Relime Vol.8, Núm.2, julio, 2005, pp. 219-235

Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada

Gisela Montiel Espinosa[1]

RESUMEN

Este documento sintetiza los resultados de una investigación (Montiel, 2002) que trata sobre las interacciones del sistema didáctico en un escenario virtual, particularmente cuando docentes de matemáticas en servicio confrontan sus nociones alrededor de la derivada en situación escolar. Reportaremos, con fundamento en la aproximación *socioepistemológica* y sobre la base de la evidencia empírica, cómo se logra una situación de aprendizaje alrededor del concepto de derivada, vista como la organización de las variaciones sucesivas.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología, contrato didáctico, sistema didáctico, situación problema, modalidad en línea, asíncrono, diseño instruccional.

ABSTRACT

This paper synthesizes the results of an investigation work (Montiel, 2002) about the didactic system's interaction, when these are carried out in an education scenario at distance. We report, within the socioepistemological framework and empirical evidence, how a derivative learn situation can be develop, taking this (the derivative) like variations successive organization.

KEY WORDS: Socioepistemology, didactic contract, didactic system, problem situation, on line model, asynchronous, instructional design.

Interações em um cenário em linha. O papel da sócio - epistemologia na resignificação do conceito de derivada

RESUMO

Este documento sintetiza os resultados de una investigação (Montiel, 2002) que trata sobre as interações do sistema didático em um cenário virtual, particularmente quando docentes de matemática em serviço confrontam suas noções sobre a derivada em situação escolar. Reportaremos, com fundamento na aproximação *sócio - epistemologica* e sobre a base da evidencia empírica, como obtém-se uma situação de aprendizagem sobre o conceito de derivada, vista como a organização das variações sucessivas.
PALAVRAS CHAVES: Sócioepistemologia, contrato didático, sistema didático, situação problema, modalidade em linha, assíncrono, desenho instrucional.

RÉSUMÉ

Ce document synthétise les résultats d'une recherche (Montiel, 2002), qui traite des interactions du système didactique sur une scène virtuelle, tout particulièrement lorsque les professeurs de mathématique en service sont confrontés aux notions de la dérivée en milieu scolaire. Nous ferons un rapport sur le fondement de l'approximation *socioépistémologique* en se basant sur l'évidence empirique, en établissant comment on obtient une situation d'apprentissage autour du concept de dérivée, vue comme l'organisation des variations successives.

MOTS CLES: socioépistémologie, contrat didactique, système didactique, situation et

Fecha de recepción: Noviembre de 2004/ Fecha de aceptación: Marzo de 2005

[1] Posgrado en Matemática Educativa. CICATA del IPN.

problème, modalité en ligne, aynchrone, conception instructionnelle.

PRESENTACIÓN

En tres décadas la Matemática Educativa se ha consolidado como la disciplina científica dedicada al estudio de los fenómenos relacionados con la enseñanza – aprendizaje de la matemática escolar. En el trayecto se han constituido aproximaciones teóricas y líneas de investigación, de donde hoy surgen nuevos problemas, publicaciones, programas de formación e investigación, propuestas de reforma, entre muchos otros resultados. Como todo trabajo científico, estas aproximaciones y líneas de investigación han evolucionado gracias a los resultados que generan las comunidades académicas.

El presente trabajo se ubica en lo que Cantoral y Farfán (2003) han denominado una *didáctica en escenarios socioculturales*, y con ello retomamos de la Teoría de Situaciones Didácticas las componentes epistemológica, cognitiva y didáctica al acercamiento a los fenómenos didácticos, incorporando el carácter social de la construcción de conocimiento matemático y sus prácticas de referencia. Si bien se caracterizan los episodios de interacción en espacios de la modalidad educativa *en línea* y los fenómenos didácticos propios de la *virtualidad*, el énfasis está en el funcionamiento del sistema didáctico.

Profesor, estudiantes y conocimiento matemático en juego interactúan en forma sistémica, y conforman la unidad mínima de análisis, es decir, se convierten en la célula indivisible que hemos de analizar para entender el funcionamiento de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, hemos de describir nuestro sistema particular para entender los fenómenos que surgen al abordar, resolver y discutir la *situación problema* en juego.

EL MILIEU

Brousseau, en la Teoría de Situaciones Didácticas, describe el *milieu* como el medio donde actúa el estudiante y aprende por adaptación, incluyendo todo aquello que afecte la actividad didáctica, y que a su vez sea susceptible de ser afectado. Sin embargo, aquello que se controla en el aula juega un papel prioritario en el diseño de la situación problema, y de ello constituirá la descripción de nuestro *milieu*.

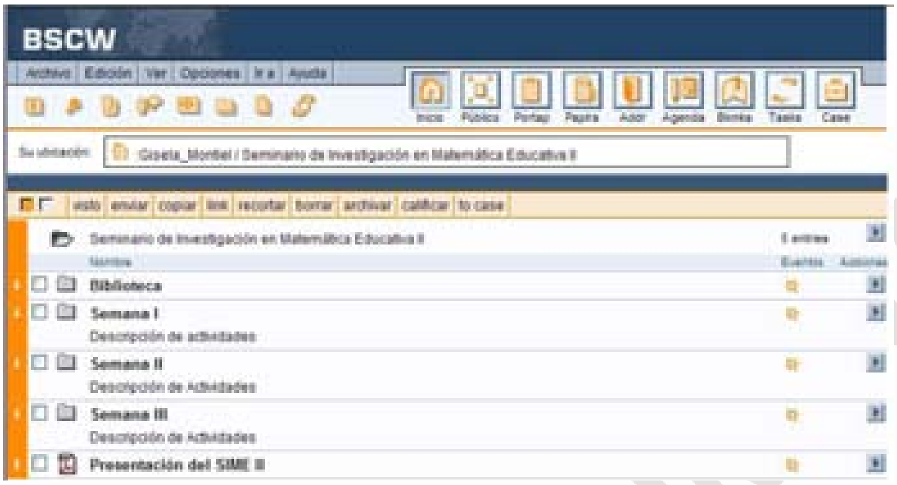
Los episodios analizados se cobijaron institucionalmente por un Programa de Posgrado, el Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del CICATA del IPN[2], en la modalidad en línea y dirigido a docentes de matemáticas en activo, de distintas nacionalidades y en su mayoría de nivel medio superior. Con ello queremos resaltar el ambiente institucional que influye en el comportamiento de los actores del sistema didáctico. Por ejemplo, los docentes inscritos en el posgrado, juegan el doble papel de estudiante y docente, en tanto tratan con contenidos matemáticos conocidos, que algunos dominan más que otros, y discuten fenómenos escolares que viven día a día, pero confrontando los datos empíricos con explicaciones y modelos teóricos en su mayoría desconocidos. El conocimiento de que sus compañeros de clase son docentes en activo al igual que ellos provoca una reflexión individual profunda previa a la exposición de resultados, ello implica tiempos y una dinámica diferente en la resolución de situaciones problema. Como estudiantes en un ambiente escolar, saben que sus trabajos (reportes de lectura, ensayos, resolución de ejercicios, reportes de experimentación en aula, entre otros) y participaciones (en foros de discusión internos y eventos académicos externos) constituyen la producción a evaluar en sus cursos y seminarios, y en ocasiones atienden a las peticiones del profesor sólo como *adhesión al discurso*[3].

