RMIE, ENERO-MARZO 2006, VOL. 11, NÚM. 28, PP. 129-153

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Los sistemas algebraicos computarizados

TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS

Resumen:
El artículo reporta una investigación realizada en México durante 2000-2004, en la que se dio seguimiento al desempeño de 800 profesores de matemáticas que atendieron en ese periodo a cerca de 200 mil estudiantes de secundaria. El estudio se centró en: *a)* los cambios que pudieran presentarse en las concepciones y prácticas de enseñanza de los docentes y *b)* la manera en que el uso sistemático en el aula de un sistema algebraico computarizado afecta la relación estudiantes-profesor. El trabajo describe las facilidades que ofrece un sistema algebraico computarizado cuyo marco de referencia es la enseñanza de la aritmética y el álgebra antes de la aparición de esa tecnología; presenta una breve discusión del referente teórico en que se sustenta el estudio y el método empleado de recolección y análisis de datos; concluye con una discusión de los resultados.

Abstract:
The article reports on a research project carried out in Mexico from 2000 to 2004. The project followed up on the performance of 800 mathematics teachers who were teaching approximately 200 thousand secondary students at the time. The study was centered on: *a)* the changes that could occur in the teachers' conceptions and teaching practices, and *b)* the way the systematic classroom use of a computerized algebraic system affects the student/teacher relationship. The project describes the facilities offered by a computerized algebraic system, in a frame of reference of the teaching of arithmetic and algebra before the appearance of computer technology. The article presents a brief discussion of the theoretical referent on which the study is based, and the method employed in compiling and analyzing the data, and concludes with a discussion of results.

Palabras clave: educación y tecnología, enseñanza media, enseñanza de las matemáticas, profesores, relación estudiante-profesor, México.
Key words: education and technology, secondary teaching, mathematics teaching, teachers, student/teacher relationship, Mexico.

Tenoch Esaú Cedillo Ávalos es profesor investigador del área académica "Aprendizaje y enseñanza en matemáticas, ciencias y artes" de la Universidad Pedagógica Nacional. Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, México DF, CP 14200, CE: tcedillo@upn.mx

Introducción

En este artículo se presentan los resultados de un estudio longitudinal que se realizó en el periodo 2000-2004, en el que se dio seguimiento al desempeño de profesores y estudiantes del nivel de educación secundaria cuyos planteles fueron equipados con calculadoras que tienen preinstalado un sistema algebraico computarizado (Cedillo, 2003). Consideramos que los resultados de ese estudio alientan fuertemente el uso de ese tipo de *software* en el nivel de educación básica. Más adelante se abordan con mayor detalle estas cuestiones en las secciones correspondientes.

En los últimos 25 años se han incorporado en la clase de matemáticas las herramientas que ofrecen las calculadoras y computadoras y se ha observado que han ejercido una influencia importante en la generación de nuevas formas para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar a través de la resolución de problemas (Kutzler, 2003). Entre esas herramientas destacan los sistemas algebraicos computarizados (SAC) que, además de ofrecer poderosos recursos para editar y procesar gráficas de funciones, permiten realizar una amplia gama de operaciones numéricas, simbólicas y lógicas, que constituyen los instrumentos esenciales de la manipulación algebraica. Entre las versiones más difundidas de los sistemas algebraicos se encuentran Matemática, Maple y Derive. A inicios de la década de los noventa esa tecnología se empezó a utilizar más ampliamente y en cada actualización se le fue dando al *software* una presentación cada vez más "amigable"; esto ha motivado mayor interés entre los educadores, y el debate sobre su potencial se ha visto dominado por visiones optimistas que presagian nuevos horizontes para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Trouche, 2005). No obstante, también hay reportes que señalan la necesidad de considerar que, al tiempo que surgen nuevas avenidas para abordar los problemas en el aprendizaje del álgebra, también emergen nuevas dificultades, por ejemplo, los obstáculos conceptuales que pueden producirse por las diferencias entre las representaciones que ofrece un sistema computarizado y las que se usan en las matemáticas tradicionales (Drijvers, 2000, 2002; Heck, 2001).

Características de un sistema algebraico computarizado

Nos referiremos, en particular, a la versión de Derive instalada en la calculadora TI-92, sus características son muy similares a las de otras versiones de SAC. Dado que la investigación que realizamos consistió en estudiar lo que ocurre en el *proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra en un ambiente computarizado*, consideramos pertinente presentar algunos ejemplos de las herramientas que ofrece este tipo de *software*, esta información nos será útil en el desarrollo de otras secciones de este artículo. Los "datos de salida" se obtienen tecleando las operaciones que se quieren realizar y oprimiendo después la tecla ENTER.

Procesamiento numérico

Datos de entrada	Datos de salida *Modo exacto*	*Modo aproximado*
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	0.83333333333333
$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$	0.5

Datos de entrada	Datos de salida *Modo exacto*	*Modo aproximado*
$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	0.912870929175
factor (2485822185000)	$11^5 \cdot 7^3 \cdot 5^4 \cdot 3^2 \cdot 2^3$	
$\text{Cos}\,\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.866025403784
$\sqrt{-1}$	i	
i^2	-1	

Ecuaciones

Datos de entrada	Datos de salida
soluc(a*x^2 + b* x + c = 0,x)	$x = \frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}-b}{2.a}$ o $x = \frac{-(\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}+b)}{2.a}$
soluc(4^x = 32,x)	$x = \frac{5}{2}$
soluc(x^2 + 3 = 0,x)	falso
cSoluc(x^2 + 3 = 0,x)	$x = -\sqrt{3}\cdot i$ o $x = \sqrt{3}\cdot i$
soluc(*sen*(x) = cos(x),x)	$x = \frac{(4\cdot k-3)\pi}{4}$

Operatividad algebraica

Datos de entrada	Datos de salida
desarr$((2 \cdot a - b)^3)$	$8 \cdot a^3 - 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 - b^3$
desarr$(3 \cdot a + 7 \cdot b - (a - 5 \cdot b))$	$2 \cdot a + 12 \cdot b$
factor$(8 \cdot a^3 + 12 \cdot a^2 \cdot b + 6 \cdot a \cdot b^2 + b^3$	$(2 \cdot a + b)^3)$
comDenom$\left(\frac{x}{x-2} + \frac{3 \cdot x}{x-1}\right)$	$\frac{4 \cdot x^2 - 7 \cdot x}{x^2 - 3 \cdot x + 2}$
$x^2 - 1 \mid x = (0,1,2,3,4,5,6)$	$x = -1,0,3,8,15,35$

Los ejemplos anteriores permiten ver que las capacidades de procesamiento numérico y simbólico de un sistema algebraico computarizado abordan los procedimientos para llevar a cabo muchas otras operaciones, por ejemplo, dada una función encontrar su derivada u obtener su valor numérico para un valor específico de la variable; lo mismo aplica para el trabajo algebraico que se requiere en el estudio y aplicaciones del cálculo integral o el álgebra lineal (vectores y matrices). Un SAC también ofrece facilidades para construir gráficas y transitar de la información proporcionada por éstas a sus representaciones analítica y tabular.

