h, encuentre el conjunto solución de $f(x)h(x) < 0$

Figura 4

Valdo: Si se analiza la inecuación, la f de x multiplicada por la h de x, ¿la f de x sólo podrá ser lo que dé menor que cero? Positiva, y h de x negativa, o entonces la f de x negativa y h de x positiva para obedecer la inecuación que es menor que cero. En el análisis de las dos gráficas, las dos funciones para f de x positiva y h de x negativa solamente tenemos la solución aquí entre a y b

Durante la actividad **2,** una concepción *pre-acción* se caracteriza cuando el estudiante intenta encontrar las expresiones algebraicas involucradas. En la noción de *acción* se limita a atribuir valores, uno a uno, y compara las funciones puntualmente, haciendo un procedimiento estático, mientras que en la de *proceso* interioriza la acción de atribuir valores puntuales y pasa a razonar en términos de la existencia de subconjuntos de los dominios, donde las imágenes de las funciones puedan ser comparadas. Así, halla intervalos tales que la imagen de una función es mayor o menor que la otra a través de un procedimiento dinámico, global. No obstante, aún no es capaz de encontrar la solución.

Para poseer una concepción *objeto* es necesario ejecutar las siguientes *acciones*:

- Localizar las intersecciones entre $f(x)$ y $g(x)$.

- *Coordinar*

Representación gráfica $\longleftrightarrow$ *expresión de la inequación por ejemplo f(x)<g(x)*

- *Identificar l*os subconjuntos del dominio de una de las funciones, que satisfacen la inecuación

En el ejemplo en el que se pide la identificación de los subconjuntos de la función $\boldsymbol{f}$ que hace su imagen menor que la imagen de $\boldsymbol{g}$, tal acción en general es realizada a partir de la identificación de las posibles *intersecciones* entre los gráficos.

- *Unir* los intervalos en cuestión

Aquí, el estudiante logra, conscientemente, enlazar su esquema de función, incluyendo la representación gráfica de las funciones, a su esquema de resolución gráfica de inecuación.

La resolución gráfica también puede ser vista bajo la perspectiva solucionar, por medio de gráficas, una inecuación presentada de forma algebraica. Es importante que el estudiante tenga acceso a una computadora o a una calculadora gráfica, y sepa utilizar recursos para esbozos gráficos. Por lo general, en inecuaciones que involucran funciones de primer y segundo grado, muestra facilidad para hacer uso de esta estrategia de resolución. Si consigue hacer uso de tal método, con las funciones de primer y segundo grado, considero que posee una concepción proceso de resolución gráfica.

Además de identificar las funciones que quisiera analizar a través del esbozo gráfico y del trazado de los respectivos gráficos, el estudiante necesita poseer estructuras mentales que le permitan encontrar la solución (son las mismas citadas anteriormente, dependiendo del tipo de actividad a la que se propone). En ciertas situaciones, necesita coordinar las construcciones mentales de resolución gráfica con las de índole algebraica. Tal situación puede surgir cuando cambia la inecuación inicial a través de acciones o procesos, o ambos, y después de algunas transformaciones opta por continuar la resolución en forma gráfica. Aquí, el esquema de resolución algebraica y el de resolución gráfica están conectados. Sin embargo, no tengo la intención de explorar tal enfoque.

5- Conclusiones

La investigación sobre las actividades cognitivas que lleva a cabo el estudiante cuando intenta comprender el concepto de inecuación es un proceso "dialéctico". Por un lado, para que presente *un fuerte esquema de resolución*, tanto en el contexto algebraico como en el gráfico, debe tener uno *fuerte de interpretación*, el cual debe implicar todas las características que atañen a una concepción objeto. Por otro, si el estudiante posee un *fuerte esquema de interpretación*, su comprensión de tal concepto debe implicar también todas las características apuntadas en una concepción objeto de resolución, sea en el contexto gráfico o en el algebraico.

El esquema de interpretación resulta fundamental para el alargamiento del esquema de resolución y, a su vez, colabora en su propia expansión. Ahora bien, el estudiante puede iniciar sus estudios de tal forma que su comprensión esté en el nivel de una concepción acción de interpretación y al intentar resolver una inecuación, aunque posea también un frágil esquema de resolución, pueda abstraer datos, relacionar y coordinar contenidos, de tal forma que sus construcciones mentales se vuelvan mas elaboradas y mejore su interpretación del concepto y su comprensión de la resolución.

Pongo énfasis, entonces, en que un fuerte esquema de resolución está fundamentado en el esquema de interpretación del individuo, que debe abarcar una concepción objeto. Así, el esquema de inecuación necesita involucrar el de interpretación y el de resolución algebraica y gráfica. Sin embargo, el esquema de función es imprescindible para el entendimiento del concepto inecuación, como es posible percibir en las conexiones y relaciones destacadas anteriormente (*Figura* 5).