UN ESCENARIO EN LÍNEA

El ambiente tecnológico donde se llevó acabo el Seminario de Investigación en Matemática Educativa II –SIME II- fue la plataforma de trabajo BSCW (Basic Support for Cooperative Work) que facilitó el trabajo a través de Internet, organizando los contenidos del seminario en

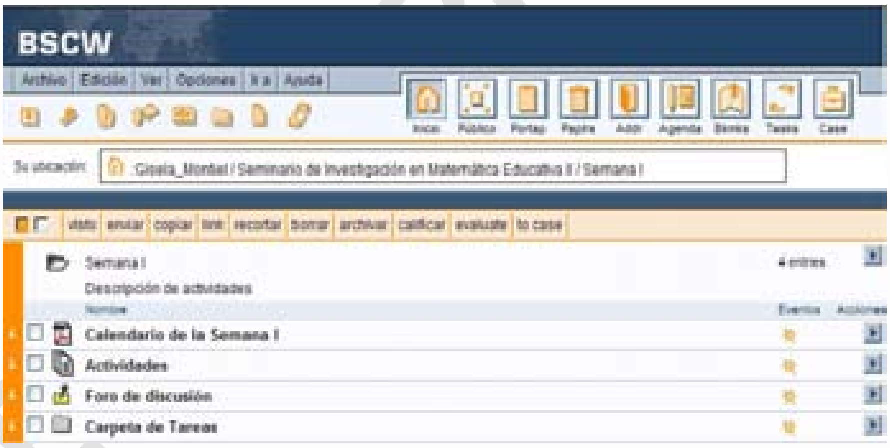
[2] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
[3] Esta caracterización se discutirá a detalle más adelante.

carpetas de documentos. En la plataforma se abrió una carpeta por cada semana de trabajo (cuatro en total), una carpeta para la Biblioteca y se colocó un documento general que presentaba el contenido del seminario y exponía la dinámica de trabajo (ver Pantalla 1).



Pantalla 1

La Biblioteca contenía artículos de investigación en formato digital, videos, presentaciones e hipervínculos a sitios en la Web. Cada semana tenía un calendario, un conjunto de actividades, el foro de discusión correspondiente al tema de la semana y una carpeta para que los estudiantes colocaran sus tareas (ver Pantalla 2).

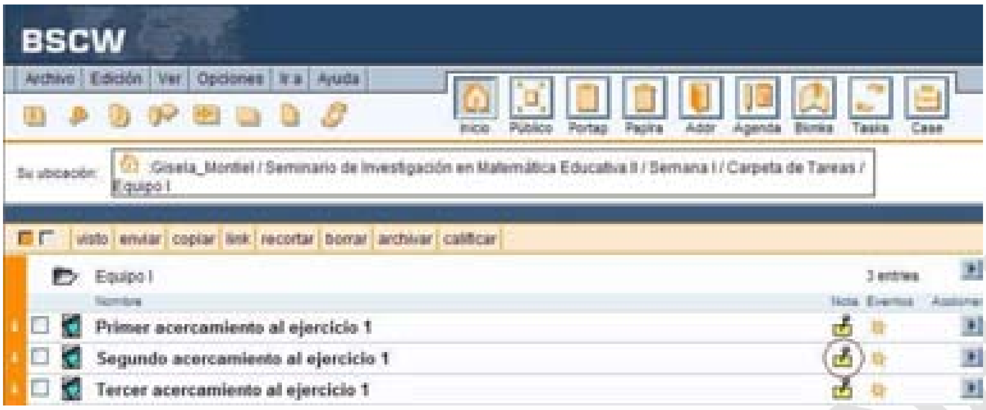


Pantalla 2

Todo esto constituye un espacio educativo a distancia, particularmente *en línea*, de carácter *asíncrono*, cuyos medios de interacción directa, entre profesor y estudiantes[4], fueron solamente los foros de discusión y el correo electrónico. Sin embargo, para efectos del análisis realizado en (Montiel, 2002), y que ahora se reporta aquí, sólo se tomaron como registros las interacciones por foro de discusión.

El foro de discusión fue de fundamental importancia, en él se llevaron acabo las intervenciones que, por parte del profesor, llevaron al estudiante a la *resignificación* del concepto de derivada. El foro se dio de dos tipos, uno que iniciaba con una pregunta por parte del profesor (cuyo icono se distingue en la Pantalla 2) y el otro que surgía de las dudas sobre las actividades resueltas por el estudiante o los equipos de trabajo (que estaba asociado al archivo con las respuestas a los ejercicios, ver Pantalla 3) y en los que intervenía el profesor con observaciones y nuevas preguntas.

[4] A partir de ahora hablaremos sólo de estudiantes



Pantalla 3

La modalidad *en línea* y sobre todo el carácter *asíncrono* de las interacciones dio oportunidad a la consulta bibliográfica sin restricción, a intervalos amplios de reflexión y al uso de herramientas didácticas (como software para hacer graficas) para la resolución de los ejercicios.