Referente teórico

Las ideas de Vygotsky (1978) sobre la forma en que las herramientas median el aprendizaje subyacen en el sustento teórico que asumimos para realizar este estudio. Asimismo, las aportaciones de Vygotsky (1978) fueron la base para el desarrollo del estudio del papel de los instrumentos en el aprendizaje propuesto por Rabardel (1995), el cual constituye otra fuente importante para el trabajo que realizamos. Otra corriente de pensamiento que ejerció influencia en la definición del referente teórico que adoptamos fue la investigación realizada por Artigue (1997), Guin y Trouche (1999), Trouche (2000) y Lagrange (2000); estos autores desarrollaron un marco conceptual para un enfoque instrumental en el aprendizaje de las matemáticas, en ambientes basados en las tecnologías de la información y comunicación.

Un aspecto crucial en el trabajo de Vygotsky es que las herramientas son determinantes en la forma en que se realiza la actividad humana. Esas herramientas histórico-culturales pueden ser artefactos, como las calculadoras o las computadoras, pero también pueden ser herramientas cognitivas, como el lenguaje o el simbolismo algebraico. Rabardel (1995) plantea que un artefacto, por sí mismo, no es automáticamente un instrumento mediador. Argumenta que el artefacto (un objeto material o abstracto) que emplea un usuario para realizar cierto tipo de actividad puede ser un objeto sin significado a menos que el usuario lo haya utilizado antes o haya visto cómo lo usan otros. Solamente después que el usuario ha asignado significados para el uso del artefacto con un propósito específico puede valorar que ese objeto es relevante y que forma parte de un instrumento útil que media su actividad. El usuario experimentado ha desarrollado destrezas para usar la herramienta de manera eficiente y sabe en qué circunstancias es útil. De acuerdo con Rabardel y Verillon (1995), llamaremos *instrumento* a un objeto cuando hay una relación significativa entre éste y el usuario para abordar cierto tipo de tarea, en nuestro caso, actividades matemáticas que el usuario tiene la intención de realizar. La herramienta llega a ser un instrumento a través de un proceso de apropiación que le permite mediar la actividad. Durante este proceso el usuario desarrolla esquemas mentales mediante los que organiza la estrategia para abordar un problema, los conceptos que constituyen las bases de esa estrategia y los significados técnicos para usar la herramienta. Por esto el instrumento no solamente consiste de la parte del artefacto o de la herramienta que está involucrada en la actividad, por ejemplo, la aplicación algebraica de una calculadora simbólica o de un SAC; esto puede darse si la aplicación está acompañada de los esquemas mentales del usuario, es necesario que él sepa cómo hacer un uso eficiente de la herramienta para llevar a cabo cierto tipo de tareas.

Resumiendo, el concepto de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales desarrollados por el usuario para realizar una clase dada de tareas. Es necesario destacar que el significado de la palabra instrumento, en el sentido que está expuesto, es diferente al que se le asigna en la vida diaria; el artefacto se convierte en un instrumento sólo si se combina con el desarrollo de esquemas mentales.

Esquemas de utilización

Como resultado de la distinción entre artefacto e instrumento surge el concepto de *génesis instrumental*. Este concepto involucra el desarrollo de esquemas mentales y es necesario definir qué es un esquema en ese sentido y cómo podemos identificar y observar su desarrollo. Vergnaud (1987, 1996) definió un esquema de utilización como "una organización invariante de la actividad para una clase de situaciones específicas" y define un esquema mental como "una acción deliberada para lograr una meta que contiene operaciones invariantes", éstas frecuentemente son conocimiento implícito que está sumergido en el esquema en forma de "conceptos en acto" o "teoremas en acto" (en el sentido de Guin y Trouche, 2002; Trouche, 2000).

En el presente estudio consideramos un esquema como una organización mental estable, que incluye técnicas y los conceptos que las apoyan para usar un artefacto en una clase específica de tareas; Trouche (2000) llama a este tipo de esquemas de utilización y distingue dos tipos: la primera se refiere a los esquemas de uso que están directamente relacionados con el artefacto; por ejemplo, podemos mover un bloque de texto cuando se está usando un procesador de palabras mediante el esquema de "cortar y pegar". Un usuario experimentado utiliza este esquema con seguridad y sin pensar en otras formas menos eficaces para hacer esto. Sin embargo, un principiante tiene que considerar tanto los aspectos técnicos como los conceptuales, por ejemplo, conocer los menús de "caminos cortos" para cortar y pegar, pero también tienen que enfrentar el desconcertante hecho de que, momentáneamente, ha desaparecido el bloque de texto que quiere mover después de que ha sido cortado, la aceptación de esto último requiere algún conocimiento sobre la diferencia entre lo que se ve en la pantalla y lo que está en la memoria de la computadora (Drijvers, 2003).

Los esquemas de uso sirven como antecedente para los esquemas de la segunda categoría: los de acción instrumentada; éstos corresponden a la realización de trasformaciones sobre los objetos en que se acerca la actividad, en nuestro caso son objetos matemáticos, por ejemplo fórmulas, gráficas, etcétera. Los esquemas de acción instrumentada tienen un significado mental y se construyen con base en los esquemas de uso elementales por medio del proceso de génesis instrumental. La articulación de los esquemas de uso puede involucrar nuevos aspectos conceptuales y técnicos, los que son integrados en un esquema más complejo. Un ejemplo de acción instrumentada es la determinación de la escala para observar una gráfica en una calculadora. Para que sea desarrollado un esquema de acción instrumentada como éste, es necesario que el usuario posea destrezas técnicas para establecer las dimensiones de la ventana en que va observar la gráfica y también habilidades mentales que le permitan imaginar la pantalla de la calculadora y cómo puede ser presentada la ventana en que se despliega la gráfica en un plano infinito, donde la posición y las dimensiones de la ventana determinan si podremos observar o no lo que nos interesa de esa gráfica. Parece ser que las carencias del usuario en la parte conceptual de un esquema son las causas de las dificultades que muchos principiantes presentan en el uso apropiado de una calculadora gráfica. Otro ejemplo de un esquema de acción instrumentada es el uso del signo negativo como un signo de operación o para determinar que un número es negativo.