Figura 5

Hay que valorar las oportunidades de estudio de ese concepto para el desarrollo del pensamiento matemático y cambiar la manera de enseñar las inecuaciones. Es necesario proponer actividades, basadas en el esquema de inecuación, que involucran la interpretación y las resoluciones no sólo algebraicas, valorando el análisis de las implicaciones y equivalencias, sino también resoluciones *gráficos*[5] que propicien el pensamiento flexible, al considerar esas visiones relacionadas. Las actividades deben contener también el concepto de parámetro, distancia y todas las nociones matemáticas presentadas en los prerrequisitos.

Bibliografía

Albert, A., Arrieta, J. y Farfán, R. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Alvarenga, K. B. (1999). Inequações- uma pesquisa de doutorado em andamento. *Revista da III Jornada de Produção* Científica *das Universidades Católicas do Centro-Oeste.* Vol II, Goiânia, setembro, 77-83.
Asiala, M., Brown A., Devries, D.J., Dubinsky E., Mathews D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematical Education* 6, 1-32.
Boero, P. (1998). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifis. In: Jean-Philippe & Maryse Maurel, *Actes des Séminaires-SFIDA X,* VOL. III, Genova, l'IREM de Nice, X 3-7.
Breindenbach, D., Dubinsky, E., Hawks.J.& Nichols D. (1992). Development of the process of function. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, 247-285.
Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). The schema Triad – A calculus example. *Journal for Research in Mathematics Education*, November.
Clark J., Cordero F., Cotrill J., Bronislaw C., DeVries D. J., St. John D., Tolias G. & Vidakovic D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14 (4).
Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, vol. 8, No.3, 24-41.
Dubinsky, E. (1995). "A programming Language for Learning mathematics". *Communication on Pure and Applied Mathematics*, vol. 48, 1-25.
DeVries, D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2001.
Piaget, J. (1972). *The principles of Genetic Epistemology* (W. Mays trans.) London: Routledge & Kegan Paul (original published in 1970).
Tall, D. O & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
Trigueros, M. & Ursini, S. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with

5 Para las actividades de resolución gráfica, el lector puede consultar el libro de Albert y Farfán (1997).

starting college students. *Proceedings of the XXI PME International Conference*, Finland.
Vergnaud G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2, november, 31-41.

Figura 1

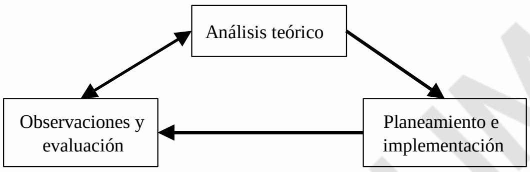


Figura 2

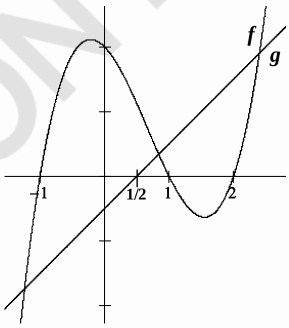


Figura 3

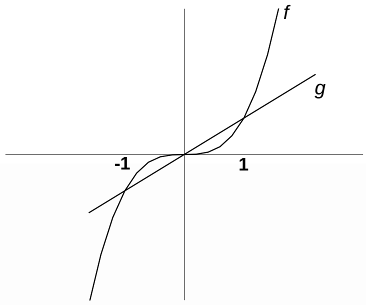


Figura 4

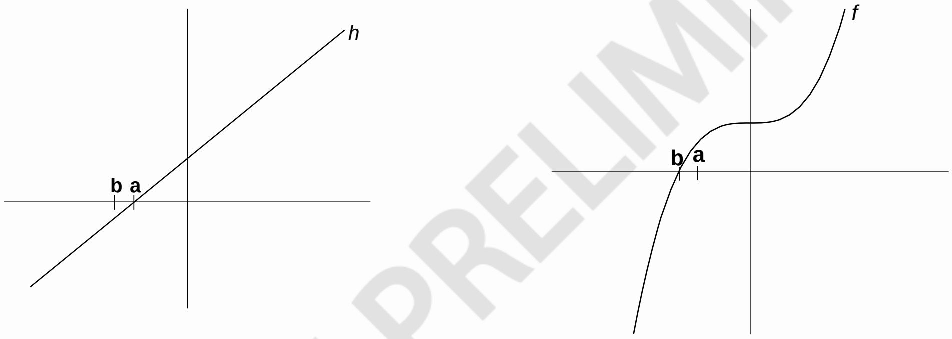
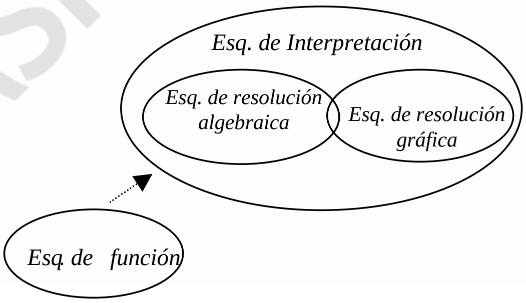


Figura 5

Esquema de inecuación



Karly Barbosa Alvarenga
SQN 411 bloco E apartamento 101.
Brasilia-Brasil
(55) 61 273 0822
karly@pos.ucb.br