BSCW registra, con día y hora, todos los movimientos que el usuario hace en la plataforma, desde visitar, crear o borrar las carpetas; abrir, guardar, borrar o colocar documentos; participar en los foros y editar o borrar las participaciones. El usuario que crea la carpeta principal puede invitar a los miembros con las restricciones pertinentes, en nuestro caso se restringen algunos atributos a los estudiantes para evitar la pérdida de documentos, ya que tienen acceso a todo el contenido del curso, incluyendo las tareas y foros de sus compañeros.

Dadas las características de los estudiantes y del escenario particular donde se llevaría acabo la actividad didáctica, se organizaron los contenidos del Seminario, SIME II. La organización completa e intencionalidad global del Seminario puede consultarse en (Montiel, 2002), aquí analizaremos sólo una parte, aquella en la cual la actividad didáctica está centrada en la *resignificación del concepto de derivada*.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN JUEGO

El concepto de derivada no puede reducirse a su sola definición, dado que estamos interesados en su aprendizaje. Actualmente se han incorporado al aula innovaciones didácticas para el tratamiento del concepto de derivada, donde podemos ver la articulación de acercamientos numéricos, algebraicos y gráficos, es decir, se intenta abandonar el carácter algorítmico y estático de dicho concepto. Sin embargo, estas aproximaciones siguen considerando como fin último una definición, un objeto matemático construido y no susceptible de construcción por parte del estudiante, es decir *la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente*. Ello deja de lado la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen, y por el cual se constituye como un conocimiento matemático. Cantoral (2001) ha documentado un fenómeno análogo al de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), pero parte de las prácticas sociales que dan origen y significado al concepto, no del saber erudito, como concepto ya inmerso en la cultura matemática. Se encontró que fue la idea de predicción la que generó una cantidad considerable de resultados matemáticos y que sirvió como base de la actividad matemática a partir del siglo XVII. Por esa razón, se requiere entender cuáles son los mecanismos funcionales que operan la relación, considerada dialéctica, entre las nociones de *predicción*, propia de las ciencias físicas y de la ingeniería, y de lo *analítico*, peculiar de las matemáticas (Cantoral, 2001).

Bajo esta perspectiva, el conocimiento matemático en juego cambia radicalmente en los escenarios escolares, porque entonces no se busca trabajar con la derivada o sus estructuraciones conceptuales, sino modelar, medir, aproximar, calcular, en situaciones de variación para generar, a través de diseños pertinentes, la necesidad de una herramienta matemática que explique y resuelva dichas situaciones. Esta perspectiva teórica recibe el nombre de *socioepistemología* y asume que la *noción de derivada sólo será adquirida hasta que ésta sea vista como una organización de las variaciones sucesivas* (Cantoral y Farfán, 1998).

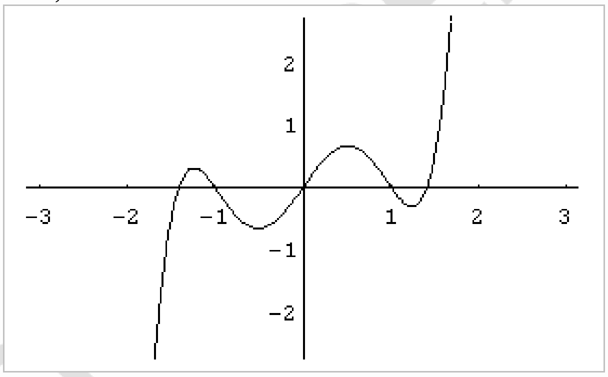
LA SITUACIÓN PROBLEMA

El diseño debía tomar en cuenta que los estudiantes tenían familiaridad con los temas del cálculo diferencial (incluso algunos impartían clase de dichos temas) y con algunas posturas de la Matemática Educativa, además de haber leído artículos sobre la aproximación socioepistemológica y de estar en un ambiente escolar a distancia con las características antes mencionadas.

Posterior a la exposición del "Tratamiento Usual de las Derivadas Sucesivas en los Textos de Cálculo y Análisis Matemático", se proporcionaron a los estudiantes dos listas de ejercicios. La Lista I consistía de ejercicios no tradicionales, diseñados para explorar las concepciones y argumentos de los estudiantes a propósito de la derivada y las derivadas sucesivas. Dicha lista debía ser respondida por todos los equipos de trabajo.

LISTA I. EJERCICIOS

Considere la siguiente gráfica,



marque sobre f, la zona en que $f(x)>0$
marque sobre f, la zona en que $f'(x)>0$
marque sobre f, la zona en que $f''(x)>0$
marque sobre f, la zona en que $f'''(x)>0$

Explique ampliamente sus determinaciones

Considere la función f que cumple con las siguientes características: f es dos veces derivable con los valores particulares $f(0)=0$, $f(1)=1$ y $f'(0)=f'(1)=0$, entonces el valor absoluto de $|f''(x)|\geq 4$ para algún x de $[0,1]$

Las respuestas de los estudiantes fueron muy semejantes a las reportadas en (Cantoral y Farfán, 1998). La modalidad en línea - asincrónico, y el uso de la computadora como medio de acción y comunicación generaron producciones peculiares (ver Anexo B). Por ejemplo, recurrieron a copiar la imagen de la gráfica (incluso algunos graficaron en software construyendo una posible función) y sobre ella marcar de un color distinto (rojo, usando las curvas de trazo libre) las zonas donde $f'(x)>0$, $f'(x)>0$ y $f'''(x)>0$. Sin embargo, el medio privilegia las explicaciones escritas (descripciones de la actividad) producto de cierta reflexión, y la pregunta permite expresiones personales no matemáticas, por ejemplo:

Marcamos en rojo las partes en que consideramos que hay concavidad positiva. Del mismo modo en que expresamos anteriormente, este aspecto podría ser analizado tratando de explicar la definición, pero en la práctica nos fijamos cuando la gráfica "sonríe".