No siempre es obvia la diferencia entre los esquemas de uso y de acción instrumentada, en algunas ocasiones es sólo a nivel del usuario; lo que al principio puede parecer un esquema de acción instrumentada posteriormente puede funcionar como un punto de partida en la génesis de un esquema de orden superior. Por ejemplo, el caso de la integración en un esquema más amplio de dos esquemas de acción instrumentada que inicialmente se emplean por separado para resolver ecuaciones y sustituir expresiones, pero que en un momento dado deben integrarse para resolver ecuaciones más sofisticadas. Otro ejemplo de esto es el uso apropiado del modo aproximado o del modo exacto para hacer cálculos con valores fraccionarios. Cuando la enseñanza se centra en estos aspectos estas actividades deben considerarse en el marco de un esquema de acción instrumentada que implica requerimientos conceptuales de un orden superior, como la diferencia entre el valor decimal y el valor exacto para determinar la precisión de un resultado. El uso del modo aproximado puede ser visto como un esquema de uso que se integra en otro compuesto más completo cuando, por ejemplo, la actividad consiste en encontrar los ceros de una función, lo cual involucra la comprensión del concepto de aproximación.

Los ejemplos anteriores intentan ilustrar cómo los esquemas de utilización ponen en juego las acciones y el pensamiento y que esto involucra técnicas para usar una máquina y conceptos mentales. En el caso de las herramientas electrónicas para las matemáticas, la parte mental consiste en los objetos matemáticos involucrados y los procesos de razonamiento para resolver un problema acudiendo a acciones con la máquina. Por esto, la parte conceptual de los esquemas de utilización incluye objetos matemáticos y una visión de ellos en el contexto de las "matemáticas de la máquina".

Resumiendo, la génesis instrumental se refiere al surgimiento y evolución de los esquemas de utilización en los que los elementos técnicos y conceptuales evolucionan conjuntamente. Consideramos necesario hacer énfasis en dos cuestiones más, primero queremos señalar que la relación entre los aspectos técnicos y conceptuales es bidimensional y que, por otra parte, las posibilidades y restricciones del artefacto que se está usando influyen en el desarrollo conceptual del usuario; a su vez, las concepciones de los usuarios cambian las formas en que utilizan un artefacto y esto puede conducir a modificar o personalizar la manera en que lo emplean. La segunda cuestión es que aunque la génesis instrumental con mucha frecuencia es un proceso social, los esquemas de utilización generalmente son individuales. Así, los estudiantes pueden desarrollar diferentes esquemas para el mismo tipo de tarea, por ejemplo, pueden emplear diferentes comandos en el ambiente tecnológico en que están desarrollando una misma actividad.

A este respecto Drijvers (2000, 2002, 2003) reporta que la construcción de esquemas y la génesis instrumental requiere tiempo y esfuerzo por parte de los usuarios y que los estudiantes pueden construir esquemas no apropiados o ineficientes que se basan en concepciones incorrectas.

Los conceptos que se han discutido en esta sección conforman el referente teórico que asumimos en el presente estudio. Esos conceptos determinaron el marco metodológico que se empleó y las categorías para definir el tipo de datos que se recolectaron y la forma en que éstos fueron analizados.

Referente metodológico

En esta sección se describe cómo se realizó este estudio. El punto de partida fue la formulación de las preguntas de investigación, esto determinó el tipo de datos que se requerían y la elección del método de recopilación y análisis de los mismos. También se describen los sujetos que participaron en el estudio, los instrumentos empleados para la recolección de datos y el ambiente escolar en que se realizó el trabajo de campo.

Preguntas de investigación

La investigación se orientó a obtener datos empíricos que permitieran formular respuestas plausibles a las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo influye en las prácticas y concepciones de los profesores el uso de los recursos automatizados que ofrece un sistema algebraico computarizado?

2) ¿Cómo influye la experiencia docente y el conocimiento matemático de los profesores en sus reacciones ante el uso de un sistema algebraico computarizado?
3) ¿Cómo afecta la relación estudiante-profesor la incorporación de un sistema algebraico computarizado en las clases regulares de matemáticas?

Método de recopilación y análisis de datos

Para la recolección y análisis de datos se eligió el método de análisis cualitativo, dado que el tipo de información que resulta relevante para este proyecto son episodios en el aula y narraciones sobre las prácticas y formas de razonamiento de los profesores. El análisis cualitativo es un sistema activo, esto permite que los datos obtenidos sean una fuente de información y de generación de procesos altamente interconectados que dan sentido al avance de la investigación a través del tiempo. En particular, se empleó el esquema de análisis cualitativo propuesto por Miles y Huberman (1984).

Sujetos

Se seleccionó a 30 profesores, de un total de 800, para observar su trabajo a profundidad empleando la técnica de estudio de casos. Los 800 profesores atienden las clases de matemáticas en escuelas secundarias generales y técnicas que participan en el proyecto Sec21.[1] Los 30 profesores fueron seleccionados de acuerdo con su experiencia docente y su dominio de la asignatura, como se muestra en a continuación:

Experiencia	**Dominio de la asignatura**	
	Suficiente	*Insuficiente*
Menos de 5 años	4	4
Entre 10 y 15 años	3	4
Entre 15 y 20 años	4	4
Más de 20 años	3	4
Totales	**14**	**16**

En el apartado "Cuestionario inicial", de la sección "Fuentes de datos" se describe más ampliamente cómo fueron seleccionados estos docentes. Se intentó que el número de mujeres y hombres fuera el mismo en cada categoría; en el estudio de casos participaron 13 profesoras y 17 profesores.

El ambiente escolar

Los profesores y profesoras que participaron en este estudio forman parte de la planta docente de las 79 secundarias que desarrollan el proyecto Sec21. Al menos hay una escuela en cada entidad federativa del país participando en ese proyecto. La incorporación de los planteles a Sec21 fue voluntaria, se dio en respuesta a una convocatoria de la SEP dirigida a las secretarías de Educación de los estados, que incluyó criterios que las escuelas debían cumplir respecto de la estructura física del plantel, su matrícula escolar, profesorado y directivos; además de estos criterios, cada entidad federativa aplicó condiciones adicionales para la selección de los planteles; en la mayor parte de los casos consultaron a profesores y directivos; en algunas entidades se eligió a las escuelas que tenían las mejores condiciones y en otras se seleccionaron planteles ubicados en zonas marginadas. Cada escuela fue equipada con red local y acceso a internet, *hardware* y *software* específicos para la enseñanza de matemáticas, física, biología, química, historia, geografía y español, respectivamente, y 60 computadoras; de éstas, 40 se instalaron en las aulas de medios y 20 fueron asignadas a los salones de clase.

Las aulas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas fueron dotadas con calculadoras algebraicas y libros para la enseñanza empleando la calculadora (Cedillo, 1998; 1999a; 1999b). El número de calculadoras se determinó por el tamaño del grupo más numeroso de la escuela, esto garantizó que cada estudiante tuviera acceso individual a una máquina durante la clase. Asimismo, cada profesor recibió en préstamo una calculadora que podía conservar bajo su resguardo dentro y fuera de la escuela. Además, se dotó a cada aula de matemáticas con una pantalla de cristal líquido que permite proyectar sobre un muro la pantalla de la calculadora mientras ésta se está usando. Este accesorio fue empleado por los profesores en actividades que requerían concentrar la atención del grupo en el trabajo de alguno de sus compañeros o sobre cierta reflexión general que el profesor deseaba plantear. El equipamiento del aula incluyó también una computadora de escritorio con acceso a internet, una videocasetera, un monitor de televisión de 40 pulgadas que puede emplearse, además de sus funciones usuales, para que el grupo observe acciones o eventos que se están llevando a cabo mediante la computadora. Cada aula se acondicionó con mesas que pueden configurarse de distintas maneras para el trabajo individual o en pequeños equipos.

Fuentes de datos

Las fuentes de datos más relevantes en este estudio fueron un cuestionario y una entrevista que se administraron al inicio del estudio, los registros realizados durante las sesiones de capacitación y los de la interlocución cara a cara o por vía electrónica entre los profesores y el responsable de este proyecto. En lo que sigue se describen los instrumentos que se emplearon, las formas de interacción con los profesores y los instrumentos para el registro y análisis de los datos.

Cuestionario

En la primera reunión de capacitación se aplicó un cuestionario para obtener información sobre la experiencia docente de los profesores, sus concepciones sobre el aprendizaje y sus prácticas de enseñanza, su conocimiento sobre sistemas algebraicos computarizados y su dominio de la asignatura. Las preguntas del cuestionario se diseñaron sobre situaciones específicas de la clase de matemáticas, esto arrojó datos del dominio que los profesores tienen de la asignatura.

Entrevista inicial

Tuvo como propósito afinar la información obtenida de la aplicación del cuestionario. De acuerdo con las respuestas al cuestionario se eligieron 50 profesores para ser entrevistados de manera individual, la entrevista incluyó la observación de sus clases durante un día. Se emplearon los resultados del cuestionario y la entrevista individual para seleccionar a los 30 profesores que se reportan en este estudio.

Sesiones de capacitación

Cada una de las 79 escuelas recibió capacitación por lo menos tres veces en el periodo comprendido de octubre a junio, durante los años escolares 1999-2000, 2000-2001, 2001-2002. Las reuniones de capacitación fueron de 12 horas distribuidas en dos días, en general, ocho horas los viernes y cuatro horas los sábados. Los profesores que colaboraron en el estudio de casos fueron visitados al menos cuatro veces por año escolar.

Las sesiones se videograbaron y aportaron un importante cúmulo de datos. En estas reuniones participaban los profesores de ambos turnos con la autorización de las autoridades locales y la anuencia de los maestros para trabajar los sábados. Para cada visita había un plan de trabajo orientado por el principio de "enseñar a los profesores en la misma forma en que esperábamos que ellos enseñaran a sus estudiantes" (Cedillo y Kieran, 2003). En esas sesiones se discutía con ellos el enfoque de enseñanza centrado en el uso de un sistema algebraico computarizado, se les planteaban problemas matemáticos que abordan usando el SAC y se discutían las distintas formas que presentaban, se observaban clases videograbadas o impartidas "en vivo" por el instructor y por los propios profesores y se discutía según un guión de observación previamente acordado.

Como ya se mencionó, esto fue posible por el apoyo brindado por el CONACyT (Ref. 30523), la UPN y el ILCE, quien proporcionó la mayor parte de los recursos para conformar un equipo de diez instructores que ya conocían el enfoque de enseñanza y el uso de la calculadora debido a que habían colaborado previamente con el responsable del proyecto (Cedillo, 1994).

Sesiones de autorreflexión

Se videograbaron 10 sesiones de trabajo en clase de cada uno de los 30 profesores. A solas, frente a cámara fija, ellos observaron críticamente cada una de sus clases e hicieron un análisis de sus intervenciones concentrándose en sus formas de interacción con los estudiantes, sus logros y dificultades. Concluían el análisis proponiendo estrategias para mejorar los avances de los estudiantes y para superar las dificultades detectadas. Veintidós de los profesores dieron su autorización para compartir esos videos con sus colegas y recibir una realimentación más amplia.

Foros electrónicos de discusión

Se empleó este recurso para mantener el contacto con los profesores en los tiempos entre una visita a la escuela y la siguiente. El foro se llevó a cabo como una actividad permanente vía la página electrónica del proyecto.[2] La participación fue voluntaria, con la frecuencia que cada quien considerara pertinente. Los temas del foro de discusión fueron los siguientes:

- Dificultades de los alumnos en la realización de una actividad específica.
- Dificultades de los profesores en la realización de una actividad específica.
- Experiencias de enseñanza poco exitosas respecto de una actividad específica.

- Experiencias de enseñanza exitosas respecto de una actividad específica.
- Distintas maneras de resolver un problema específico.
- Nuevas actividades diseñadas por los profesores.
- Dificultades técnicas con la calculadora.
- Dificultades técnicas con la computadora.

Resultados

De la pregunta de investigación 1

¿Cómo influye en las prácticas y concepciones de los profesores el uso de los recursos automatizados que ofrece un sistema algebraico computarizado?

Como punto de partida presentaremos un resumen cuantitativo que muestra globalmente cómo se dieron los cambios en los profesores a lo largo de los tres años que duró el estudio. Posteriormente, discutiremos cualitativamente esos resultados con base en extractos obtenidos en los encuentros de trabajo con los maestros durante las visitas a las escuelas.

La tabla siguiente resume los cambios que se registraron en los 30 profesores a lo largo de los tres años del estudio. Los niveles a que se refiere la tabla corresponden a las categorías construidas por Franke *et al.* (1997), éstas se describen con detalle en Cedillo (2003). Tales categorías fueron empleadas en este estudio para observar los cambios en las prácticas y concepciones de los profesores a lo largo del estudio longitudinal. Este resumen aporta un marco de referencia que nos permite ofrecer una caracterización de la población de profesores que participaron en el estudio.

Nivel	Perfil inicial	Final del 1^er^ año	Final del 2^a^ año	Final del 3^er^ año
1	25	22	4	2
2	5	7	21	8
3	0	1	5	10
4	0	0	0	10

La columna "Perfil inicial" muestra que, al principio del estudio, 25 de los treinta profesores tenían perfiles correspondientes a la categoría "nivel 1", lo que indica que sus concepciones y prácticas estaban arraigadas en formas de enseñanza que requieren modificarse de acuerdo con las exigencias del currículo actual de matemáticas. Los datos recabados en el cuestionario y la entrevista inicial muestran que esos profesores eran demasiado directivos en la clase, no daban oportunidad a que los alumnos abordaran por sí mismos una tarea, los dirigían paso a paso en la resolución de un problema, cuando daban oportunidad para que los estudiantes intervinieran era para que completaran con una palabra una idea del profesor y sólo les preguntaban a sus alumnos cosas que ellos ya sabían. Sólo 5 de los 30 profesores mostraron rasgos que los ubicaron en la categoría correspondiente al nivel 2. No hubo casos que se ubicaran en los niveles 3 y 4.