Con la Lista I de ejercicios se esperaba ver las estrategias variacionales que utilizan los estudiantes y las formas en cómo argumentan su elección frente a sus compañeros de clase. Claramente, como se comprobó, la pregunta más compleja para ellos resulta ser ¿dónde $f''(x)>0$?, pues es ahí donde se exige el uso de estrategias variacionales como única posibilidad de solución del problema.

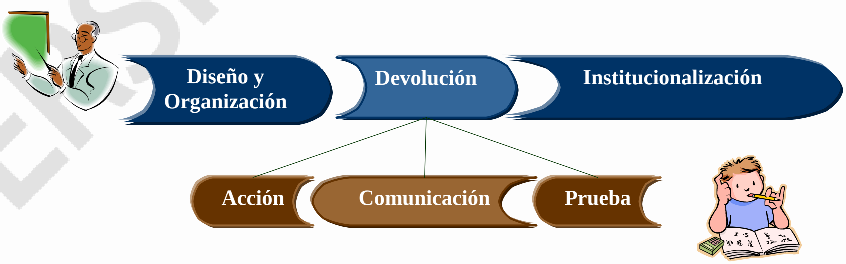
Se sabe que responder a las primeras tres preguntas de la lista no generaría conflicto en los estudiantes, ya que la enseñanza actual del cálculo provee de argumentos para responderlas. Sin embargo, las preguntas 4 y 5 son las que confrontan al estudiante con su conocimiento previo alrededor de la derivada. La pregunta 5 trataba justamente de una articulación compleja entre f, f' y f'', y sería tomada como una forma de saber el nivel de apropiación del conocimiento, según establece la aproximación socioepistemológica.

Fue necesario diseñar actividades donde el estudiante construyera argumentos variacionales que le ayudaran a resolver los problemas 4 y 5 de la lista anterior. Se proporcionaron dos problemas, a cada equipo, de una lista de ejercicios típicamente escolares (Lista II, ver Anexo A), pero conceptualmente complejos. Fueron tomados de entre los libros avanzados de cálculo y de entre los problemas más difíciles según el juicio de los propios autores de los textos y del profesor del SIME II. Según ellos, estos problemas sin la indicación de la teoría a emplear, van a requerir de movilizar más conocimientos y una mayor experiencia en su uso.

INTERACCIONES DEL SISTEMA DIDÁCTICO

Para observar, estudiar y analizar las interacciones del sistema didáctico tomamos al contrato didáctico como variable de análisis. El contrato didáctico se define como la relación entre profesor y estudiantes respecto de un conocimiento matemático específico. El contrato no tiene cláusulas escritas ni sanciones que describan su funcionalidad, sólo se puede mirar en el momento que se presenta una *ruptura* del mismo. Este contrato evoluciona a medida que el proceso didáctico avanza.

Para describir, lo más detalladamente posible, qué es el contrato didáctico usaremos el siguiente esquema,



Contrato didáctico

El profesor debe diseñar la situación problema con base en tres elementos básicos: cómo aprende el estudiante un conocimiento matemático particular, cuál es la naturaleza epistemológico de dicho conocimiento y cómo éste deviene en conocimiento escolar. Una vez organizada la situación problema, el estudiante interactúa con el *milieu* a tres niveles: el de ***acción***, donde fija un estado del medio, determina o limita las acciones de otros actores; el nivel de ***comunicación***, que consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de información, y por último, al nivel de ***prueba***, donde tiende a la justificación o validación cultural de los actos o declaraciones establecidas explícita o implícitamente (Brousseau, 2000). Los modelos y nociones que desarrolla el estudiante en cada nivel necesitan la intervención del profesor, pero no para sugerir estrategias, evaluar respuestas, mucho menos para develar el conocimiento en juego. El papel que juega el profesor consiste en dar al estudiante las situaciones que lo integren a la situación y que lo hagan sentirse responsable de la actividad matemática en curso. Ante las rupturas del contrato, el profesor debe siempre devolver la situación.

La conclusión de la situación se lleva acabo por la institucionalización de los conocimientos en juego, esto es, el profesor interviene para que se asuma la significación socialmente establecida del saber que ha sido construido por los estudiantes en situaciones de acción, de formulación y de validación. Esta fase está destinada a establecer convenciones sociales y recibe el nombre de *situación didáctica de institucionalización*.
Sin embargo, hay comportamientos en el estudiante que obedecen a condiciones externas, implícitas pero institucionales, como lo son aquellos provocados por las concepciones escolar, de la matemática y de la modalidad escolar (D'Amore, 1999) que tienen los estudiantes, concepciones y comportamientos que se rigen por los contratos pedagógico y escolar (Chevallard, et al, 1998), que viven en la actividad escolar cotidiana.

En nuestro *milieu* particular denominamos episodios de adhesión al discurso, a aquellos episodios donde el estudiante respondía a las actividades o interactuaba con sus compañeros o profesor, sólo para obtener una evaluación aprobatoria, es decir, no había interacción continua sobre la situación problema y las nuevas preguntas planteadas por el profesor.

UNA CARACTERIZACIÓN DEL CONTRATO DIDÁCTICO

Para caracterizar las interacciones que se dieron en nuestro escenario particular, hemos de partir con algunas consideraciones de orden teórico y metodológico. La Teoría de Situaciones Didácticas nace del estudio de los fenómenos didácticos en la escuela elemental, presencial, donde los estudiantes son niños y los contenidos matemáticos son básicos. De tal forma que nuestro estudio hace extensiones de su aplicación, ya que analiza la interacción entre docentes en formación y contenidos matemáticos avanzados (nociones del cálculo) en un escenario virtual.

Mediante una clasificación de los episodios de interacción se "aislaron" las rupturas de la tradición escolar, los procesos de adhesión al discurso y las rupturas de contrato didáctico. Sólo ejemplificaremos el último episodio ya que de ahí surge la situación de aprendizaje.

- *Episodio ruptura de la tradición escolar*. Esta ruptura obedece a la concepción que se tiene de enseñar y aprender matemáticas, es decir, de la tradición de actuar, formular y validar en contextos analíticos y buscar caracterizaciones en otros contextos de representación como el numérico y el gráfico, y no en el sentido contrario (actuar, formular y validar en el contexto gráfico y numérico) y caracterizar en el analítico. La ruptura se da cuando las respuestas evocaron a argumentos de cambio en los contextos gráfico, analítico y numérico.