La columna "Final del primer año" muestra que hubo un ligero cambio en ese periodo; tres de los 25 profesores del nivel 1 empezaron a modificar sus prácticas. En particular, dejaron de situarse al frente del salón para exponer el tema de una lección, desarrollaban la clase a partir de una actividad que les permitía interactuar con los equipos de trabajo y empezaban a dar atención individual a sus estudiantes, en particular, porque les causaba curiosidad que hubieran resuelto un problema en una forma distinta a la que ellos esperaban. Uno de los profesores del nivel 2 mostró modificaciones en sus prácticas y concepciones que permitieron ubicarlo en el nivel 3. Este profesor empezó a clasificar los problemas en "aquéllos que los estudiantes podían resolver sin instrucción previa" y los "que necesitaban de su intervención". Asimismo, empezó a relatar situaciones en las que había aprendido de lo que proponían sus estudiantes.

Los cambios que se presentaron durante el primer año sugieren que difícilmente podríamos esperar modificaciones sustanciales en las prácticas de los profesores en tiempos reducidos.

La columna "Final del segundo año" muestra resultados alentadores: 18 de los 22 profesores ubicados en el nivel 1 mostraron modificaciones en su docencia que los ubican en el nivel 2 y tres de los siete del nivel 2 ocuparon el 3. En los encuentros con estos profesores –al término del segundo año– se les pidió que hicieran una autoevaluación de su desempeño, una respuesta que caracteriza sus juicios es la siguiente:

> En el primer año del proyecto nos sentíamos rebasados, eran muchas exigencias, estábamos acostumbrados a seguir el libro de texto, además, buena parte de nosotros llevamos muchos años dando el mismo curso y ya ni siquiera tomábamos en cuenta lo que venía antes o lo que seguía. Los instructores del proyecto están muy bien preparados, nosotros no sabíamos tanto como ellos, no nos imaginábamos cómo cubrir el programa si estábamos brincando de aquí para allá (sic) tratando

> de seguir el avance individual de los alumnos y las sugerencias de los instructores. Algunos queríamos pedirles que mejor ya no nos observaran ni nos entrevistaran, queríamos seguir en el proyecto, pero sin tantas presiones. Lo que nos impulsó a seguir fue ver que los alumnos llegaban motivados a la clase y que estaban aprendiendo, aunque nosotros no les estuviéramos enseñando, parece que la calculadora sí les ayuda, al principio creíamos que no los iba a dejar aprender lo que es importante, después nos dimos cuenta que la calculadora sólo hace lo que los alumnos están pensando, ellos tienen que pensar para poder usarla, quizás por eso ahora están aprendiendo más. El primer año fue difícil, para el segundo año ya teníamos una mejor comprensión de las cosas.

Este extracto corresponde a la intervención de un profesor en una reunión plenaria con sus compañeros, cabe destacar que hubo otras intervenciones que confirmaron o matizaron su acuerdo sobre lo que su compañero estaba planteando. El extracto nos indica que su participación en el proyecto los enfrentó a un fuerte reto, se destaca que la apropiación del SAC como un instrumento (en el sentido de Rabardel, 1995) fue uno de los principales obstáculos a superar:

> [...] los instructores del proyecto están muy bien preparados, nosotros no sabíamos tanto como ellos, no nos imaginábamos cómo cubrir el programa si estábamos brincando de aquí para allá (sic) tratando de seguir el avance individual de los alumnos y las sugerencias de los instructores.

Asimismo, este extracto nos informa sobre cuestiones relacionadas con la pregunta de investigación 3, que se refiere a la relación alumno-profesor. La intervención de este profesor nos habla de la influencia que ejerció en él haber atestiguado que los alumnos estaban aprendiendo cosas importantes que ellos no les habían enseñado: "la calculadora sólo hace lo que los alumnos están pensando, ellos tienen que pensar para poder usarla, quizás por eso ahora están aprendiendo más". Esto nos aporta evidencia de un cambio en las concepciones de los profesores que se refiere a que, mediante la actividad matemática con el apoyo de la calculadora, los alumnos van construyendo aprendizajes en una forma distinta a como los profesores lo habían concebido antes. A su vez, el haber presenciado los avances de sus alumnos fue una motivación para los profesores que les impulsó a seguir esforzándose para superar los obstáculos que se les presentaban. Las afirmaciones que planteamos en este párrafo adquieren mayor sustento con los extractos obtenidos de las intervenciones de otros profesores.

Se les preguntó qué opinaban sobre las posibilidades didácticas que ofrecía el SAC instalado en la calculadora después que habían tenido las tres primeras sesiones de capacitación. En esas sesiones se les asesoró para usar los recursos de la calculadora en el contexto de la resolución de un problema matemático. A continuación se muestran algunos extractos de sus intervenciones que ilustran la orientación la discusión que ocasionaba sus respuestas. Los extractos que se muestran a continuación fueron tomados de tres intervenciones, cada una de un profesor distinto.

> Tengo que pensarlo mucho antes de introducir esta herramienta en mis clases […] La calculadora hace de manera instantánea muchas de las cosas en las que yo invierto gran parte del curso para que los alumnos las aprendan […] No sólo realiza automáticamente cualquier operación aritmética, sino también cualquier operación con polinomios y ecuaciones. Si la llevo a la clase, ¿qué les voy a enseñar ahora a mis alumnos?

> No estoy de acuerdo con lo que dice mi compañero […] creo que puedo aprovechar que la calculadora hace todo eso que él mencionó para que mis alumnos aprendan a hacer las operaciones aritméticas y algebraicas correctamente. Por ejemplo, se me ocurre que en lugar de ponerlos a hacer 20 sumas con fracciones les puedo decir encuentren 20 parejas de números que al sumarlos den por resultado x fracción (sic), digamos […] 9/10. Eso además les puede ayudar a que entiendan qué es sumar y a que relacionen esto con la resta, porque si restan 1/2 a 9/10 encuentran el número que sumado con 1/2 da 9/10. Lo mismo se puede hacer con los números decimales, con los negativos y con los polinomios, por ejemplo, puedo pedirles que construyan veinte parejas de expresiones algebraicas que den por resultado 3b.

> Estoy de acuerdo con esto último, pero yo estaba pensando en las gráficas […] Con el apoyo de la calculadora los alumnos pueden construir muchas gráficas en muy poco tiempo. Aprovechando esto les puedo mostrar un ejemplo que ilustre cómo construir una gráfica de una parábola, por ejemplo, la gráfica de x^2. Luego les puedo pedir que construyan la gráfica de x^2-1 […] A continuación les puedo pedir que construyan una parábola que pase entre las gráficas anteriores […] Esto lo puedo ir complicando tanto como quiera. Creo que con eso los alumnos aprenderán el papel que desempeñan los coeficientes a, b y c en la ecuación $y=ax^2+bx+c$ y en

> su gráfica. Así los alumnos pueden aprender a través de la vista (sic) y no como yo aprendí, que por cierto me costó mucho esfuerzo. Me queda claro que si uso la calculadora en mis clases voy a tener que enseñar de manera distinta a cómo a mi me enseñaron.

La columna "Final del tercer año" muestra que al término del estudio hubo dos profesores que se mantuvieron en el nivel 1 durante los tres años; ocho llegaron al nivel 2, de los cuales dos provienen del 1 y seis se mantuvieron en el 2. En el nivel 3 concluyeron 10 profesores, todos provenientes del segundo nivel y, finalmente, alcanzaron el nivel 4; de ellos, cinco procedentes del nivel 3 y los otros cinco del 2. Estos datos muestran que dos profesores se mantuvieron en el nivel 1; uno, que inició en ese nivel y alcanzó el 4, seis docentes cambiaron sólo un nivel (del 1 al 2) y 23 profesores avanzaron dos niveles.

De la pregunta de investigación 2
¿Cómo influye la experiencia docente y el conocimiento matemático de los profesores en sus reacciones ante el uso de un sistema algebraico computarizado?

Los profesores más resistentes a usar regularmente la calculadora fueron aquellos que tenían más años de experiencia docente, entre ellos están los dos que se mantuvieron en el nivel 1. Los datos recabados sugieren que su resistencia se debió a que ellos se consideraban buenos profesores, de hecho tenían un magnífico prestigio en su comunidad y el reconocimiento de los alumnos, padres de familia y directivos. Su posición puede resumirse en la expresión de uno de ellos:

> Llevo muchos años como maestro, he aprendido cómo hacer las cosas bien, yo tengo mis propios métodos y los buenos resultados que obtengo cada año con mis estudiantes lo confirman; si ya conozco un camino que resulta acertado, ¿por qué debo ponerlo en riesgo con algo que no conozco y que no acabo de entender? Además, en poco tiempo creo que me jubilaré.

Ese caso contrasta con el del profesor que avanzó del nivel 1 al 4, él cuenta con la mayor experiencia en número de años en el grupo de los 30 profesores y un buen prestigio en su comunidad. Una de las explicaciones plausibles para referirse a este contraste es que este profesor posee un excelente dominio de los contenidos que enseña. Él lo explica de la siguiente manera:

> Al principio creí que era un proyecto más, que en el momento está de moda y que en poco tiempo se abandona, es más, creí que después de la primera reunión de capacitación nunca los volvería a ver (a los instructores). Su frecuente presencia en la escuela, las discusiones que tuvimos y, sobre todo, lo que noté que aprendían los estudiantes, me indicó que era algo que valía la pena intentar, que había muchas cosas nuevas e interesantes que en la práctica funcionaban. Lo que más me interesa son mis alumnos, entonces decidí que aunque ya estuviera viejo debería esforzarme y hacer la prueba, estaba pensando jubilarme pero ahora estoy convencido que esto vale la pena y aquí seguiré por un buen tiempo.

Entre los profesores con menos experiencia el dominio de la asignatura parece ser determinante. Los que más avanzaron son los que tienen un conocimiento más sólido de la materia que enseñan. Los datos que recabamos muestran que los profesores que al inicio del estudio estaban en el nivel 2 poseían un buen conocimiento de su asignatura. Esos cinco profesores se movieron gradualmente del nivel 2 al 4 en los tres años del estudio. Una característica que distinguió a los profesores con poca experiencia y un dominio insuficiente de la asignatura es su buena actitud hacia el proyecto durante los tres años de trabajo. Esto sugiere que con un poco más de tiempo, y el apoyo pertinente, podrían lograr un mejor conocimiento de la materia que imparten y alcanzar una formación docente más acorde con los requerimientos actuales.

Los casos que necesitaron más atención fueron los de quienes cuentan con más años en servicio y un dominio insuficiente de la asignatura. No obstante, estos profesores lograron avanzar al menos un nivel en el marco de las categorías de análisis que empleamos. Una explicación plausible para el cambio es su participación en un grupo que adquirió una cohesión aceptable con el tiempo. Los datos de esta investigación sugieren que el compañerismo que mostraban sus colegas, en particular los que iban logrando más intervenciones exitosas en los foros de discusión, los impulsó a cambiar su actitud y desarrollar un esfuerzo extraordinario. El siguiente extracto corresponde a una comunicación durante el foro electrónico:

> Quiero agradecer el apoyo que me han dado los compañeros. Hubo momentos en que estaba a punto de no participar más porque me apenaban las consultas que hacía, pero siempre había alguien que amablemente me ayudaba. Por otra parte, mis alumnos me estaban dejando atrás, ellos podían resolver problemas que yo no entendía, a veces no tenía posibilidad de decirles si lo que habían hecho era correcto o no, mis alumnos no se daban cuenta de esto porque eran ellos los me mostraban sus soluciones y me las explicaban. Finalmente decidí decirles a mis alumnos que en la clase todos estábamos aprendiendo, que a veces yo iba adelante de ellos, pero en otras ellos llevaban la delantera, que quería que aprendiéramos juntos y que nos apoyaríamos entre todos. Sé que aún me falta mucho por aprender, por ahora puedo decir que aprendí que lo que nunca haré será pedir que me den la solución de un problema, cuando algo se me complique demasiado sólo pediré pistas, si quiero avanzar debo resolverlo por mí mismo, no importa que me tome mucho tiempo hacerlo.

De la pregunta de investigación 3

¿Cómo afecta en la relación estudiante-profesor la incorporación de un sistema algebraico computarizado en las clases regulares de matemáticas?

Los datos recabados sugieren fuertemente que la introducción de la calculadora algebraica en la clase de matemáticas motivó cambios sensibles en la relación maestro-alumno. A este respecto cabe señalar, que los profesores que se convencieron de usar el SAC en sus clases consideraron como un aspecto insoslayable cambiar sensiblemente su forma de enseñanza. Esto se hace evidente en los extractos incluidos sobre la pregunta de investigación 1, esos relatos indican claramente que si van a usar la calculadora entonces deben basar sus clases en la actividad de los alumnos:

> [...] creo que puedo aprovechar que la calculadora hace todo eso que él mencionó para que mis alumnos aprendan a hacer las operaciones aritméticas y algebraicas correctamente. Por ejemplo, se me ocurre que en lugar de ponerlos a hacer 20 sumas con fracciones les puedo decir encuentren 20 parejas de números que al sumarlos den por resultado x fracción (sic), digamos... 9/10.