- *Episodio adhesión al discurso*. Este episodio obedece a los efectos de los contratos pedagógico y escolar. El alumno está consciente de pertenecer a un sistema escolarizado, donde debe obtener evaluaciones aprobatorias para continuar con su formación y para lograrlo ha de responsabilizarse por las actividades de cada uno de sus seminarios, por lo que en ocasiones sus acciones obedezcan a cumplir ciertos requisitos.

- *Episodio ruptura del contrato didáctico*. Esta ruptura se hace clara cuando el alumno contesta con argumentos no variacionales, de estructura escolar tradicional principalmente. El profesor hace la devolución de la situación abriendo un debate sobre los argumentos necesarios para demostrar o resolver el problema. En el siguiente ejemplo es clara la devolución del profesor al hacer explícito que *"explicar es construir argumentos que dejen ver su factibilidad"*, lo que hace ver que la demostración, aunque matemáticamente correcta, no es suficiente para efectos del planteamiento del curso.

RUPTURA DEL CONTRATO DIDÁCTICO → DEVOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN → SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

RUPTURA DEL CONTRATO

Al plantear la pregunta el ejercicio:

Demuestre y explique el teorema: si f es derivable en a, entonces f es continua en a, los estudiantes respondieron lo siguiente:

Teorema: f es una función derivable en x=a, entonces f es continua en x=a.
Demostración:

Para probar que f es continua en x=a probaré que cumple la definición, o sea que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to a} f(x) \underset{*1}{=} \lim_{x \to a}(f(x) - f(a) + f(a)) \underset{*2}{=} \lim_{x \to a}\left[\underbrace{\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{f'(a)}\overbrace{(x-a)}^{0}}_{0} + f(a)\right] \underset{*3}{=} f(a)$$

Los alumnos explicitan su procedimiento como sigue:

1. *Sumo y resto f(a) (válido por existencia de opuesto y neutro de la suma en R).*
2. *Asocio los dos primeros términos, divido y multiplico por (x-a), como* $x \to a$, $x \neq a$, *entonces puedo dividir entre el factor mencionado por ser distinto de cero.*
3. *El primer término está compuesto de dos factores. El límite del primer factor existe y es finito, dado que por hipótesis la función f es derivable en x =a, o sea que dicho límite es la derivada de f en x=a (f´(a)) y es un número real.*
4. *El segundo factor tiende a cero.*
5. *Como el límite del producto es el producto de los límites (f´(a).0), el primer término tenderá a cero.*
6. *El segundo término es una constante, tiende a f(a).*
7. *El límite de la suma de los dos términos es la suma de sus límites (0+f(a)), o sea f(a).*

La situación de ruptura de contrato didáctico se da en el momento en el que el equipo responde con argumentos analíticos (matemáticos formales) y el objetivo del profesor es construir argumentos de variación, por lo que éste último debe intervenir y reorientar las respuestas del equipo. Cabe destacar que la pregunta no se refiere sólo a demostrar sino también a explicar o "convencerse" de la validez del resultado.

DEVOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN

Primera intervención del profesor.

Explicar es construir argumentos que "dejen ver" su factibilidad. Sumar y restar por el mismo número, multiplicar y dividir por el mismo número, etc., son estrategias que solo se le pueden ocurrir a alguien que conozca la prueba. ¿Podrían darnos algún argumento que nos haga ver el porqué una función derivable es inevitablemente continua?

Esta devolución tuvo como respuesta, por parte del equipo, una segunda solución analítica basada en definiciones y teoremas conocidos. Ante una nueva devolución por parte del profesor, indicando la base teórica en la que se basó su segunda respuesta, se generó una tercera, pero ahora se utilizaron recursos gráficos para *explicar* los enunciados analíticos de las respuestas previas. Una tercera intervención del profesor provocó que gráficamente los estudiantes exploraran la derivabilidad y continuidad utilizando acercamientos a un punto sobre la gráfica. (todas las respuestas e intervenciones pueden consultarse en (Montiel, 2002), primera respuesta al ejercicio 1 del equipo 1, pag. 73)

El ejercicio explorado anteriormente tenía la intencionalidad de que el estudiante generara, a partir de sus conocimientos, consultas bibliográficas, pero sobre todo de las intervenciones del profesor, argumentos de variación que ayudarán a resolver los problemas no escolares, donde podríamos observar la construcción de significados alrededor de la derivada.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE. UN EJEMPLO

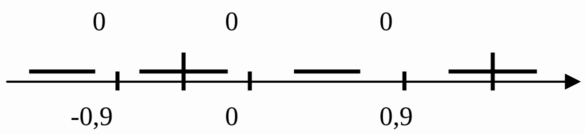
Ejercicio 4[5]. *Bueno, después del desconcierto y como nosotros somos cabezas bien duras, pensamos que el problema debería tener solución, y comenzamos a pelearlo.*

Retomamos f ´´ e hicimos el signo de esta función con base en la concavidad de f, concavidad positiva f´´ positiva, concavidad negativa f´´ negativa.

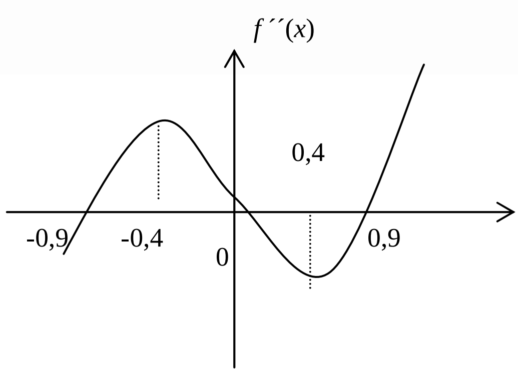
Los valores que tomamos son estimados y el razonamiento no depende de ellos.