Una lectura cuidadosa de ese extracto reporta claramente un cambio importante en la relación entre el maestro y sus alumnos: basta con que el profesor proponga una actividad interesante, no se requiere que exponga el tema o muestre una colección de ejemplos, a partir de esa actividad los estudiantes generan una intensa dinámica en el salón de clases, producen muchas respuestas distintas y generan estrategias no convencionales. El profesor deja de ser la única fuente de retroalimentación para los alumnos, la calculadora se convierte en un "compañero" al que pueden "consultar" para verificar por sí mismos sus conjeturas.

Esta forma de trabajo condujo a los profesores a dejar de situarse al frente del aula y empezar la clase proponiendo una actividad que retara el intelecto de sus alumnos. El trabajo en equipo de los estudiantes y el apoyo que ofrece la calculadora liberan tiempo al profesor para que recorra el salón de clases y se incorpore a las discusiones de sus alumnos. A partir de esto la relación estudiante-profesor cambia radicalmente, el maestro se ubica como asesor o "facilitador" en lugar de "enseñante" (o compañero más competente en el sentido que plantea Vygotsky). Además, para ser un buen asesor el profesor necesita aprender de sus alumnos; los datos recabados muestran que las respuestas originales de los estudiantes y su habilidad en el manejo de la máquina, ubicaron a los docentes en muchas ocasiones en el lugar de aprendices.

Conclusiones

La experiencia registrada con los profesores de matemáticas que participaron en este estudio nos conduce a evocar la forma en que estudiamos matemáticas antes del advenimiento de los sistemas algebraicos computarizados. Emplearemos esa mirada retrospectiva para dar contexto a las conclusiones de este reporte.

Un cambio evidente que introduce el uso de un SAC en la clase de matemáticas es que el estudio del álgebra debe abordarse con recursos y principios didácticos totalmente distintos a los empleados en la enseñanza antes de la aparición de esa tecnología. En un curso de álgebra sin tecnología domina el reconocimiento de la *forma* de las expresiones matemáticas. Por ejemplo, la forma de la ecuación $y=x^2+4x-5$ permite identificar inmediatamente el punto (0,-5) como un punto especial. Con esto sabemos en qué lugar corta la gráfica de esa ecuación al eje Y y basta con evaluarla en $x=0$; eso puede "leerse" directamente de la ecuación y nos permite afirmar que el punto (0, -5) está en la gráfica de $y=x^2+4x-5$.

Otro principio básico en el estudio del álgebra es "cambiar la forma de una expresión sin alterar nada". Hacemos esto cambiando la forma inicial, por ejemplo expresar como producto: $y=x^2+4x-5=(x-1)\,(x+5)$. Es la misma expresión representada mediante otra forma, ambas tienen la misma gráfica y los mismos valores numéricos en una tabla, pero tienen usos diferentes: $(x-1)\ (x+5)$ nos permite "leer" los ceros de la función: $x=1$ y $x=-5$. Por supuesto esto descansa en el conocimiento de un hecho básico: "si el producto de dos números es cero al menos uno de ellos debe ser cero". Si quisiéramos leer de la ecuación cómo es su gráfica acudiríamos de nuevo a cambiar su forma y obtendríamos la expresión equivalente:

$$x^2+4x-5=(x+2)^2-9.$$

Nuevamente, mediante el reconocimiento de la forma podemos leer de esa ecuación que su gráfica es una parábola "como la de $y=x^2$", pero su vértice está en el punto (-2,-9).

En síntesis, el mensaje constante que proviene de un breve análisis como el anterior es que la relación entre dos variables puede expresarse a través de formas equivalentes diferentes. Los enunciados $y=x^2+4x-5$, $y=(x-1)\ (x+5)$ y $y=(x+2)^2-9$, determinan la misma relación entre x y y, lo cual puede verificarse observando que producen las mismas tablas de valores y las mismas gráficas. Pero cada enunciado revela información que permanecía oculta en cada uno de los otros dos. El álgebra nos proporciona maneras de extraer dichos significados ocultos de los enunciados. La forma $y=(x-1)\ (x+5)$ nos proporciona instantáneamente información acerca de sus *ceros* o *intersecciones* en x, pero tenemos que realizar un desciframiento adicional para encontrar la intersección con el eje Y. Todavía es necesario hacer algo más para encontrar un valor extremo (el vértice). La forma $y=x^2+4x-5$ nos proporciona, a simple vista, la información sobre la intersección en el eje Y, pero nos obliga a hacer un poco de trabajo extra para encontrar el resto de las características de la gráfica. La forma $y=(x+2)^2-9$, nos "dice" al instante dónde se encuentra el vértice, pero oculta las intersecciones hasta que las "saquemos a la luz".

El ejemplo que hemos desarrollado puede extenderse prácticamente a cualquier otro caso de manipulación algebraica. Visto así, el álgebra parece centrarse enfáticamente en *la forma*. A medida que resolvemos problemas de álgebra, frecuentemente comenzamos con algo que ya sabíamos, desarrollamos una manera de expresarlo con el propósito de cambiar la forma de dicha expresión y revelar algo que no sabíamos en un principio. Para esto los profesores dejan como tarea muchos problemas acerca de las edades, de trenes y dinero. Los más simples no parecen requerir nada de álgebra, a menos que incluyan cantidades difíciles de manejar. Igualmente se trabaja con ecuaciones de la recta en varias formas, como punto-punto, punto-pendiente, pendiente-intersección, intersección-intersección; sólo son algunos ejemplos más de que el álgebra tiene que ver con la forma y con sus transformaciones. En conclusión, si somos capaces de encontrar una manera de cambiar la forma sin alterar el significado, podemos revelar información oculta.

El álgebra con tecnología

Si el asunto central continúa siendo la forma, entonces los sistemas algebraicos computarizados presentan un reto amenazador. Los SAC hacen, sin esfuerzo, lo que anteriormente queríamos que los estudiantes hicieran. Este conflicto surge desde la época en que la manipulación simbólica era todavía tan cara que no era un competidor serio en la arena educativa, pero el choque fue enorme para los profesores de Cálculo cuando muchos estudiantes se las arreglaron para adquirir esa tecnología. Antes de la existencia de calculadoras capaces de realizar diferenciación e integración simbólica, los profesores no podían desatender las mecanizaciones y se lamentaban que no podían poner atención a los aspectos conceptuales o a las aplicaciones importantes. Las técnicas de integración debían ser dominadas y buscaban maneras para ayudar a los estudiantes en la superación de los obstáculos que se encuentran en el manejo de procedimientos difíciles de aprender. Súbitamente, se hallaron con el momento en que los estudiantes podían comprar una pequeña máquina que hacía todos esos sofisticados procedimientos y que costaba menos de lo que les costaba aprender a hacerlo solos. Por consiguiente, se cuestionó el enfoque primario de varios cursos de cálculo y los profesores tuvieron que reevaluar qué partes de sus cursos eran realmente importantes (Goldenberg, 2003). Aprender algunas de las técnicas que la calculadora realizaba quizás seguiría siendo importante, pero los educadores ya no podían argüir que “obtener la respuesta” era parte de las razones para pedir a los estudiantes que aprendieran estas técnicas.

El problema que enfrenta el álgebra de secundaria es un poco más agudo. Nosotros, como educadores, no sólo debemos decidir qué técnicas de manipulación algebraica relegar a la pequeña máquina y qué técnicas aritméticas y de cálculo debemos continuar enseñando a los estudiantes, también es necesario repensar el propósito del álgebra como resultado de la influencia de las herramientas modernas y del énfasis educativo. La tecnología de graficación, en la computadora y después en la calculadora gráfica, representa un difícil reto para la enseñanza actual de la aritmética y el álgebra. Si el álgebra ayuda a los estudiantes a encontrar las raíces de las ecuaciones, las pendientes, tangentes, intersecciones, máximos, mínimos, soluciones a sistemas de ecuaciones de dos variables o cualquiera de los otras respuestas numéricas o relacionadas con aplicaciones, entonces, todo lo que necesitan nuestros estudiantes es tener un acceso fácil y rápido a una gráfica; ya no necesitan cambiar la *forma* de un enunciado matemático, porque cualquier forma de una ecuación se graficará tan fácilmente como cualquier otra. Es más, con el editor de gráficas los alumnos no sólo no necesitan llevar a cabo las manipulaciones algebraicas a mano, no necesitan un sistema algebraico computarizado para que haga las manipulaciones.

Para utilizar las herramientas graficadoras las funciones deben ser expresables en un lenguaje algebraico que entiendan las herramientas. A medida que dichas herramientas graficadoras aparecían, ese requisito restringió seriamente el dominio. Aún más, para que las gráficas pudieran usarse para encontrar respuestas numéricas –en problemas relacionados con el interés, por ejemplo– las gráficas deben ser continuas y de comportamiento regular por naturaleza. A pesar de las limitaciones antes descritas, las herramientas graficadoras resultan muy adecuadas para abordar muchos temas, como la física o la economía, porque muchas de las aplicaciones asociadas a estas materias se modelan con funciones continuas "simples". Entonces, las herramientas favorecen un dominio de ciertos problemas matemáticos sobre otros, incrementando el papel del modelaje extra-matemático. Los datos arrojados por este estudio muestran que los profesores encuentran que las herramientas se han convertido en un sustituto del álgebra como medio para resolver ecuaciones usando manipulaciones adecuadas. Al mismo tiempo, las herramientas han dejado al álgebra intacta como un lenguaje en el que se expresan ecuaciones.

Por último, queremos destacar que los resultados de este estudio sugieren fuertemente que los objetivos sobre el dominio de destrezas algebraicas deben ser reevaluados a la luz de los procedimientos más fácilmente realizables por la computadora o la calculadora. Las propiedades de las funciones elementales son todavía importantes para modelar las relaciones cuantitativas, pero el dominio de los procedimientos y técnicas de manipulación algebraica parecen de poco valor ante los recursos didácticos que pueden desarrollarse empleando sistemas algebraicos computarizados.

Notas

[1] Proyecto auspiciado por la Secretaría de Educación Pública (SEP), el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) y la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). La investigación también fue apoyada con recursos del Proyecto CONACyT, ref. 30523.

[2] http://sec21.ilce.edu.mx/matematicas/calculadoras/.

Referencias

Artigue, M. (1997). "Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l' activité mathematique avec des systémes de mathématiques symboliques", *Actes de l' université d' eté 1996* (pp. 19-40), Rennes: IREM, Université de Rennes.

Cedillo, T. (2003). "El álgebra como lenguaje alternativo y de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", *Perfiles Educativos* 101, pp. 50-65, México.

Cedillo, T. (1994). "Matemáticas en la escuela secundaria: la calculadora como apoyo en la enseñanza del álgebra", *Didáctica y currículum: Reportes de investigación seleccionados*, 40-56, México: SEP-CONACyT.

Cedillo, T. (1998). "Sentido numérico e iniciación al álgebra", *La calculadora en el salón de clase*, vol. 1, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cedillo, T. (1999a). "Desarrollo de habilidades algebraicas", *La calculadora en el salón de clase*, vol. 3, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cedillo, T. (1999b). "Nubes de puntos y modelación algebraica", *La calculadora en el salón de clase*, vol. 4, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cedillo, T. y Kieran, C. (2003). "Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators", en Fey *et al.* (eds.) *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*, cap. 13, 219-239, Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Drijvers, P. (2000). "Students encountering obstacles using CAS", *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5, 189-209.

Drijvers, P. (2002). "Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities", *Zentralblatt fürDidaktik der Mathematik* 34(5), 221-228.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*, conferencia, Utrecht: CD-b press.

Franke, M.; Fennema, E. y Carpenter, T. (1997). "Changing teachers: interactions between beliefs and classroom practice", en Fennema y Scott Nelson (eds.), *Mathematics teachers in transition*, Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum associates, Publishers.

Goldenberg, E.P. (2003). "Algebra and computer algebra", en Fey *et al.* (eds.), *Computer algebra systems in secondary school education*, pp. 9-30, Reston VA: NCTM.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). "The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators", *Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227.

Guin, D. y Trouche, L. (2002). "Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS enviroments: necessity of intrumental orchestation", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.

Heck, A. (2001). "Variables in computer algebra, mathematics and science", *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 8, 195-221.

Kutzler, B. (2003). "CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics", en Fey *et al.* (eds.), *Computer algebra systems in secondary school education*, capítulo 3, pp. 53-71, Reston VA: NCTM.

Lagrange, J.B. (2000). "L' integration d' instruments informatiques dans l' enseignement: un approche par les techniques", *Educational Studies in Mathematics* 43, 1-30.

Miles, M. y Huberman, A. (1984). *Qualitative data analysis, a sourcebook of new methods*, Londres: Sage Publications.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies –approche cognitive des instruments contemporains*, París: Armand Colin.

Trouche, L. (2000). "La parabole du gaucher et de la cacerole á bec verseur: étude des processus d' aprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques", *Educational Studies in Mathematics* 41, 239-264.

Trouche, L. (2005). "Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects", en Guin *et al.* (eds.) *The didactical challenge of symbolic calculators*, capítulo 1, pp. 9-40, Nueva York: Springer.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). "Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity", *European Journal of Psychology of Education* 10, 77-103.

Vergnaud, G. (1987). "About constructivism, a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers", en Bergerson, Herscovics y Kieran (eds.), *Proceedings of pme 11* (vol. 1, pp. 7880), Montreal: University of Montreal.

Vergnaud, G. (1996). "Au fond de l'apprentissage, la conceptualization [At the base of learning, conceptualization] ", en Noirfalise y Perrin (eds.), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand: IREM, Université de Clermont-Ferrand II.