Por tanto:

sg $f''(x)$



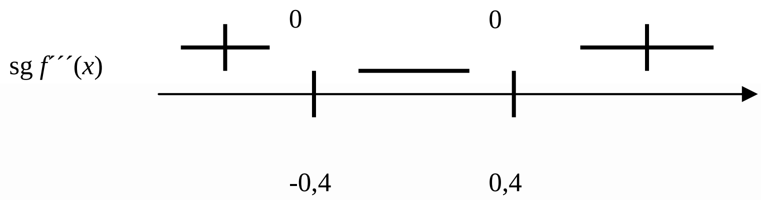
Luego hicimos una gráfica de f´´ que se adecuara a este signo:



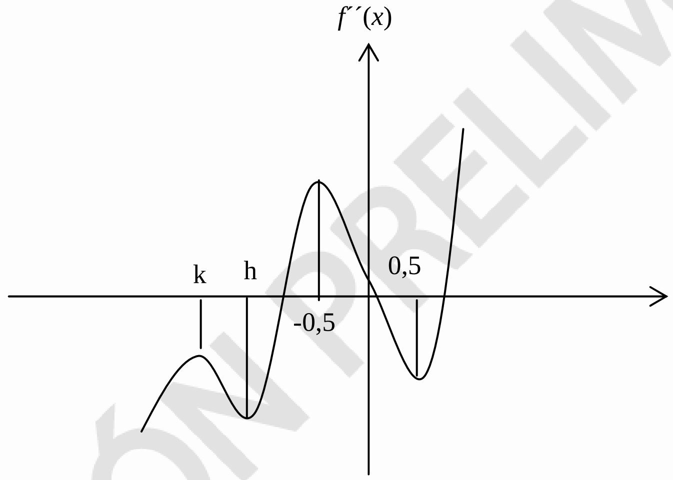
Como f ´´´ sería la derivada de f´´, usamos el crecimiento y decrecimiento de f ´´ para determinar el

[5] Marcar sobre la gráfica la zona donde $f'''(x)>0$

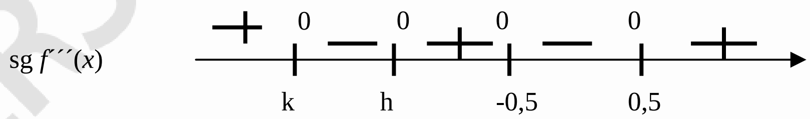
signo de f´´´.
Y obtuvimos:



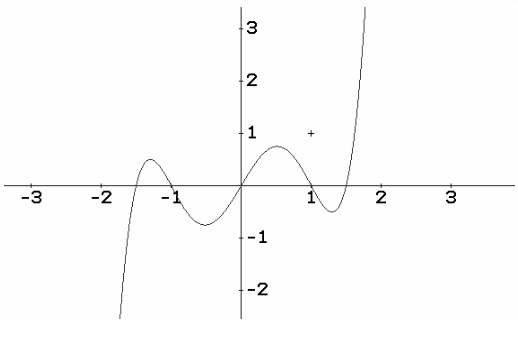
Con este esquema de signo podríamos pintar las porciones de gráfica correspondiente que pide el ejercicio.
Todo esto estaría bien si las funciones se comportaran siempre "buenamente", pero luego encontramos objeciones a nuestro razonamiento, podríamos encontrar para f´´ una gráfica que se adecuara al signo obtenido, pero que tuviera los siguientes accidentes:



Y por tanto, de acuerdo a como f ´´ crece o decrece, tendríamos el siguiente signo para f´´´ :



Que contradice evidentemente nuestra primera conclusión. De manera que, lo seguiremos pensando...
Grafico de f:



Tratando de determinar el signo de f´´´ utilizamos los signos ya encontrados de f´y f´´.

Sea una función g = f´. De g conocemos el signo (signo f´), el signo de su derivada (f´´), por lo tanto podemos graficar un esbozo de g.

+++++ -------- +++++ -------- ++++

sg de g

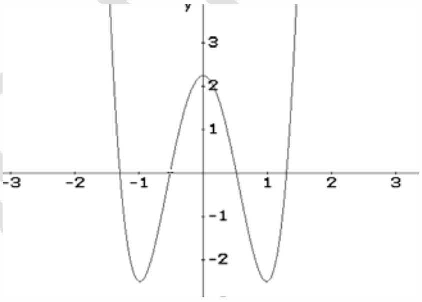
-1,3 -1/2 1/2 1,3

0 0 0

sg de g' — + — +

-0,9 0 0,9

Un esbozo de g (f´) podría ser:



La g´´ es la f´´´, o sea que la concavidad de g nos dará datos sobre f´´´.
De este gráfico diríamos que:

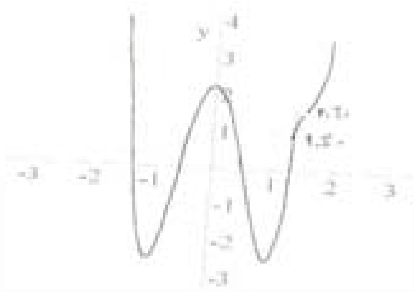
0 0

Sg de *f*'' + — +

-0,5 0,5

Pero... claro, ¿quién nos asegura que g se comporta como la dada?
Podemos asegurar su signo, los intervalos de crecimiento, pero... no así su concavidad, por lo tanto al cambiar g (su concavidad), cambiaría f´´´.

Por ejemplo g (f´) podría tener un gráfico similar a:



Por lo tanto las distintas g (f´) determinan distintos signos de f´´´, al cambiar la concavidad.

Tenemos claro que solo hay una f´´´, lo que ocurre es que la información que sabemos deducir del gráfico de f, no podemos determinar cuales de las posibles es la correcta.

Cada vez más cerca de f´´´...

Buscamos a partir de la gráfica de la función f generar argumentos geométricos de la variación de f para obtener el signo de f ', de la variación de f ' para obtener el signo de f '' y de la variación de f '' para obtener el signo de f '''.

Nos basamos en el hecho de que si una función f es creciente en un intervalo entonces su derivada primera es positiva o cero.

Para que f sea creciente y su derivada primera valga 0, debería tener un punto de inflexión con tangente horizontal, cosa que no ocurre en la gráfica de la función que se nos presenta.

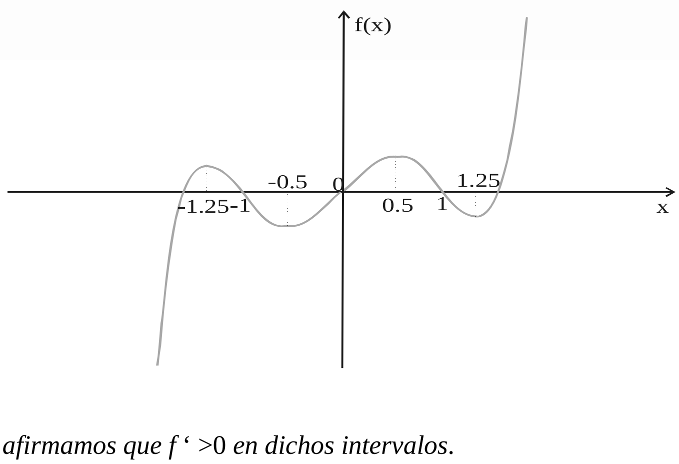
Para esta función podremos decir que si f es creciente en un intervalo entonces su derivada será positiva en dicho intervalo.

Siguiendo un razonamiento análogo podríamos decir que si f ' es creciente entonces

f ''>0 y si f '' es creciente entonces f '''>0.

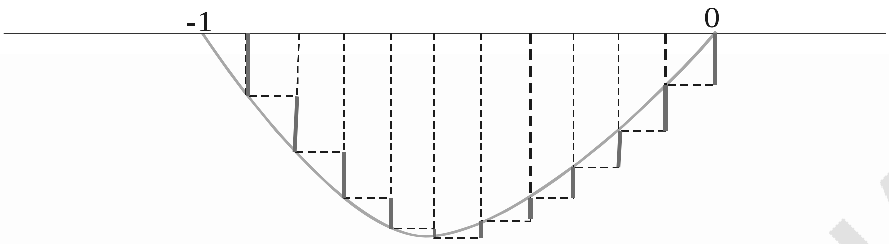
Las restricciones serían similares a las ya expuestas.
Para marcar la zona de la gráfica en la f '>0 necesitamos ver que f sea creciente.
Los valores que se tomaron son arbitrarios. El razonamiento es independiente de los mismos.
En la siguiente gráfica podemos observar que en los intervalos (-∞, -1.25), (-0.5, 0.5) *y*
(1.25, +∞) *la función f verifica la definición de función creciente:*

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



De todo lo anterior afirmamos que f ' >0 en dichos intervalos.

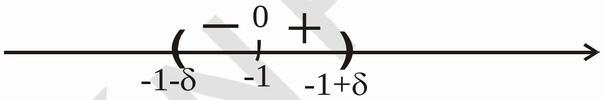
En este caso necesitamos "ver" que f ' sea creciente para realizar un razonamiento similar al del problema 2. *Para ello tomamos el intervalo* (-1, 0) (*por ejemplo*), *lo dividimos en intervalos infinitesimales iguales y construyendo los respectivos triángulos característicos podemos apreciar la variación de la derivada primera en los segmentos verticales.*



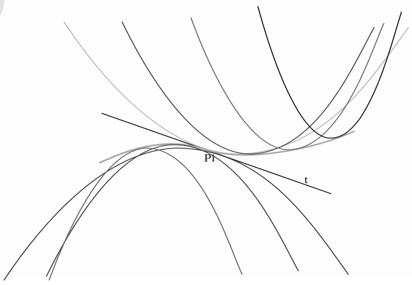
Vemos en este caso que la derivada primera pasa de negativa a positiva. f ' crece en este intervalo lo que nos garantiza que f ''>0 *en dicho intervalo.*

En este caso necesitamos "ver" donde f ´´ es creciente.
El desarrollo de Taylor de segundo orden en los puntos de inflexión de f coincide con el de primer orden ya que la derivada segunda en dichos puntos es nula, por lo que estamos aproximando por una recta en dichos puntos. En los demás puntos la aproximación de f que nos da el desarrollo de Taylor de segundo orden es una parábola.

Consideremos un entorno del punto de inflexión (*x* = -1) *de tal forma que el signo de f '' sea:*



La tangente a la gráfica en x = -1 *la podemos pensar como una parábola degenerada por lo que a medida que nos "alejamos del punto de inflexión las parábolas se irán contrayendo como se muestra en la figura*.



Por otro lado sabemos que en el semi-intervalo izquierdo (-1-δ, -1) *por ser la concavidad negativa el coeficiente de contracción de las parábolas es negativo y en el semi-intervalo derecho* (-1, -1+δ) *es positivo.*

Cuanto mayor en valor absoluto es este coeficiente de contracción $\left(\frac{f''(a)}{2}\right)$ *más "cerrada" será la parábola.*
Por lo dicho anteriormente y observando el gráfico vemos que la derivada segunda en el intervalo de este punto es creciente, de donde la derivada tercera, en dicho intervalo, será positiva.

Lo mismo sucede en un intervalo de x = 1, *que es el otro punto de inflexión que cumple estas condiciones.*

No hemos podido determinar la zona donde f´´´ es positiva, pero hemos logrado encontrar intervalos de ciertos puntos donde podemos asegurar esta condición.

En estas tres respuestas el equipo llega a la misma solución, es decir, logra encontrar donde f’’’>0 sólo utilizando argumentos de variación. El equipo no hace consciente que la respuesta es la misma en los tres casos, lo que nos indicó que lograron articular la derivada sucesiva no importando sus estrategias de solución. Tal como lo señala la Teoría de Situaciones Didácticas las rupturas y reestructuraciones del contrato didáctico fueron necesarias para la construcción de argumentos de variación que dieran respuesta al ejercicio planteado. Sin embargo, la teoría de situaciones plantea el aprendizaje de un concepto como resultado de dicha negociación, y a partir de nuestra postura teórica es necesaria la construcción de un pensamiento y lenguaje variacional para lograr el aprendizaje alrededor de la noción de derivada, una vez que se articulan las variaciones sucesivas.

Incorporar las prácticas sociales asociadas a la construcción del concepto de derivada afecta a la estructura de dicho concepto matemático en juego y su funcionamiento en el escenario escolar; de manera que se afectaron también, las relaciones que se establecieron entre los estudiantes y su profesor. En otras palabras, la construcción de argumentos de variación, el entendimiento de las variaciones sucesivas y sus relaciones, así como la construcción de argumentos predictivos, y no propiamente la construcción del concepto derivada y sus diferentes estructuraciones conceptuales, afectó a los comportamientos de estudiantes y profesor, así como a la *interacción* entre ellos. Se vieron modificadas sus intervenciones, a nivel del lenguaje, del uso de distintos contextos para las argumentaciones y de los procesos de validación de sus conjeturas. Estos comportamientos son intencionados, a través del diseño, por el profesor, ya que parte de una epistemología basada en las prácticas sociales que producen o favorecen la necesidad de los conceptos matemáticos. En el caso particular del fenómeno didáctico que analizamos se inicia con la práctica social de la predicción mediante la matematización de fenómenos de cambio.

Referencias

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática 12*(1), 5-38. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), 27-40.

Cantoral, R. (2001) *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilón, Revista española de educación matemática 42*: 353 – 369.

Chevallard, Y., et al. (1998). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca para la actualización del Maestro SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y. (1991) *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice Bologna, Italia.

Montiel, G. (2002) *Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual*. Tesis de maestría: México: Cinvestav-IPN.

M.C. Gisela Montiel
M.C. Gisela Montiel Espinosa
CICATA-IPN
México
Email: gmontiel@ipn.mx

ANEXO A

LISTA II. EJERCICIOS

1. Demuestre y explique el teorema anterior: si f es derivable entonces es continua.

2. El número a recibe el nombre de raíz doble de la función polinómica f si existe la función polinómica g tal que $f(x)=(x-a)^2\, g(x)$. Demostrar que a es raíz doble de f si y sólo si a es raíz de f y de f' a la vez.

3. ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?

4. Suponga que f está definida en una vecindad de x, y suponga que f'' existe. Pruebe que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

Muestre mediante un ejemplo que el límite anterior puede existir aunque $f''(x)$ no exista.

5. Sea f una función real derivable en el intervalo (a, b). Pruebe que f es convexa si y solamente si f es monótonamente creciente. Suponga enseguida que $f''(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$, y pruebe que f es convexa si y solamente si $f''(x) \geq 0$ para toda x en (a, b).

6. Halle las derivadas primera y segunda de la función siguiente:

$$f(x) = sen\left(\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3 t\,dt\right)dy\right).$$

7. Sea $f(x) = e^{-1/x}$ para $x > 0$ y $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Claramente f tiene derivadas de todos los órdenes para todo $x \neq 0$. Pruebe que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

8. Supongamos que la función polinómica $f(x)=x_n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ tiene los puntos singulares $-1, 1, 2, 3$ y $f''(-1) = 0$, $f''(1)>0$, $f''(2)<0$, $f''(3) = 0$. Trazar la gráfica de f con todo el detalle posible a partir de esta información. ¿Existe alguna función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no es punto singular?

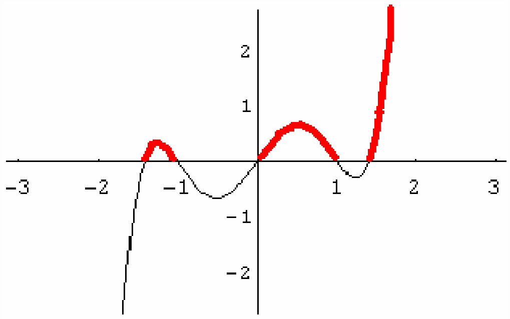
9. Supongamos que f es una función derivable en $[a, b]$, demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(b) + M(b-a)$.

10. Demostrar que si f' es creciente, entonces toda tangente corta a la gráfica de f solamente una vez.

ANEXO B

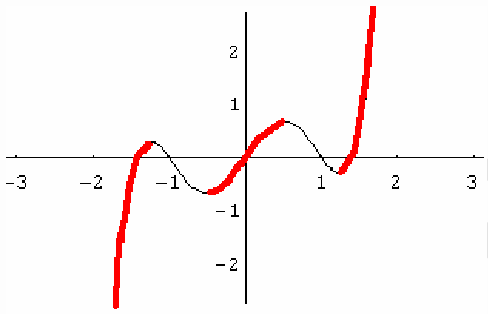
PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

Ejercicio 1. Marque sobre *f*, la zona en la que *f*(*x*)>0.



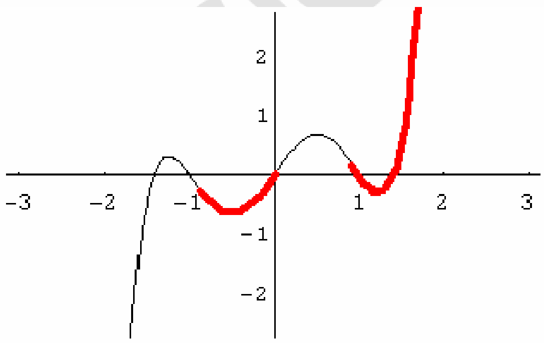
Se marcaron las zonas en las cuáles la gráfica se encuentra sobre el eje ***x***. En esos sectores de la gráfica, están los puntos (x, f(x)) para los cuales f(x)>0.

Ejercicio 2. Marque sobre *f*, la zona en la que *f'*(*x*)>0.



Se marcaron las zonas en las cuáles la función *f*(*x*) es creciente ya que, en ese sector, la pendiente de la recta tangente a la gráfica en cualquier punto, es positiva. Por el significado geométrico de la primera derivada de *f*(*x*), se tiene entonces que *f'*(*x*)>0.

Ejercicio 3. Marque sobre *f*, la zona en la que *f''* (*x*)>0.



Por las observaciones hechas anteriormente, *f''*(*x*)>0 en los sectores de la gráfica en donde ésta es cóncava, o lo que es similar, en los sectores de la gráfica en donde la primera derivada es creciente. Al respecto quisiéramos señalar algunas relaciones gráficas